2024

الصف 4 العلمي

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

استاذ رابع علمي
@stad4al

الجزء 1

Mathematics
الرياضيات

الفصول الأربعة الأولى

ريهاب جاسم

07810772656

أعداد الأستاذ
ريهاب جاسم محمد

الفصل الاول

المنطق الرياضي Mathematical

العبارات المنطقية Logical Statements

هي جملة خبرية ذات معنى واضح وتكون اما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد. مثل:

2 x 3=6 عبارة صائبة (True) ويرمز لها T

5>7 عبارة خاطئة (False) ويرمز لها F

4+ 5 =10 عبارة خاطئة F

العدد 8 عدد أولي عبارة خاطئة F

العدد 6 يقبل القسمة على 3 عبارة صائبة T

استاذ رابع علمي
@stad4al

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
اداة الربط (و)	$\wedge$
اداة الربط (أو)	$\vee$
الاقتضاء باتجاهين	$\Longleftrightarrow$
الاقتضاء باتجاه	$\Longleftarrow$
اداة الربط اذا كان .. فأن	$\longleftarrow$
اداة الربط اذا وفقط اذا	$\longleftrightarrow$
التسوير الجزئي	$\exists$
التسوير الكلي	$\forall$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

المنطق الرياضي هو ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات

العبارات المنطقية Logical Statements

في المنطق الرياضي نقسم الجمل الرياضية الى نوعين :-

أ- جملة لا تحمل الينا خبرا معينا.

ب- جملة تحمل الينا خبرا معينا (جملة خبرية).

وأن من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة او خاطئة ولقد اتفقنا بأن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية اما صائبة او خاطئة ولايمكن ان تكون صائبة او خاطئة في آن واحد

ولقد علمت انه اذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمزP وكانت P خاطئة F (False) فان نفيP تكون صائبة T (True) .

العبارة البسيطة : هي العبارة التي تشمل خبرا واحدا . مثل: $(4)^2 = 16 , 5 > 3, 2 + 3 = 7$

العبارة المركبة : وهي العبارة التي تحمل خبرين أو اكثر. مثل :1) $(3)^2 = 9 \ \text{OR} \ x.x^2 = x^3$

2) اذا كان المثلث متساوي الاضلاع فان زواياه متساوية

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نفي العبارة المنطقية

استاذ رابع علمي
@stad4al

اذا كانت العبارة (P) خاطئة فأن نفيها صائبة . وبالعكس

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

P	P~
F	T
T	F

ومن المفيد أن نذكر جدولي الصواب لأداتي الربط و (∧) , او (∨)

P	Q	Q∧P
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	P∨Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

أداة الربط: (اذا كان ... فان) [If...then]

هي اداة تستخدم لتكوين العبارة المركبة ويرمز لها ⟶ وهي اداة شرطية اذا كانت P , Q عبارتين منطقيتين فأنه يرمز للعبارة المركبة لهما بالرمز P ⟶ Q وتقرأ (اذا كان P فان Q)

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

والجدول التالي يوضح عمل هذه الأداة:

P	Q	P ⟶ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

❖ في هذه الأداة تكون القيم جميعها (صائبة) ماعدا اذا كانت المقدمة (صائبة) والتالية (خاطئة) فقط

مثال / اذكر قيم الصواب العبارات الاتية :

1- اذا كان $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فان $\sqrt{-2} \in R$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة أيضاً.

2- اذا كان 3+5 =8 فان 2+6=7

الحل / العبارة خاطئة لان المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

استاذ رابع علمي
@stad4al

3- اذا كان 5+7=11 فأن 6+2=8

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة.

4- اذا كان Zero =1 فأن $\sqrt{3}$ عدد نسبي

الحل/ العبارة صائبة لان المقدمة خاطئة والتالية صائبة.

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

اداة الربط : (اذا وفقط اذا) [If and only If]

هي اداة شرطية ثنائية ورمزها $\longleftrightarrow$ وتكون العبارة المركبة $P \longleftrightarrow Q$ صائبة عندما تكون العبارتين المركبتين لها صائبتين معا أو خاطئتين معاً.

هذه العبارة المركبة تسمى (عبارة شرطية ثنائية) فمثلا المثلث المتساوي الأضلاع قياس زواياه متساوية وكذلك اذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية كان المثلث متساوي الاضلاع.

هذه العبارة المركبة هي $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$ ويرمز لها بالرمز $P \longleftrightarrow Q$ او $Q \longleftrightarrow P$

وتقرأ (P اذا وفقط اذا Q) او (Q اذا وفقط اذا P) والجدول التالي يوضح عمل الأداة المركبة $P \longleftrightarrow Q$

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$	$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$ $P \longleftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ريهاب جاسم
مدرسة مادة الرياضيات

❖ اي ان $P \longleftrightarrow Q$

تكون صائبة في حالتين هما: اذا كانت كل من العبارتين المركبتين اما صائبتين او خاطئتين معا.

مثال / أ- $x = -1 , x = 4 \leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

ب- $x^5 = -32 \leftrightarrow x = -2$

استاذ رابع علمي
@stad4al

الاقتضاء impaction

عندما تكون اداة الربط ⟹ صائبة دائما فتكتب $P \Longrightarrow Q$ (P تقتضي Q)ستوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى / الاقتضاء في اتجاه واحدة والذي يرمز له ⟹ لنرمز (x=3) بالرمز P ولنرمز $(x^2 = 9)$ بالرمزQ

فاذا كانت X= 3 صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $(x^2 = 9)$ اي $P \Longrightarrow Q$

اما اذا كانت $(x^2 = 9)$ فان $X = 3$ أي : $Q \not\Longrightarrow P$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الحالة الثانية / عندما تكون اداة الربط ⟷ صائبة فتكتب $P \Longleftrightarrow Q$ وهذا لايتم الا اذا كانت العبارتين صائبتين معا أو خاطئتين معا.

الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يرمز له ⟺ لنرمز (X=3) بالرمزP ولنرمز $(^3= 27)$ بالرمزQ

فاذا كانت X=3 صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $(x^3 = 27)$ أي : $p \Longrightarrow Q$

واذا كانت$(x^3 = 27)$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون X= 3 أي: $Q \Longrightarrow P$

رهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

ان $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ يعني ان $P \Longleftrightarrow Q$

مثال / اختر احد الرمزين ⟸ , ⟺ لوضعه بين التعبيرين في الحالات الاتية لتصبح العبارة صحيحة :-

1- $x = 2 , x^3 = 8$

2- $x > 2 \quad , x > 5$

3- $x^2 \geq 0 , x \leq 0$

4- p : أ ب ج د شكل رباعي قطراه متناصفان , Q أ ب ج د متوازي اضلاع

الحل / 1- $x = 2 \Longleftarrow x^3 = 8$

2- $x > 2 \Longleftarrow x > 5$

3- $x^2 \geq 0 \Longleftarrow x \leq 0$

4- $Q \Longleftarrow p$

استاذ رابع علمي
@stad4al

العبارتان المتكافئتان Equivalent Statenaients

تعريف :- يقال ان العبارة P مكافئة للعبارة Q اذا كان لها نفس جدول الصواب ويرمز لها بالرمز ≡

مثال/ اثبت آن $P \rightarrow \equiv \sim P \vee Q$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T
			↑ ≡	↑

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حلول تمارين [1, 1]

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س1/ بين أيا من العبارات التالية صائبة وأيا منها خاطئة مع السبب :

أ- العدد 5 يقسم العدد 25 و **العدد 7 يقسم العدد 25**

الحل/ (صائبة) T ∧ (خاطئة) F = F (خاطئة)

ب- العدد 5 يقسم العدد 25 أو **العدد 7 يقسم العدد 25**

الحل/ (صائبة) T ∨ (خاطئة) F = T (صائبة)

ت- العدد 7 ليس أوليا أو **العدد 4 أوليا**

الحل / (خاطئة) F ∨ (خاطئة) F = F (خاطئة)

ث- قطرا المربع متعامدان و **قطرا متوازي الأضلاع متناصفان**

الحل / (صائبة) T ∧ (صائبة) T

استاذ رابع علمي
@stad4al

س2 / استخدم ⟺ او ⟸ للربط بين العبارتين في الجدول الاتي :

ج/ لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة

العبارة P	الرمز	العبارة Q
الشكل الرباعي مستطيل	⟸	قطرا الشكل الرباعي يتناصفان
الشكل الرباعي معين	⟸	اضلاع الشكل الرباعي متطابقة
الشكل الرباعي مستطيل	⟺	الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم
a,b = 0, a,b e R	⟺	a=0, b =0
X = 3	⟸	$x^2 = 9$
الشكل الرباعي مربع	⟸	الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم
$x^2 = 25$	⟹	X = 5
$X^3 = -125$	⟺	X = -5
أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع	⟸	أ ب جـ مثلث متساوي الساقين
X=1 ∨ X = 2	⟺	(X-1) (X-2)=0

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س 3 / برهن أن :-

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

-1 $P \to Q \equiv \sim Q \to \sim P$

P	Q	$P \to Q$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \to \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

≡

استاذ رابع علمي
@stad4al

-2 $\sim(P \to Q) \equiv P \wedge \sim Q$

P	Q	$\sim Q$	$(P \to Q)$	$\sim(P \to Q)$	$P \wedge \sim Q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

$\equiv$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س4 / اذا كانت P صائبة,Q صائبة, S خاطئة فأي العبارات التالية خاطئة وايها صائبة.

-1 $\overset{F}{S} \vee \overset{T}{(P \to Q)}$ صائبة

-2 $\overset{T}{P} \wedge \overset{F}{(P \leftrightarrow S)}$ خاطئة

-3 $\overset{T}{P} \wedge \overset{T}{(S \leftrightarrow Q)}$ صائبة

-4 $\overset{F}{S} \vee \overset{T}{(S \leftrightarrow S)}$ صائبة

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س 5 / ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

P , Q ,S ثلاث عبارات اعتمدت في الأسئلة التالية :

-1 $P \to \sim P$ تكافئ

أ- $P \to \sim P$ ب- $\sim P \to P$ جـ- $\sim P$ د- $\sim P \wedge P$

-2 $S \leftrightarrow S$ عبارة :

أ- صائبة دائما ب ـ صائبة مرة واحدة جـ ـ خاطئة دائما د- خاطئة مرة واحدة

-3 نفي العبارة $\sim S \vee (9 > 5 + 3)$ هو :

أ- $\sim S \vee 9 \geq 5 + 3$ ب – $\sim S \vee 9 < 5 + 3$ جـ- $\sim S \wedge 9 \leq 5 + 3$ د- $S \wedge 9 \leq 5 + 3$

الجمل المفتوحة Open Sentences

عرفت العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية اما صائبة او خاطئة (وليس الاثنان معا) ولكن اذا لاحظنا الجمل الاتية :

أ- X عدد صحيح اكبر من الصفر والتي ترمز لها بالرمز P(X)

ب- Y+1 =3 والتي نرمز لها بالرمز Q(X)

ج- جـ- a+b =6 حيث a,b اعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز G(a,b) .

د- ..... احدى مدن العراق

وجدنا ليس بالامكان القول أن كلا من هذه الجمل تمثل عبارة منطقية. ولكن اذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف X تصبح (9 عدد صحيح اكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة اعط قيمة ل(Y) في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة.

ولو اعطيت كلا من a,b قيمة تساوي 3 نحصل على العبارة (3+3=6) وهي عبارة صائبة. ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة.

استاذ رابع علمي
@stad4al

تعريف :-

1- المتغير هو رمز يأخذ قيما لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير.

2- الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير او اكثر وتتحول الى عبارة عند اعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض.

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

تكافؤ الجمل المفتوحة

هي الجمل التي يكون لها نفس مجموعة الحل في مجموعة تعويض واحدة.لتكن Q(x) : x-1=1 , P(x): 2x = 4

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة P(X) هي {2} وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة Q(x) هي {2} تسمي الجملتان المفتوحتان Q(x),(p (X متكافئتين وذلك لتساوي مجموعتي الحل لكل منهما .

مثال / اذا كانت $Q(X) : X^2=4$, $P(x) : X=2$ ومجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z.
هل p(x) ,Q(X) متكافئتان؟

الحل :-

نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة p(x) هي {2} وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة Q (X) هي {2,-2} وبما ان {2} ≠ {2,-2}

لذا نقول ان الجملتين المفتوحتين Q(x), P(x) جملتان غير متكافئتان

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

تعريف :

ان نفي الجملة المفتوحة p(x) هي الجملة المفتوحة ليس صحيحا (P(X) او أي جملة مفتوحة تكافئ ذلك وسوف نستعمل الرمز ~P(x) للتعبير عن نفي الجملة المفتوحة p(x)

★ نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المنفية هي مجموعة التعويض/ مجموعة حل الجملة p(x) .

مثال/ لنفرض أن مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الأعداد الصحيحة

نفيها ~P(x)	الجملة المفتوحة p(x)
$X^2-4 \neq 0$	$X^2-4 = 0$
X ليس عدد صحيحا زوجياً	Xعدد صحيحا زوجياً
$X \neq 4$ او x+1=6	$X=4$ و $x+1 \neq 6$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حلول تمارين (2-1)

س1/ مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الاتية :

	الجملة المفتوحة	مجموعة التعويض
أ-	$X<3$	الأعداد الطبيعية

الحل $x=\{0,1,2\}$

ب-	$X^2-11x+30=0$	$\{10,6,5,3\}$

الحل / $X^2-11x+30=0$

$(x-6)(x-5)=0$

$S=\{6,5\}$

جـ-	$(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)(x-30)=0$	الاعداد الصحيحة Z

الحل / $X=1$

$x=\frac{3}{5}\notin Z \quad x=30$

$S_x=\{1,30\}$

د -	$x>4$ و $(x-1)(x-5)=0$	الاعداد الطبيعية N

الحل / $x=1 \wedge x>4$ أو $x=5$

$X=5 \wedge x>4$

$\{1,5\}\cap\{x: x>4\}$

$S=\{5,6,7.....\}$

هـ-	x لا تقبل القسمة على 4	$\{10, 8, 6, 4, 2\}$

الحل / $S_x=\{2,6,10\}$

و-	$x+5\geq 0$	الاعداد الصحيحة Z

الحل / $s_x=\{x: x\in Z, x\geq -5\}$

استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س2/ يوجد في كل مما ياتي زوج من الجمل المفتوحة أي من مفتوحتين متكافئتين مع العلم أن مجموعة التعويض هي Z . هذه الأزواج يمثل جملتين

أ- $3x-5=x+7$ و $x-3=3$

$3x-x=7+5 \wedge X=3+3$

$2x=12 \wedge X=6$

$X=6 \wedge X=6$

$S=\{6\}$

الجملتان متكافئتان لان مجموعة الحل لكيلهما متساوية

ب- $x^2=4$ و $x=2$

$x=\mp 2$ $\quad$ $x=2$

$s=\{-2,2\}$ $\quad$ $s=\{2\}$

الجملتان غير متكافئتان لان مجموعة غير متساوية

جـ- $x^2=9$ و $x=3$ او $x=-3$

$X=\mp 3$ $\quad$ $\{-3\} \cup \{3\}$

$s=\{-3,3\}$ $\quad$ $s=\{-3, 3\}$

الجملتان متكافئتان

د- $(x+1)(2x+1)=0$ و $x+1=0$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$ $\quad$ $x=-1$

$2x+1=0 \rightarrow 2x=-1$ $\quad$ $S=\{-1\}$

$x=\frac{-1}{2} \in Z$

$S=\{-1\}$ الجملتان متكافئتان

هـ- $(x-1)(x-5)=0$ و $X^2-6x+5=0$

$X=1$ $\quad$ $(x-5)(x-1)=0$

$X=5$ $\quad$ $x=5 , x=1$

$S=\{1,5\}$ $\quad$ $S=\{1,5\}$

الجملتان متكافئتان

و- $X=0$ و X أكبر من -1 واصغر من 1

$S=\{0\}$ $\quad$ $S=\{0\}$

الجملتان متكافئتان

ز- $0 \le x < 3$ و $(x-1)(x-2)=0$

$S=\{0,1,2\}$ $\quad$ $x=1, x=2$

$S=\{1,2\}$

الجملتان غير متكافئتان

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س3/ انف كل جملة مفتوحة من الجمل الاتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية مع العلم أن مجموعة التعويض هي المجموعة {1,2,3,4,5} .

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الجملة المفتوحة	نفي الجملة المفتوحة	مجموعة الحل
أ- $2x=4$	$2x\neq4$	$X=\{1,3,4,5\}$
أ- $X+4=7$	$X+4\neq7$	$X=\{1,2,4,5\}$
جـ- $(x-3)(x-4)=0$	$x\neq 3, x\neq 4$	$X=\{1,2,5\}$
د- $x^2\neq9$ و $X+2=4$	$x^2=9$ او $X+2\neq4$ $x=\mp3$ او $x\neq 4-2$ $x=\mp3$ أو $x\neq2$	$X=\{1,3,4,5\}\cup\{3\}$ $S=\{1,3,4,5\}$ -)لا تنتمي الى مجموعة التعويض لان (3
هـ - $x^2=16$ او $x-1=4$	$x^2\neq16$ و $x-1\neq4$ $x\neq\mp4$ $x\neq 4+1$ $x\neq\mp4 \cap x\neq5$	$\{1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,5\}$ لان (-4)لا تنتمي الى مجموعة التعويض $S=\{1,2,3\}$

س4/ اذا علمت ان x ,y عناصر في المجموعة {0,1,2,3, ...9} فأكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة الاتية على شكل ازواج مرتبة.

أ- $x-y=3$

$X=3+y$

عندما y=0 فان x=3+0 =3

عندما y=1 فان x=3+1 =4

عندما y=2 فان x=3+2 =5

∴الأزواج المرتبة هي

{(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),(7,4),(8,5),(9,6)}

ب- $x+y=15$

$X = 15-y$

عندما y=0 فان x=15

عندما y=1 فان x =14

عندما y=6فان x=15-6 =9

∴ الأزواج المرتبة هي

{(9,6),(8,7),(7,8),(6,9)}

استاذ رابع علمي
@stad4al

العبارات المسورة Quantified Propositions

العبارات المسورة كلياً والعبارات المصورة جرئياً

بحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكنا الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليهاوسنقدم هنا رمزين منطقيين هامين:

اولا / العبارات المصورة كليا : في الجملة المفتوحة التي يسبقها $\forall$ أو مهما كان بحيث يجعل الجملة عبارة صائبة

اذا اردنا أن نذكر ان كل عنصر من مجموعة A يجعل F(X) عبارة صائبة فاننا نقول:

(مهما كان a من A فان F(a) عبارة صائيه).

او (لكل $a \in A$ يكون F(a) عبارة صائبة) ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو التالي :

$a \in A$ فان (Fa) عبارة صائبة

يسمى الرمز $\forall$ سورا كليا (دلالة الشمول) او المسور الكلي وتسمى العبارة $\forall a \in A$ فان (Fa) عبارة صائبة

مثلا / $(x+1)^2=x^2+2x+1$ صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان x .

ويمكن كتابتها كما يلي :- $\forall X \in N$ فأن $(x+1)2 = x2 + 2x + 1$

ملاحظة :- المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض .

مثلاً / $x^2-9=(x-3)(x+3)$, $x^3+27=(x-3)(x^2-3x+9)$

ثانياً / العبارات المسورة جرئيا : اذا اردنا أن نذكر ان بعض عناصر مجموعة A تجعل G(x) عبارة صائبة فاننا نقول:

(يوجد في الاقل عنصر من A يجعل G(x) عبارة صائبة)

وتكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالاتي :

$\exists b \in A$ بحيث G(b)عبارة صائبة (دلالة الوجود)

يسمى الرمز $\exists$ سورا جزئيا وتسمى العبارة $\exists b \in A$ فأن f(b) عبارةمسورة جزئياً .

فاذا اردنا مثلا ان نقول ان للمعادلة X+1=2 حلا في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كتبنا:

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$\exists X \in Z$ بحيث $X+1=2$

ونذكر ما تقدم بقولنا : (يوجد في الاقل عنصر $X \in Z$ بحيث تكون المعادلة $X+1 = 2$ محققة)

ملاحظة / المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض.

مثل: $X^2-9 =(X-3)(X+3)$, $X^3+27=(X-3)(X^2-3X+9$

ملاحظة /

المعادلة والتباينة هي عبارات مفتوحة مسورة جزئيا اي انها صائبة لقيم محددة للمتغير من مجموعة التعويض

مثال : $X - 2 = 0 \rightarrow X = 2$ فالعدد (2) فقط يحقق هذه المعادلة ويجعلها صائبة .

مثال : $X<3 \ , \ X \in N$

$S=\{0,1,2\}$ هذه القيم فقط تحقق المتباينة

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

نفي العبارات المسورة

عندما نريد نفي العبارت المسورة ننتبه الى الاتي :

(ان كل عبارة يجب ان تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين : صائبة أو خاطئة) .

فلو اردنا مثلا نفي العبارة : (مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فان العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه)

فاننا نقول : (يوجد في الاقل وتر واحد مرسوما في هذه الدائرة بحيث ان الحمود الشازل عليه من مركزها لا ينصفه)

واذا اردنا اثبات خطأ القول : (كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6)

فانه يكفي ان نبرهن صواب القول (يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6)

$\sim[P(x)$ فأن $\forall x \in X] \equiv \sim P(x)$ فأن $\exists x \in X$
$\sim[P(x)$ فأن $\exists x \in X] \equiv \sim P(x)$ فأن $\forall x \in X$

مثال / انف كلا مما ياتي :

-1 $\forall x$ فأن $P(x)$ حيث $P(x)$: اذا كان x عدداً طبيعيا فأن $X>0$

الحل / $\sim[P(x)$ فأن $\forall x] \equiv \sim$ فأن $\exists x$

$\sim P(x)$: $\exists x$ عدد طبيعي حيث $X \leq 0$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي اصغر أو يساوي صفراً .

-2 $\exists x$ فأن $P(x)$ حيث ان $P(x)$: x عدد زوجي موجي

الحل / $\sim[P(x)$ فأن $\exists x] \equiv \sim P(x)$ فأن $\forall x$

$\sim P \wedge (x+3<5 : \forall x \in R$

عدداً زوجيا فان x غير موجب وبالكلام : مهما يكن xعدد زوجياً فأن x غير موجب

-3 $P \vee \exists x \in R : x+3 \geq 5$

الحل / $\sim P \wedge (x+3<5 : \forall x \in R$

استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

-4 $\in R: (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

الحل / يكون نفيها $\exists\, x \in R : (x+3)^2 \neq x^2 + 6x + 9$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

-5 $\forall x \in N$ يقبل القيمة على 2 قبل االقسمة على 8 .

الحل / $\exists\, x \in N$ يقبل القسمة على 2 قبل القسمة على 8 .

-6 $\forall x \in N: x > 0$

الحل / $\exists\, x \in N: x \leq 0$

ملاحظة / اذا كانت العبارة المسورة (صائبة) فأن نفيها (خاطئة) وبالعكس .

ملاحظة / اذا كانت العبارة المسورة كلياً (صائبة) فأن تسويرها الجزئي (صائبة)وبالعكس غير صحيح كما في المثالين

مثال / $\forall x \in R: x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ وهي عبارة مسورة كلياً (صائبة)

$\exists\, x \in R: x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ وهي عبارة مسورة جزئياً(صائبة)

مثال / $\exists\, x \in N: x > 5$ هي عبارة مسورة جزئياً(صائبة)

$\forall\, x \in N: x > 5$ *هي عبارة مسورة كلياً (خاطئة)*

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

التحصيل الحاصل Tautology

اذا كان لدينا العبارة المنطقية P وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فان P تسمى تحصيلا حاصلا.

مثال / لتكن P عبارة هل P V ~P تشكل تحصيلا حاصلاً ؟

الحل :-

P	~P	P V ~P
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلا حاصلاً

ملاحظة / اذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction)

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حلول تمارين (1-3)

س1/ انف كل عبارة من العبارات الاتية من دون استعمال ليس صحيحا بدلها

العبارة	نفيها
1) جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين (خاطئة)	بعض المثلثات المتشابهة مختلفة الأضلاع (صائبة)
2) بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة (صائبة)	كل المثلثات المتشابهة متطابقة (خاطئة)
3) اذا كان المثلث قائم الزاوية فانه يكون متساوي الساقين (خاطئة)	يوجد في الاقل مثلث واحد قائم الزاوية وغير متساوي الساقين (صائبة)
4) بعض المعادلات ليس لها حل (صائبة)	كل المعادلات لها حل (خاطئة)
كل شكل رباعي مستطيل (خاطئة)	يوجد في الاقل شكل رباعي واحد ليس مستطيل (صائبة)
6) $Q =: \forall X \in N \quad : x^2 = 25$	$\exists\, x \in N \qquad x^2 \neq 25$
7) $(\forall X \in R : x < 8) \wedge P$	$(\exists\, x \in R : x \geq 8) \;\; V \sim P$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

استاذ رابع علمي
@stad4al

س2/ بين صواب او خطأ كلل من العبارات التالية :

1) $\forall X$ فأن P(x) حيث ان :

P(x) : اذا كان x عددا طبيعيا فان $x^2=x$ — خاطئة

2) $\exists\, x$ فأن P(x) حيث ان :

P(x) : x عدد طبيعي , $x^2=x$ — صائبة

3) $\forall X$ فأن P(x) حيث ان :

P(x) اذا كان x عدداً سالبا فأن x^2 عدد موجب — صائبة

4) P,Q عبارتان منطقيتان $Q \wedge P \rightarrow Q$ تحصيل حاصل — صائبة

5) P عبارة $\sim P \wedge P$ تناقض — صائبة

6) P,Q عبارتان منطقيتان $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ تحصيل حاصل . — صائبة

اسئلة حول الفصل الأول

س 1 / برهن أن :

a) $\sim(\sim b \ \vee \sim c) \equiv \sim(\sim b) \ \wedge \ \sim(\sim c)$

b) $a \ \wedge \ (\sim a \vee b) \equiv a \wedge b$

c) $(b \ \vee \sim c) \rightarrow b \equiv (\sim b \ \wedge \ c) \qquad b$

س2 / جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية حيث $x,y \in N$:

a) $5x + y = 15$

b) $x + 5y = 15$

c) $3x + y = 8$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س 3 / جد مجموع حلول العبارات المفتوحة التالية :

a) $2x - 7 < 0$

حيث مجموعة التعويض 1) Z 2) {0,1,2,3} 3) Q

b) $(x>3) \ \wedge (\in \{x\ 3, 5, 7, 9, 11\}$

c) $(x<3) \ \wedge \ (x \in Z)$

d) $(2x-3>0) \wedge \ (\{x \in \{2, 4, 6\})$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

استاذ رابع علمي
@stad4al

الفصل الثاني
حقل الاعداد الحقيقية
Field of Real

القيمة المطلقة Absolute value

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي X والتي ترمز لها بالرمز | X | كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x \,, \forall x > 0 \\ 0 \,, x = 0 \\ -x \,, \ \forall x < 0 \end{cases}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال/ عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما ياتي :

أ- $3 - \sqrt{10}$ حيث $X \in R$ الحل / لان $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$$\therefore |3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 > 0$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

ب- $|X - 3|$ حيث $X \in R$ الحل /

$$|X - 3| = \begin{cases} x - 3 & , \forall X > 3 \\ 0 & , x = 3 \\ x + 3 & , \forall X < 3 \end{cases}$$

ملاحظة / $|x| = +\sqrt{x^2}$ اي ان القيمة المطلقة لاي عدد حقيقي هو الجذر التربيعي الموجب لمربع ذلك العدد ينتج من التعريف أن القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الاتية:

1) $\forall X \in R$ فان $|x| \geq 0$
2) $\forall X \in R$ فأن $|-| = |x|$
3) $\forall X \in R$ فأن $-|x| \leq x \leq |x|$
4) $\forall X \in R$, $|x|^2 = x^2$
5) $\forall X \in R$ فأن $|X.Y| = |X|.|Y|$ $\quad \left|\frac{X}{Y}\right| = \left|\frac{X}{Y}\right|$ حيث $Y \neq 0$
6) $\forall X, Y \in R$ فأن $|X +| \leq |X| + |Y|$
7) $X \in R$ $\forall a > 0$ اذا كان $|X| \leq a$ فأن $-a \leq x \leq a$

ملاحظة // اعط لكل من x,y قيما عددية وتاكد من صحة الخواص بنفسك

استاذ رابع علمي
@stad4al

مثال / ارسم $Y = |X|$

الحل / حسب التعريف

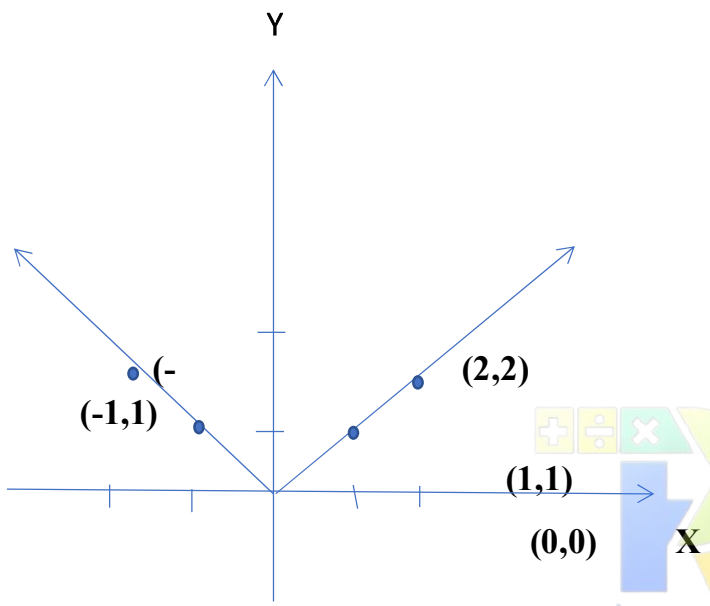
$$Y = \begin{cases} x \,, \forall x > 0 \\ 0 \,, x = 0 \\ -x \,, \ \forall x < 0 \end{cases}$$

أولا / المستقيم $Y=X$, $X>0$

X	Y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)

ثانياً/ المستقيم $Y=-X$, $X<0$ (2,2

X	Y	(x,y)
0	0	(0,0) فجوة
-1	1	(-1,1)
-2	2	(-2,2)



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال / ارسم $Y = |X - 1| + 3$

الحل : حسب التعريف

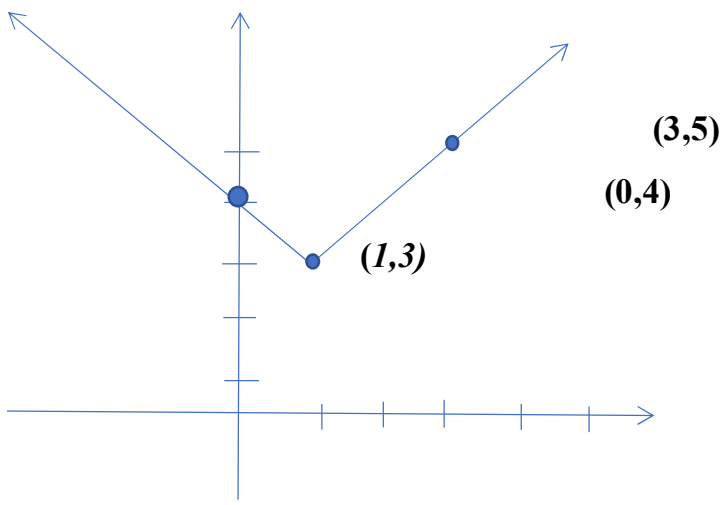
$$y = \begin{cases} (x-1)+3 \,, \forall x \geq 1 \\ (-x+1)+3 \,, \forall x < 1 \end{cases}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

$$\therefore y = \begin{cases} x+2 \,, \forall x \geq 1 \\ (-x+4) \,, \forall x < 1 \end{cases}$$

اولاً / المستقيم $\forall x > 1 , Y = X + 2$

X	Y	(x,y)
1	3	(1,3)
3	5	(3,5)



ثانياً / المستقيم $\forall x < 1, Y = -X + 4$

X	Y	(x,y)
1	3	فجوة (1,3)
0	4	(3,5)

حل المعادلات التي تحتوي على مطلق:-

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال / جد مجموعة الحل للمعادلة: $|3X + 6| = 9$ حيث $X \in R$

الحل: نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ان :

$= |3X + 6|$:

- $(3X+6)$ اذا كان $0 \leq 3x + 6$ اي $-2 \leq X$
- $-(3X+6)$ اذا كان $0 > 3x+6$ اي $-2 > X$

ان هذه المعادلة تكافئ النظام :

$3x+6=9$ مجموعة التعويض هي $\{x: x \geq -2\}$ ..... (1)

$-3x- 6=9$ مجموعة التعويض هي $\{x:x<-2\}$ ..... (2)

يمكننا ان نعد هذا النظام نظام معادلتين بالمتغيرين x,y حيث معامل y فيها بيساوي الصفر أن مجموعة حل هاتين المعادلتين هي: $S_1 = \{1\} , S_2 = \{-5\}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

مجموعة حل النظام هي $S= S_1 \cup S_2 = \{1,-5\}$

مثال / جد مجموعة حل المعادلة : $\forall X \in R, x^2|x| - 8 = 0$

الحل : من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $x^2|X| - 8 = 0$ تكافئ النظام :

$X^3-8 = 0 , \forall X \geq 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow X = 2$

$S_1=\{2\}$

$- X^3-8 = 0 , \forall X < 0 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow X = -2$

$S_2=\{-2\}$

$S=S_1 \cup S_2 \rightarrow S=\{3,-3\}$

مثالها جد مجموعة حل المعادلة: $\forall X \in R , x^2 + |X| - 12 = 0$

الحل:- من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $x^2 + |X| - 12 = 0$ تكافئ النظام

$X^2+X-12 =0 , \forall X \geq 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0$

اما $x= -4$ يهمل $\therefore$ $x=3$ $S_1=\{3\}$

$X^2 -X-12 =0 , \forall X < 0 \rightarrow (x-4)(x+3) = 0$

او $x= 4$ يهمل $\therefore x = -3$ $S_2=\{-3\}$

$S=S_1 \cup S_2 \rightarrow S=\{3,-3\}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

حل معادلتين انيتين بمتغيرين

لقد تعلم الطالب حل نظام مؤلف من معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانيا. وحينذاك وضحنا الاتي اذا كان S_1 حلا للمعادلة الأولى , S_2 حلا للمعادلة الثانية, فان مجموعة حل النظام $S= S_1 \cap S_2$ اذا كانت المعادلتين مربوطتين باداة الربط (و) اما اذا كان الربط (او) فان حل النظام هو : $S=S_1 \cup S_2$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال / اذا كانت R هي مجموعة التعوويض لكل من X,Y فجد مجموعة الحل بطريقتين: تحليليا و بيانيا؟

$X - 2Y = 5$ .... (1

$2X+Y=0$ ..... (2

الحل/

تحليلياً :- بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2::

$X - 2Y = 5$..... (1)

$4X + 2Y=0$ ..... (2) بالجمع

.....

$5X = 5 \longrightarrow X = 1$

نعوض في (1)

$1-2Y=5 \longrightarrow Y=-2$

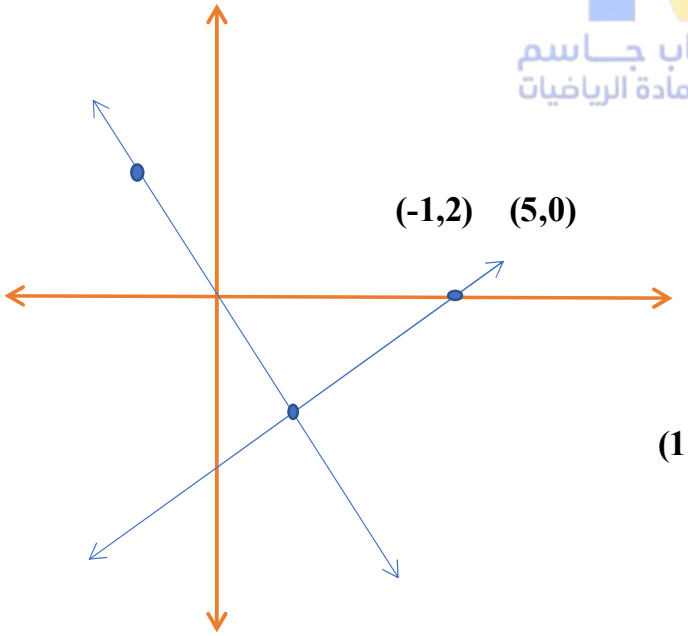
:. مج = {(1,-2)} وهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

بيانياً : المستقيم L_1 : $X - 2Y = 5$

X	Y	(x, y)
0	-5/2	(0,-5/2)
1	-2	(1,-2)
5	0	(5,0)

المستقيم L_2 : $2X+Y=0$

X	Y	(x, y)
0	0	(0,0)
1	-2	(1,-2)
-1	2	(-1,2)



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

مثال / اذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من x, y فجد مجموعة حل النظام

$x - y = 1 \quad , \quad x^2 + Y^2 = 13$

الحل

$X - y = 1$ ……..(1

$x^2 + Y^2 = 13$ ……(2

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

نكون معادلة جديدة هي معادلة رقم (3) من معادلة رقم (1)

$X = 1 + y$…….. (3

تعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (2)

$(1+y)^2 + y^2 = 13$

$1 + 2y + y^2 + y^2 = 13$

$2y^2 + 2y + 1 - 13 = 0$

$2y^2 + 2y - 12 = 0 \,]\div 2$

$y^2 + y - 6 = 0$

$(y + 3)(y - 2 = 0)$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

اما $(y+3)=0 \longrightarrow y = -3$

او $(y-2)=0 \longrightarrow y=2$

استاذ رابع علمي
@stad4al

نعوض قيم y في معادلة رقم (3) لايجاد قيم x

اما $X = 1 + (-3) \longrightarrow X = 1 - (3) \longrightarrow X = -2$

أو $X = 1 + 2 \longrightarrow X = 3$

$S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$

مثال / حل المثال الاتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x , y بطريقة الحذف

$x^2 + y^2 = 17$, $2x^2 - 3y^2 = -46$

$x^2 + y^2 = 17$ ..... (1

$2x^2 - 3y^2 = -46$ ..... (2

بضرب معادلة رقم (1) في العدد (3)

$3x^2+3y^2 = 51$ .....(1

$2x^2 - 3y^2 = -46$ ..... (2

بالجمع

$5x^2 = 5$

$x^2=1 \longrightarrow x=\mp 1$

نعوض قيمة x في معادلة رقم (1) لايجاد قيمة Y

$(1)^2+y^2=17$

$y^2 = 17-1 \longrightarrow y^2=16 \longrightarrow y=\mp 4$

{(S = {(1, -4), (1,4), (-1, -4), (-1,4)}

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الخلاصة

(1) اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانية) فتحل بطريقتين * طريقة الحذف * طريقة التعويض

(2) اذا كانت احدهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة التعويض

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الفترات Intervals

ليكن $a,b \in R,\ a< b$

(1) تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية: $\{x: x \in r\ , a \le x \le b\}$ الفترة المغلقة Closed Intervals من a الى b ونرمز لها بالرمز [a,b] وتمثل على خط الأعداد كما في الشكل (1 - 2) حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (a) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (b) لقد أهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الأصل (و) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية الى الفترة [a, b] ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة a b .

a الشكل (1 - 2) b

(2) تسمى المجموعة $\{x: x \in r\ , a < x < b\}$ الفترة المفتوحة Open Intervals من (a) الى (b) وتمثل على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل (2,2)

a الشكل (2,2) b

يلاحظ في هذه الحالة ان $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$ والدائرتين حول العددين a , b في الشكل تدلان على ذلك.

(3) نسمي كلا من :

استاذ رابع علمي
@stad4al

$[a, b] =\{ X:X\in R\ , a<X \le b)$

$(a, b) = \{X:X\in R\ , a \le X<b\}$

الفترة نصف المغلقة (أو نصف المفتوحة Half Open) حيث a<b وتمثل المجموعة الأول كما في الشكل (2-3)

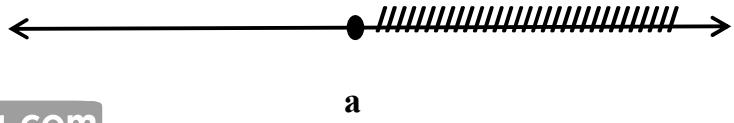
a b

وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (2-4)

a b

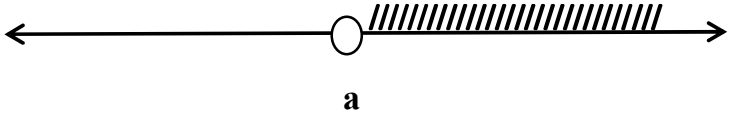
(4) مجموعة الأعداد الحقيقية : التي تزيد على العدد الحقيقي (3) اوتساويه هي: $\{X:X\in R,\ X \geq a\}$

وتمثلها كما في الشكل (2-5)

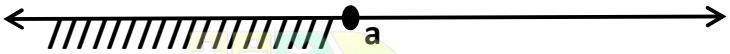


www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

كما أن المجموعة $\{X:X\in R,\ X > a\}$ يمثلها الشكل (2-6)



(5) مجموعة الأعداد الحقيقية : التي تساوي العدد الحقيقي (a) أو الأصغر منه هي $\{X:X\in R\ ,\ X \leq a\}$ فيمثلها الشكل (2-7)



اما المجموعة $\{X:X\in R\ ,\ X < a\}$ فيمثلها الشكل (2-8)

ملاحظة / المجموعة في (4) و (5) تدعى مجموعة عدية غير محددة (شعاع)

مثال / لتكن $X=[1,6]$,$Y=[3,8]$ مثل على خط الأعداد :

1- $x \cap y$ الحل $x \cap y = [3,6]$

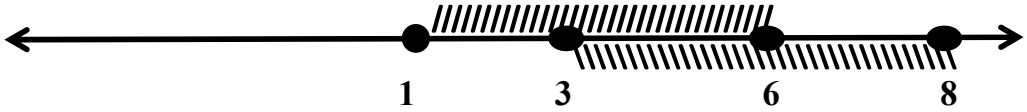
2- $x \cup y$ الحل $x \cup y = [1,8]$

3- $x - y$ الحل $x - y = [1,3)$

4- $y - x$ الحل $y - x = (6,8]$

استاذ رابع علمي
@stad4al

ثم اكتب الناتج على شكل فترة



مثال/ مثل الأتي :

1) $\{x: x \geq -3\} \cup (-5, 2]$ على خط الاعداد

2) $\{x: x \geq -3\} \cap (-5, 2]$ على خط الاعداد

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الحل/

1) $\{x: x \geq -3\} \cup (-5, 2] = \{x: x > -5\}$

2) $\{x: x \geq -3\} \cap (-5, 2] = [-3, 2]$

حل المتباينة (المترا جحة) من الدرجة الأولى في متغير واحد

ان المتباينة التي تحوي متغير (X) والتي تكتب بالشكل: $g(x) < f(x)$ حيث $f(x), g(x)$ جملتان مفتوحتان تسمى Inequality في متغير واحد (X)

وكما تعلم من دراستك السابقة اذا كانت مجموعة القيم التي اعطيت ل (x) في هذه المتباينة وجعلها عبارة صائبة , نقول اوجدنا مجموعة حل هذه المتباينة. وتعرف المتباينات المتكافئة كما عرفت المعالات المتكافئة.

ريهاب جاسم
مدرسة ملوقة الابتدائية

تعريف :- نقول عن المتباينة $f(x) < g(x)$ متباينة مكافئة للمتباينة $h(x) < l(x)$ اذا كان لهما مجموعة الحل نفسها .

سنهتم في هذا البند بحل المتباينات التي يكون فيها كل من $f(x), g(x)$ كثيرة الحدود .

مثال / جد مجموعة الحل للمتباينة : $3x + 1 < x + 5$ اذا كانت مجموعة التعويض هيR وضع مجموعة الحال على خط الأعداد .

الحل/

استاذ رابع علمي
@stad4al

$3x + 1 < x + 5$

$3x+1+(-x)<x+5(-x)$

$2x +1<+5$ خواص المتباينة

$2x+1+(-1)<5+(-1)$

$2x<4$ خواص المتباينة

$2x\left(\frac{1}{2}\right) < 4\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow x < 2$ خواص الحقل

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{x: x \in R , x < 2\}$

❖ اذا ربطنا متباينتين بالرابط (و) فان قيمة x التي تحقق هذا النظام المؤلف من متباينتين من الدرجة الأولى في متغير واحد يجب ان تنتمي الى S_1 مجموعة حل المتباينة الأولى والى S_2 مجموعة حل المتباينة الثانية، اي الى $S_1 \cap S_2$ وهذا يعني: أن مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرابط (و) هي $S_1 \cap S_2$ ويمكننا أن نستنتج بشكل مشابه ان مجموعة حل النظام المكون من متباينتين والرابط (و) هي $S_1 \cap S_2$.

مثال/ اذا كانت مجموعة التعويض هي (R) جد مجموعة الحل للنظام: 5X+11<1 و 2X+3<6 مثل اجابتك على خط الأعداد

الحل / مجموعة الحل للمتباينة الأولى هي $S_1=\{x : x<-2\}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مجموعة الحل للمتباينة الثانية هي $S_2=\{x: x<\frac{3}{2}\}$

مجموعة الحل لنظام المتباينتين هي: S

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x < -2\} \cap \left\{x : x < \frac{3}{2}\right\}$$

$$S = \{x : x < -2 \text{ و } \frac{3}{2} < x\}$$

العناصر المشتركة بين S_1, S_2 هي S_1 نفسها $S = S_1 \cap S_2 = x : x < -2 , x \in R$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مثال/ عوض الرابط (و) بالرابط (أو) في المثال السابق ثم جد مجموعة الحل

الحل / مجموعة الحل للنظام : 5X+11<1 أو 2X+3<6

$$S_2 \cup S_1 = \left\{x : x < \frac{3}{2} \text{ أو } x < -2\right\}$$

$$S = \{x: x \in R , X < \frac{3}{2}\}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

نلاحظ ان العناصر الموجودة في S_1 او S_2 او في كليهما هي S_2,

مثال/ أذا كان (R) هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحال للمتباينة $|X-2| > 5$.

الحل/

$$|x-2| \begin{cases} X-2,\ X=2 & \forall x \geq 2 \\ \text{أو} & \\ 2-X & \forall x < 2 \end{cases}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$\therefore |x-2| > 5 \leftrightarrow X-2 > 5$ او $2-X > 5$

وبحل هذا النظام نجد أن مجموعة الحل المطلوبة هي :

$$S_1 \cup S_2 = \{x: x \in R, x > 7\} \cup \{x: x \in R, x < -3\}$$

مثال/ حل المتباينة $|x+1| \leq 2$ حيث $X \in R$

الحل : لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة حسب خاصية (7)

فيكون $|X+1| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2$

باضافة (-1) الى حدود المتباينة ينتج

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$-2+(-1) \leq x+1+(-1) \leq 2 = +(-1)$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$S = [3, 1]$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

مبرهنة:- اذا كان (a) عددا حقيقيا موجبا فان :

(1) مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq a^2$ هي الفترة $[-a,a]$

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2 < a^2$ هي الفترة $(-a,a)$

البرهان 2

$x^2<a^2 \Leftarrow x^2-a^2<0 \Leftarrow (x-a)(x+a)<0$

ومن خواص الحقل المرتب نستنتج القاعدة : اذا كان $a.b >$ صفر فأن

أما $(a>0$ و $b<0)$

أو $(a<0$ و $b>0)$

$[(x+a)<0$ و $(x-a)>0]$ او $[(x+a)>0$ و $(x-a)<0]$

$[x<-a$ و $x>a]$ او $[x>-a$ و $x<a]$

$(-a,a)\cup\emptyset=(-a,a)$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

وبطريقة مماثلة يمكن برهنة (1) والتي نتركها للطالب

مثال / اذا كان $x^2<9$ فان مجموعة الحل للمتباينت هي : $(-3,3)$

واذا كان $x^2\le 9$ فان مجموعة الحل للمتباينة هي : $[-3,3]$

اما مجموعة حل المتباينة $X^2>9$ فهي مجموعة حلول $R/X^2\le 9$ اي $R/[-3,3]$

ومجموعة حلول المتباينة $x^2\ge 9$ هي مجموعة حلول المتباينة $R/x^2<9$ اي $R/(-3,3)$

مثال / جد مجموعة حلول المتباينة : $7>|2x+5|\ge 5$

$$|2x+5|=\begin{cases}2x+5, \forall x>-\frac{5}{2}\\ -(2x+5), \forall x<-\frac{5}{2}\end{cases}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

ان المتباينة $7>|2x+5|\ge 5$ تكافئ النظام :

$[7>2x+5\ge 5]$ أو $[7>-(2x+5)\ge 5]$

$[2>2x\ge 0]$ أو $[12>-2x\ge 10]$

$[1>x\ge 0]$ أو $[-6<x\le -5]$

مجموعة الحل $=(-6,-5]\cup[0,1)$

مثال / جد مجموعة حل المتباينات التالية :

-1 $X^2<3$ الحل / $S=(\sqrt{-3},\sqrt{3})$

-2 $x^2 \geq 16$ الحل / مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq 16$ هي $R/\ X^2<16$

حيث ان : $X^2<16$ هي نفي $x^2 \geq 16$ اي ان $S=R/(-4,4)$

-3 $X^2>5$ الحل / نفي الجملة $X^2>5$ هي $x^2 \leq 5$

مجموعة حل الجملة المنفية $^2 \leq 5$ هي $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

اذا مجموعة حل الجملة الاصلية $X^2>5$ هي $S=$

$R/(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

الخلاصة /

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

لحل المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد :

- نعرف المطلق ان وجد .
- نستخدم خواص حقل الاعداد الحقيقية :

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(اضافة النظير الجمعي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الجمع (0) ← الضرب في النظير الضربي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الضرب (1)).

- اعد هذه السلسلة من الخطوات نحصل على حل المتباينة ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية R .

استاذ رابع علمي
@stad4al

حلول تمارين (2-4)

س 1/ اذا كان A =[-2,5) و B $\{x: x \geq 1\}$ جد A-B , B-A , A ∩ B , A∪ B

الحل :-

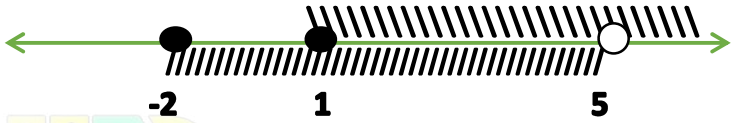
$A \cup B = [-2,5) \cup \{X: X \geq 1\} = \{X: X \geq -2\}$

$A \cap B = [-2,5) \cap \{X: X \geq 1\} = [1,5)$

A - B = [-2 , 5) - $\{X: X \geq 1\}$ = [-2 , 1)

B - A = $\{X: X \geq 1\}$ –[-2,5) = $\{X: X \geq 5\}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي



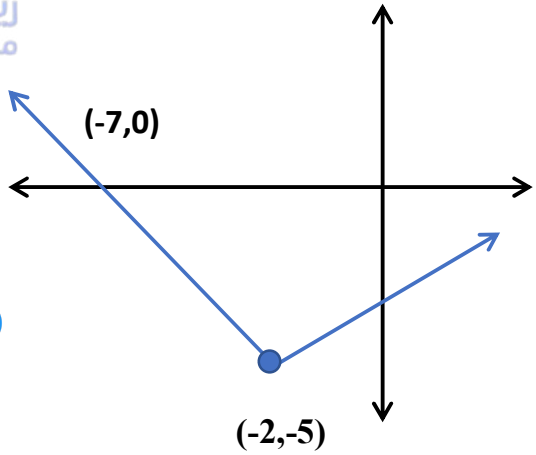
س2 / أ / ارسم الدالة $Y = |X+2| - 5$

الحل :-

$$Y = \begin{cases} (x+2) - 5 \,, \forall x \geq -2 \\ -(x-2) - 5 \,, \forall x < -2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X - 3 \,, \forall X \geq -2 \\ -X - 7 \,, \forall X < -2 \end{cases}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



استاذ رابع علمي
@stad4al

المستقيم Y=-X-7		
X	Y	(X,Y)
-2	-5	(-2,-5)
-7	0	(-7,0)

المستقيم Y=X-3		
X	Y	(X,Y)
-2	-5	(-2,-5)
-1	-4	(-1,-4)

ب / ارسم الدالة $Y = 3 - |X + 1|$

$$= |X+1| \begin{cases} X+1 \,, \forall X \geq -1 \\ -(X+1), \forall X < -1 \end{cases}$$

y =3-x -1

y= 2 – x قاعدة الاقتران

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

عندما x= -1 فأن y=2- (-1)

y=2+1 = 3

عندما x=1 فأن y=2- (1)

y= 1

X	Y	(x,y)
-1	3	(-1,3)
1	1	(1,1)

عندما x<-1 y=3-(-x-1)

y=3+x+1

y = 4+x قاعدة الاقتران

استاذ رابع علمي
@stad4al

عندما x=-1 فأن y= 4-1

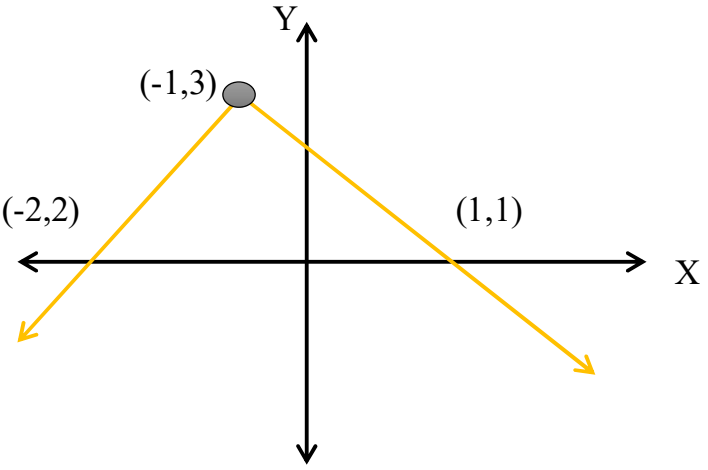
y=3

عندما x=-2 فأن y=4-2

y=2

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

X	Y	(x,y)
-1	3	فجوة (-1,3)
-2	2	(-2,2)



س3 / جد مجموعة حل كل من المعادلات الاتية :

أ- $|4X+3| = 1$

$$|4X+3| = \begin{cases} 4x+3 \,, \forall x \geq -\frac{3}{4} \\ -(4x+3), \forall x < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Either

$4x+3=1$

$4x=1-3$

$4x=-2$

$4x=-4$

Or

$-(4x+3)=1$

$-4x-3=1$

$4x=-3-1$

$X^2=-4$

$x = -\frac{4}{4} = -1$ و $x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$S = \{-\frac{1}{2}, -1\}$

ب- $x\,|x| + 4 = 0$

$$|x| = \begin{cases} x \,, \forall x \geq 0 \\ -x \,, \forall x < 0 \end{cases}$$

Either

$x \geq 0$

$X \times X + 4 = 0$

$X^2 + 4 = 0$

$X \notin R$

Or

$X<0$

$X \times (-X) + 4 = 0$

$-X^2 + 4 = 0$

$X^2 = 4 \rightarrow X = \pm 2$

$\because X < 0$

$X=2$ لا تحقق المعادلة

$\therefore S = \{-2\}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

جـ- $x^2 - 2|X| - 15 = 0$

$|X| = \begin{cases} X , \forall X \geq 0 \\ -X , \forall X < 0 \end{cases}$

either | Or

$X \geq 0$ | $X<0$

$x^2 - 2X - 15 = 0$ | $x^2 - 2(-X) - 15 = 0$

$(x-5)(x=3)=0$ | $x^2 + 2x - 15 = 0$

$x=5$ | $(X+5)(X-3) = 0$

تهمل لا تحقق المعادلة $X = -3$ | $X = -5$

تهمل لا تحقق المعادلة $X = 3$

$S=\{5\}$ | $S=\{-5\}$

د- $|x^2 + 4| = 29$

$\forall x \in R$ دائما لان $x^2 + 4 > 0$

$x^2 + 4 = 29$

$x^2 = 29 - 4$

$x^2 = 25$

$X =$

هـ- $X\,|X + 2| = 3$

عندما $X \geq -2$

$x(x+2)=3$

$x^2 +2x=3$

$x^2 +2x-3 =0$

لا يمكن حل هذه المعادلة بالتجربة , اذا نحاول بالدستور
يجب ان يكون المميز $\leq$ الصفر حيث يكون للمعادلة

حل في R

المميز = b^2-4ac

المميز $=(2)^2 -4(1)(3)$

المميز = $4-12 = -8$ < الصفر

ليس للمعادلة حل في R

حيث

$(x+3)(x-1)=0$

اما $(x+3)=0 \longrightarrow x=-3$ تهمل

لان الفرضية ان $x \geq -2$ بينما هنا $x < -2$

أو $(X-1)=0 \longrightarrow x=1$

$\therefore S = \{1\}$

عندما $X<-2$

$X(-X -2)=3$

$-X^2 -2X =3$

X^2+2X+3

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
استاذ رابع علمي
@stad4al

و/ $|2X+1| = X$

عندما $X \geq \frac{-1}{2}$

$2X+1=X$

$2X-X=-1$

$X= -1$ لا تحقق الفرضية اعلاه

$S=\{\ \}$

عندما $X < \frac{-1}{2}$

$-2X-1=X$

$-2X-X=1$

$-3X=1$

$X=\frac{-1}{3} \in X < \frac{-1}{2}$

$S=\{\ \}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي فقط $S=\{1\}$

$\therefore S=\emptyset$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

س4 / جد مجموعة حلول كل معادلتين تحليلاً انياً وبيانياً :

أ-

2x+y =4 .....(1

X – y = -1. ..... (2

بالجمع

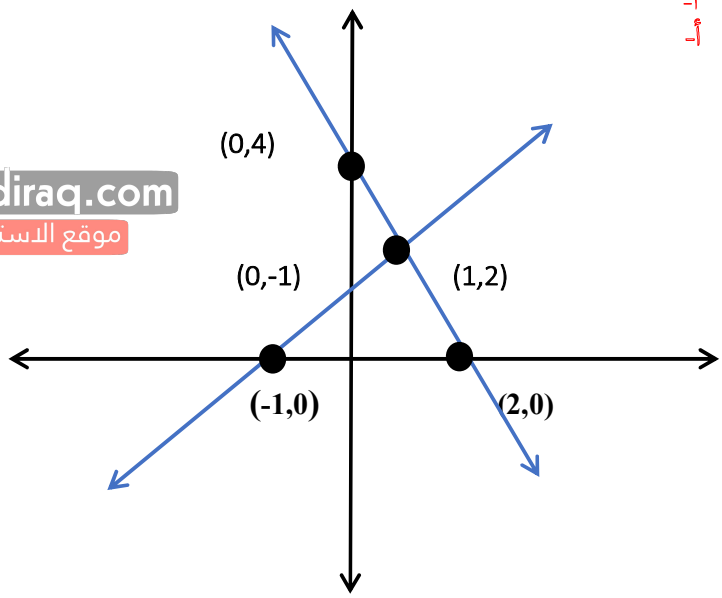
3x=3 ⟶ x = 1

نعوض في المعادلة رقم (1)

(2×1) + y=4

y=4-2 ⟶ y=2

S= {(1,2)} |



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

المستقيم 2x+y =4		
X	Y	(x,y)
0	4	(0,4)
2	0	(2,0)

المستقيم x-y = -1		
X	Y	(x,y)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

ب-

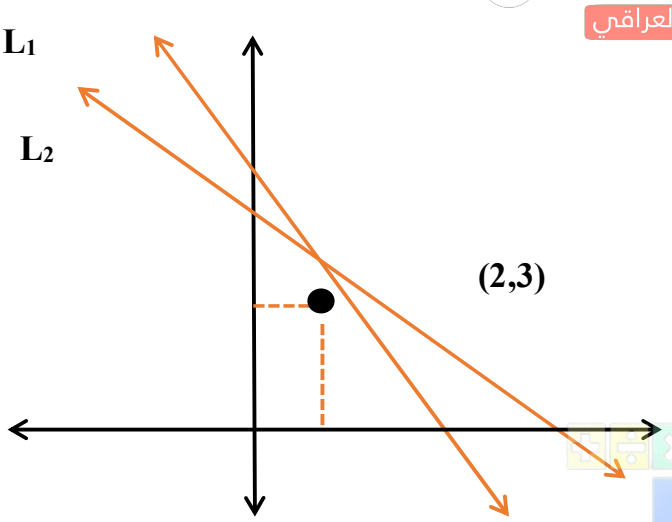
$4x + \cancel{3y} = 17$

$\pm 2x \pm \cancel{3y} = \pm 13$

بالطرح

$2x = 4 \longrightarrow x = 2$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي



المستقيم 2x+3y =13		
X	Y	(x,y)
0	$\frac{13}{3}$	$(0,\frac{13}{3})$
$\frac{13}{2}$	0	$(\frac{13}{2},0)$

المستقيم 2x+3y =13		
X	Y	(x,y)
0	$\frac{13}{3}$	$(0,\frac{13}{3})$
$\frac{13}{2}$	0	$(\frac{13}{2},0)$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

جـ-

$5X^2 + 2Y^2 = 53$ .....(1

$X - Y = 1$ .....(2

نكون معادلة جديدة رقم (3) من معادلة رقم (2)

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (1)

X=1+Y .....(3

$5(1+y)^2 + 2y^2 = 53$

$5(1+2y+y^2) + 2y^2 = 53$

$5+10y+5y^2 + 2y^2 = 53$

$7y^2 + 10y - 48 = 0$

$(7y+24)(y-2) = 0$

أما $(7y+24) = 0 \rightarrow 7y = -24 \rightarrow y = \frac{-24}{7}$

او $y-2=0 \rightarrow y=2$

استاذ رابع علمي
@stad4al

نعوض قيمة y في معادلة رقم (3) لايجاد قيم x

اما $x = 1 + \frac{-24}{7} \rightarrow x = x = 1 - \frac{24}{7} \rightarrow x = 7 - \frac{24}{7} \rightarrow x = -\frac{17}{7}$

أو X=1+2 → x=3

$\therefore S = \left\{\left(\frac{-17}{7}, \frac{-24}{7}\right), (3, 2)\right\}$

د-

$3x^2 + 2y^2 = 107$ ……..(1

$2x^2 - y^2 = 34$ …….. (2

بضرب معادلة رقم (2) في (2)

$3x^2 + \cancel{2y^2} = 107$ ……..(1

$4x^2 - \cancel{2y^2} = 68$ …….. (2

بالجمع

$7x^2 = 175$ ÷7

$X^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

نعوض قيمة x في معادلة رقم (2) لايجاد قيمة y

$2(5)^2 - y^2 = 34$

$2(25) - y^2 = 34$

$50 - y^2 = 34$

$y^2 = 50 - 34$

$y^2 = 16$

$y = \pm 4$

$\therefore S = \{(5, -4), (5, 4), (-5, -4), (-5, 4)\}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

س 5 / جد مجموعة حلول كل من المتباينات التالية :-

أ- $|x-6| \le 1$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$|x-6| = \begin{cases} x-6 \,, \forall\, x \ge 6 \\ 6-x \,, \forall\, x < 6 \end{cases}$$

عندما x<6

$6 - X \le 1$

$-X \le 1 - 6$

$[-X \le -5] \times (-1)$

$x \ge 5$

$S_2 = [5,6)$

عندما $x \ge 6$

$x - 6 \le 1$

$x \le 1 + 6$

$x \le 7$

$S_1 = [6,7]$

$S = [6,7] \cup [5,6) \rightarrow S = [5,7]$

ب- $2 \le |x+1| \le 4$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \,, \forall\, x \ge -1 \\ -(x+1), \forall\, x < -1 \end{cases}$$

عندما $x < -1$

$[2 \le -(x+1) \le 4$

$[2 \le -x - 1 \le 4]$

$[\,2 + 1 \le -x - 1 + 1 \le 4 + 1\,]$

$[3 \le -x \le 5]$

$[-3 \ge x \ge -5\,]$

$[-5, -3]$

عندما $x \ge -1$

$[2 \le x + 1 \le 4\,]$

أو

$[2 - 1 \le x + 1 - 1 \le 4 - 1]$

أو

$[1 \le x \le 3\,]$

أو

$[1 \le x \le 3\,]$

أو

$[1 \le x \le 3\,]$

∪

$[1, 3\,]$

∪

$= [-5, 3] \,/\, (-3, 1)$

جـ- $-9 \le |2x-3| - 12 \le -3$

الحل/ بإضافة النظير الضربي لـ(-1)

$-9 + 12 \le |2x-3| \cancel{-12} \cancel{+12} \le -3 + 12$

$3 \le |2x-3| \le 9$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3\,, & \forall\, x \ge \frac{3}{2} \\ -2x+3\,, & \forall\, x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

عندما $x < \frac{3}{2}$

$[3 < -2x + 3 \le 9]$

$[3 - 3 < -2x \cancel{+3} \cancel{-3} \le 9 - 3]$

$[0 < -2x \le 6]$

$\left[\frac{-1}{2} \times 0 > \frac{-1}{2} \times -2x \ge \frac{-1}{2} \times 6\right]$

$[0 > x \ge -3]$

عندما $x \ge \frac{3}{2}$

أو $[3 < 2x - 3 \le 9]$

أو $[3 + 3 < 2x \cancel{-3} \cancel{+3} \le 9 + 3]$

أو $[6 < 2x \le 12]$

أو $\left[\frac{1}{2} \times 6 < \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x \le \frac{1}{2} \times 12\right]$

$\cup$ $[3 < x \le 6]$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مجموعة الحل = $(3,6] \cup [-3,0)$

د/ $2x^2 \le 8$

الحل/

استاذ رابع علمي
@stad4al

$x^2 \le \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 \le 4$

$S_{مج} = [-2,2]$

هـ/ $3x^2 - 27 > 0$

الحل/

$3x^2 > 27 \xrightarrow{\text{نقسم على 3}} x^2 > \frac{27}{3}$

$x^2 > 9 \xrightarrow{\text{نفيها}} x^2 \leq 9$

$x > \pm 3 \xrightarrow{\text{نفيها}} x \leq \pm 3$

$\therefore S_{\text{مج للنفي}} = [-3,3]$

$\therefore S_{\text{للمتباينة}} = R/[-3,3]$

استاذ رابع علمي
@stad4al

أمثلة إضافية

(1) $\cancel{3x} + y = 15$

$\mp \cancel{3x} \mp 7y = \mp 15$

بالطرح

$-6y = 0$

$y = \frac{0}{-6} = 0 \Rightarrow y = 0$

نعوض في المعادلة (1)

$3x + 0 = 15$

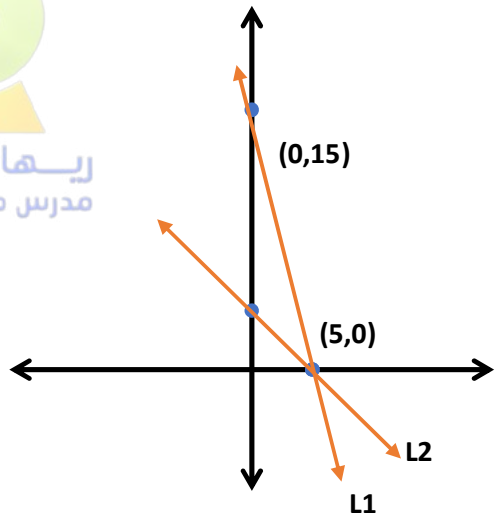
$3x = 15$

$x = \frac{15}{3} = 5$

$x = 5$

$\therefore S = \{(5,0)\}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



المستقيم $3x + y = 15$		
x	y	(x,y)
0	15	(0,15)
5	0	(5,0)

المستقيم $3x + 7y = 15$		
x	y	(x,y)
0	$\frac{15}{7}$	$(0, \frac{15}{7})$
5	0	(5,0)

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

استاذ رابع علمي
@stad4al

(2) $(2x + 3y = 0) \times 2$

$5x + 6y = 11$

$4x + \cancel{6y} = 0$

$\mp 5x \mp \cancel{6y} = \mp 11$

بالطرح

$-x = -11$

$x = 11$

نعوض في المعادلة (1)

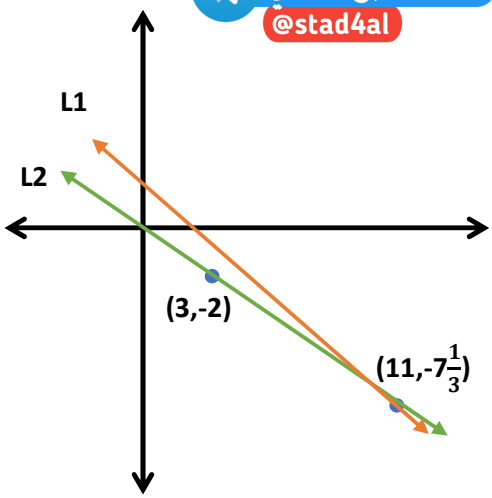
$(4 \times 11) = 6y = 0$

$44 + 6y = 0$

$6y = -44$

$y = \frac{-44}{6} = -7\frac{1}{3}$

$y = -7\frac{1}{3}$



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

المستقيم $2x + 3y = 0$		
x	y	(x,y)
0	$\frac{11}{5}$	$(0, \frac{11}{5})$
$\frac{11}{5}$	0	$(\frac{11}{5},0)$

المستقيم $5x + 6y = 11$		
x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
3	-2	(3,-2)

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حلول أسئلة الفصل الثاني

س1/ جد مجموعة حل المعادلة التالية في R

1) $|x^2+1|=5$
2) $|x+2|+x=0$
3) $x^2-x+\frac{72}{x^2-x}=18, x^2\neq 0$

س2/ جد مجموعة حل المتباينات التالية

1) $3\leq|2x-1|<7$
2) $-5\leq 2-|2x-5|\leq -3$
3) $x^2-2x+1>0$
4) $x^2+4>0$
5) $x^2+9<0$
6) $x^2-x-2<0$

استاذ رابع علمي
@stad4al

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س3/ أرسم منحني الدوال التالية

1) $f: R\longrightarrow R, f(x)=x|x|-1$
2) $f: R\longrightarrow R, f(x)=5-|x-2|$
3) $f: R\longrightarrow R, f(x)=3-x^2$
4) $f: R\longrightarrow R, f(x)=2x-|x-1|$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الفصل الثالث

الأسس والجذور

الأسس للأعداد الصحيحة

التعريف/ إذا كان $a \in R, n \in Z$ فإن $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (a مضروبة بنفسها n من المرات).

خصائص الأسس

1) عند الضرب تجمع الأسس للأساسات المتساوية:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$$
$$a^2 \times b^4 \times a \times b^6 = a^3 \times b^{4+6} = a^3 \times b^{10}$$

2) عند القسمة تطرح الأسس للأساسات المتساوية:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n - a^m$$
$$\frac{x^{17}}{x^3} = x^{17} - x^3 = x^{14}$$
$$\frac{y^6}{y^{13}} = \frac{1}{y^{13-6}} = \frac{1}{y^7} = y^{-7}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

3) عند الرفع تضرب الأسس (حيث نقوم بضرب الأس الأول في أس القوس):

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
$$(7^5)^3 = 7^{5\times3} = 7^{15}$$

4) عند جذر مقدار معين: نقسم أس المقدار على دليل الجذر (أي أن دليل الجذر يصبح مقام للأس):

دليل الجذر $\rightarrow \sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$

دليل الجذر $\rightarrow \sqrt[3]{r^5} = r^{\frac{5}{3}}$

5) أي قيمة عددية أو أي مقدار بأس صفر فإنه يساوي واحد دائماً:

$$(10)^0 = 1 \quad , \quad x^0 = 1 \quad , \quad (x-y)^0 = 1$$

6) عند نقل مقادير من البسط إلى المقام وبالعكس فإنّ إشارة الأس تتغير:

$$\frac{2^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^3}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

7) عندما نقوم بتبسيط جذر يحتوي على كسر نوزع الجذر للبسط والمقام بحيث يكون دليل الجذر أكبر من واحد، ودليل الجذر ينتمي إلى N^+

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{x^3}{8}}=\frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{x}{2}$$

8) عند وجود كميتين مضروبتين مع بعضهما داخل جذر دليله ينتمي إلى N وأكبر من (1) نستطيع أن نجزئ الجذر إلى جذرين مضروبين مع بعضهما وداخل كل جذر كمية من الكميتين السابقتين وتحميل كل جذر الدليل نفسه للجذر الأصلي:

$$\sqrt[n]{a\times b}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$$

9) عند اختصار أو تبسيط أي مقادير كسرية يجب أن نجعل الأساسات عبارة عن أعداد أولية (2,3,5,7,11,.....)، وذلك إما أن نرفع العدد لأس معين (عدد أولي مرفوع لأس)، أو نقوم بتجزئة العدد غير الأولي إلى عددين أوليين مضروبين مع بعضهما البعض أو أكثر من عددين أوليين وكل عدد أولي منها مرفوع للأس الأصلي نفسه الذي كان العدد مرفوع له قبل التجزئة:

بعد التجزئة — بعد التجزئة

$$\frac{9^{n-1}\times 8^{n}}{2^{n+1}\times 6^{n+1}}=\frac{3^{2n-2}\times 2^{3n}}{2^{n+1}\times 2^{n+1}\times 3^{n+1}}=\frac{3^{2n}\times 3^{-2}\times 2^{3n}}{2^{n}\times 2^{1}\times 3^{n}\times 3^{1}\times 2^{n}\times 2^{1}}$$

كان قبل التجزئة 6^{n+1} — أصبح بعد التجزئة

$$=3^{2n-n-2-1}\times 2^{3n-n-n-1-1}=3^{3n-3}\times 2^{n-2}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

10) عند تبسيط مقدار كسري يحتوي على عدة حدود في البسط وعدة حدود في المقام

نقوم أولاً: بتحويل القيم والحدود إلى أعداد أولية مرفوعة لأس من غير تجزئة أو مرفوعة لأس بالتجزئة كما في الفقرة السابقة وبعدها نقوم بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل من البسط والمقام وبعدها يتم الاختصار إن وجد وبأبسط صورة ممكنة.

$$\frac{5^{n}+5^{n-1}}{5^{n+1}-5^{n-1}}=\frac{5^{n}+5^{n}\times 5^{-1}}{5^{n}\times 5^{1}-5^{n}\times 5^{-1}}=\frac{\cancel{5^{n}}(1+5^{-1})}{\cancel{5^{n}}(5-5^{-1})}=\frac{\frac{5+1}{5}}{\frac{25-1}{5}}$$

$$\frac{6}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

تذكير

بعض القوانين الرياضية المهم والضرورة التي يحتاجها الطالب في حل بعض المسائل

1- حاصل ضرب الحدود الجبرية المتشابهة في الإشارة دائما (موجب +)

$$-2\times -6=+12$$
$$3x\times 5=+15x$$
$$\sqrt{7}\times\sqrt{7}=+7$$

2- حاصل ضرب الحدود الجبرية المختلفة في الإشارة دائماً (سالب –)

$$-8\times 5=-40$$
$$6y\times -25=-150y$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

ملاحظات مهمة

1) يمكن ضرب الحدود الجبرية المختلفة في القسم الرمزي بعضها مع البعض.

القسم الرمزي

$$-4\boxed{x} + 7\boxed{y} = -28xy$$

2) عند الضرب تجمع الأسس للأساسات المتساوية.

$$5x \times 3x^2 = 15x^{1+2} = 15x^3$$
$$6y^2 \times 4xy^3 = 24xy^{2+3} = 24xy^5$$

3) الأساس السالب المرفوع إلى أس فردي ناتجه دائما سالب (–)

أس فردي

$(-1)^5 = -1$

الناتج أساس سالب

*

أس فردي

$(-2)^3 = -8$

الناتج أساس سالب

4) الأساس السالب المرفوع إلى أس زوجي ناتجه دائماً موجب (+)

$(-5)^4 = +625$ * $(-3)^2 = +9$

5) الأساس الموجب المرفوع إلى أس فردي كان أم زوجي فإن ناتجه دائما موجب (+)

$(8)^2 = 64$ * $(7)^2 = 49$

توزيع عملية الضرب على الجمع

$$2 - (3 - x) = 2 - 3 + x = -1 + x$$

في المثال أعلاه: الإشارة التي تسبق القوس وهي إشارة (–) تتوزع داخل القوس حيث تضرب في كل إشارة موجودة داخل القوس، ثم يتم جمع الحدود كما سبق وتعلمنا.

$$\boxed{-2}\,(3 - x) = -6 + 2x$$

في المثال أعلاه: نقوم بتوزيع الحد كله مع الإشارة (أي نضرب الحد (-2) في جميع الحدود الموجودة داخل القوس)، ثم نقوم بالجمع للحدود إن وجد ذلك كما سبق وتعلمنا.

استاذ رابع علمي
@stad4al

ملاحظة مهمة

حاصل جمع الحدود المتشابهة في المقدار والمختلفة في الإشارة يساوي دائما (صفر)

$$-3\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 0$$

$$6y - 6y = 0$$

مثال1/ جد قيمة $\frac{8^{-3}\times 18^{2}}{81\times 16^{-2}}$

الحل/

$$\frac{8^{-3}\times 18^{2}}{81\times 16^{-2}}=\frac{(2^{3})^{-3}\times(3^{2}\times 2)^{2}}{3^{4}\times(2^{4})^{-2}}=\frac{2^{-9}\times 3^{4}\times 2^{2}}{3^{4}\times 2^{-8}}$$

$$3^{4-4}\times 2^{-9+2+8}=3^{0}\times 2^{1}=1\times 2=2$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال2/ إذا كان $m, n \in Z$ فأثبت أن $\frac{125\times 15^{m-2}\times 25^{m+n}}{75^{m}\times 5^{2n+m}}=\frac{5}{9}$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{125\times 15^{m-2}\times 25^{m+n}}{75^{m}\times 5^{2n+m}}=\frac{5^{3}\times(5\times 3)^{m-2}\times(5^{2})^{m+n}}{(3\times 5^{2})^{m}\times 5^{2n+m}}$$

$$=\frac{5^{3}\times 5^{m-2}\times 3^{m-2}\times 5^{2m+2n}}{3^{m}\times 5^{2m}\times 5^{2n+m}}=5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m}\times 3^{m-2-m}$$

$$=5\times 3^{-2}=5\times\frac{1}{3^{2}}=\frac{5}{9}=\text{الطرف الأيمن}$$

مثال3/ اختصر المقدار التالي بحيث تكون الأسس موجبة $\frac{(X^{2})^{3}\cdot Y^{4}\cdot Z^{5}}{X^{3}\cdot(Y^{3})^{2}\cdot Z^{5}}$

الحل/

$$\frac{(X^{2})^{3}\cdot Y^{4}\cdot Z^{5}}{X^{3}\cdot Y^{4}\cdot Z^{5}}=\frac{X^{6-3}\cdot Z^{5-5}}{Y^{6-4}}=\frac{X^{3}\cdot Z^{0}}{Y^{2}}=\frac{X^{3}\cdot Z^{0}}{Y^{2}}=\frac{X^{3}\cdot 1}{Y^{2}}=\frac{X^{3}}{Y^{2}}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مثال4/ أثبت أن: $\frac{81^{n+1}\times 625^{n}}{9^{2n}\times 27\times 25^{2n-1}}=75$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{(3^{4})^{n+1}\times(5^{4})^{n}}{(3^{2})^{2n}\times(3)^{3}\times(5^{2})^{2n-1}}=\frac{3^{4n+4}\times 5^{4n}}{3^{4n}\times 3^{3}\times 5^{4n-2}}$$

$$=3^{4n-4n+4-3}\times 5^{4n-4n+2}=3^{1}\times 5^{2}=3\times 25=75\ \text{الطرف الايمن}$$

مثال5/ اختصر المقادير التالية بحيث تكون الأسس موجبة:

(a) $$\frac{2\times 7^{-1}+2^{-2}\times 7}{2^{-1}\times 7^{-1}}=\frac{2\times\frac{1}{7}+1\times\frac{1}{2^{2}}\times 7}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\frac{\frac{2}{7}+\frac{7}{4}}{\frac{1}{14}}$$

$$=\frac{\frac{8+49}{28}}{\frac{1}{14}}=\frac{57}{\cancel{28}}\times\frac{\cancel{14}}{1}=\frac{57}{2}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

(b) $$\frac{2^{-2}\times 5^{-2}\times 2^{6}}{2^{-3}\times 5^{-3}\times 2^{5}}=\frac{2^{6-2}\times 5^{-2}}{2^{5-3}\times 5^{-3}}=\frac{2^{4}\times 5^{-2}}{2^{2}\times 5^{-3}}$$

$= 2^{4-2} \times 5^{-2+3} = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$

مثال6/ اثبت أن: $\frac{9^{\frac{1}{2}n+1}+3^{n+1}}{\sqrt{9^n}-3^{n-1}} = 18$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{9^{\frac{1}{2}n+1}+3^{n+1}}{\sqrt{9^n}-3^{n-1}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{2}n+1}+3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n}-3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}n+1\right)}+3^{n+1}}{3^{\frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}}}-3^{n-1}} = \frac{3^{n+2}+3^{n+1}}{3^n-3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^n \times 3^2 + 3^n \times 3^1}{3^n - 3^n \times 3^{-1}} = \frac{\cancel{3^n}(3^2+3)}{\cancel{3^n}(1-3^{-1})} = \frac{9+3}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{12}{\frac{3-1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = \cancel{12} \times \frac{3}{\cancel{2}} = 18 = \text{الطرف الأيمن}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

الجذور

إذا كان $a \in R, n \in N, n > 1$ فإن كل عدد حقيقي X يحقق المعادلة $X^n=a$ يسمى جذراً نونياً للعدد a ويرمز له $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$

نتائج التعريف/

1) $\sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in N, n > 1$

2) إذا كان n عدد طبيعي زوجي وكان a عدد حقيقي موجب فإن كلاً من العددين

$X = -\sqrt[n]{a}, X = \sqrt[n]{a}$ يحقق المعادلة $X^n = a$

3) إذا كان n عدد طبيعي زوجي وكان a عدد حقيقي سالب فإنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة

$X^n = a$ لأن X^n موجب $\forall x \in R$

4) إذا كان n عدد طبيعي فردي وكان a عدد حقيقي فإنه يوجد عدد حقيقي واحد يحقق المعادلة

$X^n = a$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مبرهنة

إذا كان $a,b \in R,\ n \in N,\ n > 1$ فإن

1- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \left\{ \begin{matrix} a \geq 0, b \geq 0 \\ \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \end{matrix} \right\}$

2- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث $\begin{cases} b > 0, a \geq 0 & \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \\ b \in \frac{R}{\{0\}}, a \in R & \text{إذا كان } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

الأسس ذات الأعداد النسبية

عند رفع مقام الجذر يصبح دليل الجذر مقام الأس الذي تحت الجذر

$\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$ دليل الجذر

$\sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}}$ دليل الجذر

$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ دليل الجذر وهو (2)

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال7/ أثبت أن: $\left[\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 8$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر} = \left[\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[2^{\underbrace{2n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{4n+n+n}{2} = \frac{6n}{2} = 3n$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1 = \frac{2}{2}-1 = 1-1 = 0$$

$$= [2^{3n}]^{\frac{1}{n}} = 2^{3\cancel{n} \times \frac{1}{\cancel{n}}} = 2^3 = 8 = \text{الطرف الأيمن}$$

حلول تمارين (3-1)

س1/ جد ناتج ما يأتي:

استاذ رابع علمي
@stad4al

a) $8^0 + 9^0 = 1 + 1 = 2$

b) $2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

c) $(16)^{-1} + 16 = \frac{1}{16} + 16 = \frac{1+256}{16} = \frac{257}{16}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt{2^{\frac{6}{3}}} = \sqrt{2^2} = 2$

e) $\frac{2^{-3}\times 4^{-5}}{6^{-1}\times 3^3} = \frac{2^{-3}\times 2^{-5}\times 2^{-5}}{2^{-1}\times 3^{-1}\times 3^3} = \frac{2\times 3}{2^3\times 2^5\times 2^5\times 3^3} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{3}}{2^{\cancel{13}}\times 3^{\cancel{3}}} = \frac{1}{9\times 2^{12}}$

f) $\frac{10^3\times 4^7}{10^{-5}\times 2^5} = \frac{2^3\times 5^3\times 2^7\times 2^7}{2^{-5}\times 5^{-5}\times 2^5} = 2^{3+7+\cancel{5}-\cancel{5}} \times 5^{3+5} = 2^{17} \times 5^8$

g) $\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[5]{3^3}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(3^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(3^{\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}}\right)^{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}} = 3^1 = 3$

h) $3a^0 = 3 \times 1 = 3$

i) $(3a)^0 = 3^0 \times a^0 = 1 \times 1 = 1$

j) $(a+b)^0 = 1$

k) $\left(\sqrt[5]{-32}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\sqrt[5]{-32}\right)^3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س2/ اكتب المقادير التالية بأبسط صورة:

a) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{20a^3}{45a}} = \sqrt{\frac{\cancel{9}}{\cancel{16}} \times \frac{\cancel{20}a^{\cancel{3}}}{\cancel{45}a}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$

b) $(-a)^4 \left[\frac{(-a)^3\sqrt[6]{729}}{3a}\right]^2 = (-a)^4 \left[\frac{(-a)^3\sqrt[6]{3^6}}{3a}\right]^2$

$= a^4 \left[\frac{(-a)^3 \times 3}{3a}\right]^2$

$= \frac{a^4 \times a^6 \times \cancel{3^2}}{\cancel{3^2} \times a^2} = a^{4+6-2} = a^8$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

c) $\sqrt{25b^2c^{-8}} = \sqrt{\frac{25b^2}{c^8}} = \frac{5b}{c^{\frac{8}{2}}} = \frac{5b}{c^4}$

d) $\frac{3x^{-5}\times y^2}{2^{-1}\times y^{-2}} = \frac{3\times 2\times y^{2+2}}{x^5} = \frac{6y^4}{x^5}$ حيث $x \neq 0$

س3/ اكتب كلاً من العبارات الآتية بشكل يكون المقام فيها (1) ولا يكون تحت الجذر مستخدماً الأسس:

a) $\frac{bc}{d} = bcd^{-1}$ حيث $d \neq 0$

b) $\frac{1}{b^5} = b^{-1}$ حيث $b \neq 0$

c) $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ حيث $x \geq 0$

d) $\frac{4b^2}{b^2c^2} = 4b^{2-2}c^{-2} = 4c^{-2}$ حيث $b \neq 0$

e) $\frac{1}{b^2+c^2} = (b^2+c^2)^{-1}$

f) $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$ حيث $x \neq 0$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س4/ إذا كان $a \in \overline{R}$ ، m ← عدداً صحيحاً زوجياً فأي مما يأتي صائبة:

a) $a^m > 0$ صائبة

b) $a^m < 0$

c) $a^m \geq 0$

d) $a^m \leq 0$

س5/ إذا كان $a \in \overline{R}$ ، m ← عدداً صحيحاً فردياً فأي مما يأتي صائبة:

a) $a^m > 0$

b) $a^m < 0$ صائبة

c) $a^m \geq 0$

d) $a^m \leq 0$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س6/ (أ) برهن أن: $a^{(x-y)^z} \cdot a^{(z-x)^y} \cdot a^{(y-z)^x} = 1$

الحل/

الطرف الأيسر $= a^{xz-yz} \cdot a^{zy-xy} \cdot a^{yx-zx}$

$= a^{\cancel{xz}+\cancel{zy}+\cancel{yx}-\cancel{xy}-\cancel{yz}-\cancel{zx}} = a^0 = 1 =$ الطرف الأيمن

(ب) برهن أن: $\left[x^{n^2-1} \div x^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$

الحل/

الطرف الأيسر $= \left[\frac{x^{n^2-1}}{x^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n-\cancel{1}+\cancel{1}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n}\right]^{\frac{1}{n}}$

$= x^{\frac{1}{n}(n^2-n)} = x^{\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}-\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}} = x^{n-1} =$ الطرف الأيمن

س7/ برهن أن: $\frac{1}{1+a^{b-c}}+\frac{1}{1+a^{c-b}}=1$

الحل/

استاذ رابع علمي
@stad4al

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{1}{1+\frac{a^b}{a^c}}+\frac{1}{1+\frac{a^c}{a^b}}$$

$$=\frac{1}{\frac{a^c+a^b}{a^c}}+\frac{1}{\frac{a^b+a^c}{a^b}}$$

$$=1\times\frac{a^c}{a^c+a^b}+1\times\frac{a^b}{a^b+a^c}=\frac{a^c}{a^c+a^b}+\frac{a^b}{a^b+a^c}=\frac{(a^c+a^b)}{(a^c+a^b)}=1$$ و.هـ.م

س8/ أثبت أن: $\frac{5\times3^{2n}-4\times3^{2n-1}}{2\times3^{2n+1}-3^{2n}}=\frac{11}{15}$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{5\times3^{2n}-4\times3^{2n}\times3^{-1}}{2\times3^{2n}\times3-3^{2n}}=\frac{\cancel{3^{2n}}\left(5-4\times\frac{1}{3}\right)}{\cancel{3^{2n}}(2\times3-1)}=\frac{5-\frac{4}{3}}{5}$$

$$=\frac{\frac{15-4}{3}}{5}=\frac{11}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{15}=\text{الطرف الأيمن}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س9/ اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة:

a) $\frac{6^{4n-1}\times27^{2n}}{2^{n+1}\times8^{n-1}\times9^{n+2}}$

$$=\frac{2^{4n-1}\times3^{4n-1}\times(3^3)^{2n}}{2^{n+1}\times(2^3)^{n-1}\times(3^2)^{n+2}}=\frac{2^{4n}\times2^{-1}\times3^{4n}\times3^{-1}\times3^{6n}}{2^n\times2\times2^{3n}\times2^{-1}\times3^{2n}\times3^4}$$

$$=2^{4n-n-3n-1-1+3}\times3^{4n+6n-2n-1-4}=2\times3^{8n-5}$$

$$=\frac{2\times3^{8n}}{3^5}$$

b) $\frac{3^{n+2}+3^{n+1}}{3^n-3^{n-1}}$

$$=\frac{3^n\times3^2+3^n\times3^1}{3^n-3^n\times3^{-1}}=\frac{\cancel{3^n}\times(3+1)}{\cancel{3^n}\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3\times4}{\frac{3-1}{3}}$$

$$=\frac{12}{\frac{2}{3}}=\cancel{12}\times\frac{3}{\cancel{2}}=18$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

استاذ رابع علمي
@stad4al

س10/ برهن أن: $\left[\frac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\times\sqrt{3\times3^{n}}}{3\times\sqrt{3^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 27$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر} = \left[\frac{((3^2)^{n+\frac{1}{4}})\times(3\times3^n)^{\frac{1}{2}}}{3\times\sqrt{\frac{1}{3^n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n}\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{n}{2}}}{\frac{3}{3^{\frac{n}{2}}}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[\frac{3^{2n}\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{n}{2}}}{1}\times\frac{3^{\frac{n}{2}}}{3}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{3}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[\frac{3^{\frac{4n+n+n}{2}}\times\cancel{3}}{\cancel{3}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{\cancel{6}n}{\cancel{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}}}\right] = 3^3 = 27 = \text{الطرف الأيمن}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

المعادلات الأسية البسيطة

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

[3-2] حل المعادلات الأسية البسيطة

تتضمن المعادلات الأسية Exponential Equation متغير في الأس.

ولحل هذا النوع من المعادلات نحتاج الملاحظات الآتية:

1- في أي معادلة: ((إذا تساوت الأساسات فسوف تتساوى الأسس بشرط الأساس $\neq 1$))

2- إذا كان $x^n=y^n$ فإن $x=y$ إذا كانت n فردية، $x=\pm y$ إذا كانت n زوجية

3- إذا كان $x^n=y^m$ حيث $(m=n=0)$ والآن لاحظ حل كلاً من المعادلات الآتية:

أ- $(x+2)^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x+2)^{\frac{-3}{5}} = 3^{\frac{-3}{5}}$

$x+2=3 \Rightarrow x=1$

∴مج = {1}

ب- $x^{\frac{1}{3}} = 8 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2^3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (2^3)^3$

$x = 2^6 \Rightarrow x = 512$

∴مج = {512}

ج- $\sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 3^{-2} \Rightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \pm(3^{-2})^{\frac{3}{2}}$

$x = \pm 3^{-2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{27}$

∴مج = $\{\pm\frac{1}{27}\}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

مثال1/ حل المعادلة: $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$

الحل/

$2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x+3)}$ نجعل الأساس نفسه في طرفي المعادلة

∴ $x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -1$

مجموعة الحلول = {-1,5}

وتسمى مثل هذه المعادلة بالمعادلة الأسية لأن الأسس متغيرة.

مثال2/ حل المعادلة: $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

الحل/

$[3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0] \div 3$

$3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0$

$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$

أما $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

أو $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

مجموعة الحلول = {1,2}

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مثال3/ جد قيمة x إذا كان: (أ) $3^{x-1} = 5^{x-1}$ (ب) $(x+3)^5 = 4^5$ (ج) $(x-1)^6 = 2^6$

الحل/

أ- بتطبيق ملاحظة (3) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

ب- بتطبيق ملاحظة (2) $x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$

ج- بتطبيق ملاحظة (2) $x - 1 = \pm 2$

$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

S = {-1,3}

مثال4/ حل المعادلة في R حيث $8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{2}{3}} = 14$

الحل/

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}\left(1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right) = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}}(1 + 2 + 4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = \frac{14}{7} \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = 2$$

$$(2^3)^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^1$$

$$\frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حلول تمارين (3-2)

س1/ حل كل من المعادلات الآتية:

1) $\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$

$x^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^3}$

$\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = (3^{-3})^{\frac{5}{3}}$

$x = 3^{-5}$

$x = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

2) $\left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = \left(x^{\frac{-1}{2}}\right)^2$

$(243)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$

$(3^5)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$

$3^2 = x^{-1}$

$9 = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{9}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

3) $(x+2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$\sqrt{x+2} = 3$ بتربيع الطرفين

$x + 2 = 9$

$x = 9 - 2$

$x = 7$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

4) $10^{(x-4)(x-5)} = 100$

$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$

$(x-4)(x-5) = 2$

$x^2 - 5x - 4x + 20 - 2 = 0$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x-6)(x-3) = 0$

$x = 6 \text{ or } x = 3$

مجموعة الحل $S = \{(6,3)\}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

5) $-6 \times 5^x + 25^x + 5 = 0$

$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$

$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 = 0$

$(5^x - 5)(5^x - 1) = 0$

$5^x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

or $5^x - 1 = 0 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\therefore S = \{1,0\}$

6) $6^{x^2-3x-2} = 36$

$6^{x^2-3x-2} = 6^2$

$x^2 - 3x - 2 = 2$

$x^2 - 3x - 2 - 2 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

or $x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$S = \{4, -1\}$

7) $3^{(x^2+5x+4)} = 27^{(-x-4)}$

$3^{(x^2+5x+4)} = 3^{3(-x-4)}$

$x^2 + 5x + 4 = 3(-x - 4)$

$x^2 + 5x + 4 = -3x - 12)$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x + 4)(x + 4) = 0$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

8) $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$

$2^{2x} \times 2^3 - 57 = 65 \times 2^x - 65$

$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x - 57 + 65 = 0$

$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x + 8 = 0$

$(8 \times 2^x - 1)(2^x - 8) = 0$

$8 \times 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 8 \times 2^x = +1$

$2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$

$\boxed{x = -3}$

or $2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

مجموعة الحل $S = \{-3,3\}$

9) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

$5 \times 5^x + 5 \times 5^{-x} = 26$

$5 \times 5^x + 5 \times \frac{1}{5^x} = 26$

$5 \times 5^x \times 5^x + 5 \times 5^x \times \frac{1}{5^x} = 5^x \times 26$

$5 \times 5^{2x} + 5 = 26 \times 5^x$

$5 \times 5^{2x} - 26 \times 5^x + 5 = 0$

$(5 \times 5^x - 1)(5^x - 5) = 0$

$5 \times 5^x - 1 \Rightarrow 5 \times 5^x = 1$

$5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$

Or $5^x - 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\therefore S = \{-1,1\}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س2/ حل المعادلة في R: $3^{x+1}\times 9^{x}-9^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{3}{x}}=0$

الحل/

$$3^{x}\times 3\times 3^{2x}-3^{2\times\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{3}{x}}=0$$
$$3^{3x}\times 3-3\times 3^{\frac{3}{x}}=0$$
$$\left[3^{3x}\times 3=3\times 3^{\frac{3}{x}}\right]\div 3$$
$$3^{3x}=3^{\frac{3}{x}}\Rightarrow 3x=\frac{3}{x}\Rightarrow x^{2}=\frac{3}{3}\Rightarrow x^{2}=1\Rightarrow x=\pm 1 \qquad \therefore S=\{1,-1\}$$

س3/ حل المعادلة التالية: $\frac{(243)^{x-1}\times(27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}}=81$

الحل/

$$\frac{(3^{5})^{x-1}\times(3^{3})^{x-2}}{(3^{6})^{\frac{1}{2}x}}=81\Rightarrow\frac{3^{5x}\times 3^{-5}\times 3^{3x}\times 3^{-6}}{3^{3x}}=81$$
$$3^{5x+\cancel{3x}-\cancel{3x}-5-6}=3^{4}\Rightarrow 3^{5x-11}=3^{4}\Rightarrow 5x-11=4$$
$$5x=4+11\Rightarrow 5x=15\Rightarrow x=\frac{15}{5}\Rightarrow x=3$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س3/ جد قيمة $x\in R$ إذا علمت

(أ) $3^{x^{2}-1}+3^{x^{2}}+3^{x^{2}+1}=39$

الحل/

$$3^{x^{2}}\times 3^{-1}+3^{x^{2}}+3^{x^{2}}\times 3=39$$
$$3^{x^{2}}\left(\frac{1}{3}+1+3\right)=39$$
$$3^{x^{2}}\left(\frac{1+3+9}{3}\right)=39$$
$$3^{x^{2}}\times\frac{13}{3}=39$$
$$\frac{3^{x^{2}}\times 13}{3}=\frac{39}{1}$$
$$3^{x^{2}}\times 13=117$$
$$3^{x^{2}}=\frac{117}{13}$$
$$3^{x^{2}}=9$$
$$3^{x^{2}}=3^{2}$$
$$x^{2}=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$
$$S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$$

(ب) $\frac{4^{x}+4(2^{x})+3}{4^{x}+2^{x}}=25$

الحل/

$$\frac{(2^{2})^{x}+4(2^{x})+3}{(2^{2})^{x}+2^{x}}=25$$
$$\frac{2^{2x}+4\times 2^{x}+3}{2^{2x}+2^{x}}=25$$
$$\frac{(2^{x}+3)\cancel{(2^{x}+1)}}{2^{x}\cancel{(2^{x}+1)}}=25$$
$$\frac{(2^{x}+3)}{2^{x}}=25$$
$$(2^{x}+3)=25\times 2^{x}$$
$$\cancel{2^{x}}-\cancel{2^{x}}+3=(25\times 2^{x})-2^{x}$$
$$+3=(24\times 2^{x})$$
$$2^{x}=\frac{3}{24}\Rightarrow 2^{x}=\frac{1}{8}$$
$$2^{x}=\frac{1}{2^{3}}\Rightarrow 2^{x}=2^{-3}$$
$x=-3$ إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

العمليات على الجذور

[3-3] الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لا يمكن إيجاد قيمتها بصورة مضبوطة مثل: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[5]{61}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{6}$

تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وبالرجوع إلى موضوع الأسس نلاحظ أن هذه الجذور ما هي إلا كميات ذات أسس كسرية.

مثلا / $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}, \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

الخواص /

1- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ وعكس الخاصية صحيح.

مثلا / $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{53} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$, $\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72}$

2- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ وعكس الخاصية صحيح حيث $y \neq 0$

مثلا / $\sqrt[3]{\frac{3x}{2y}} = \frac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}}$, $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7}$

مثال1/ رتب الجذور الآتية تصاعدياً $\sqrt[6]{147}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{12}$

الحل/

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$

$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$\sqrt[6]{147} = \sqrt[6]{147}$

الترتيب يكون $(\sqrt{5}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[6]{147})$

مثال2/ رتب الجذور الآتية تنازلياً $\sqrt[9]{10}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{5}$

الحل/ المضاعف المشترك الأصغر لأدلة الجذور هو (18)

$\sqrt[18]{10^2}, \sqrt[18]{2^6}, \sqrt[18]{5^3}$

$\sqrt[18]{100}, \sqrt[18]{64}, \sqrt[18]{125}$

$\sqrt[18]{125}, \sqrt[18]{100}, \sqrt[18]{64}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

إذن الترتيب هو $(\sqrt[6]{5}, \sqrt[9]{10}, \sqrt[3]{2})$

[3-4] العددان المترافقان $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ Conjugate Numbers

نعلم أن العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت إلى كمية نسبية

فالعامل المنسب للمقدار	$2\sqrt{3}$	هو $\sqrt{3}$	لأن $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$
والعامل المنسب للمقدار	$\sqrt[3]{3}$	هو $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3}$	لأن $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
والعامل المنسب للمقدار	$5 + \sqrt{6}$	هو مرافقه $5 - \sqrt{6}$	لأن ضربهما $(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6}) = 25 - 6 = 19$
والعامل المنسب للمقدار	$3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$	هو $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$	لأن $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = 9 \times 2 - 4 \times 5 = -2$
والعامل المنسب للمقدار	$\sqrt[3]{5} - 1$	هو $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$	لأن $(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1) = \sqrt[3]{125} - 1 = 5 - 1 = 4$ (فرق بين مكعبين)

مثال1/ بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الحل/

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

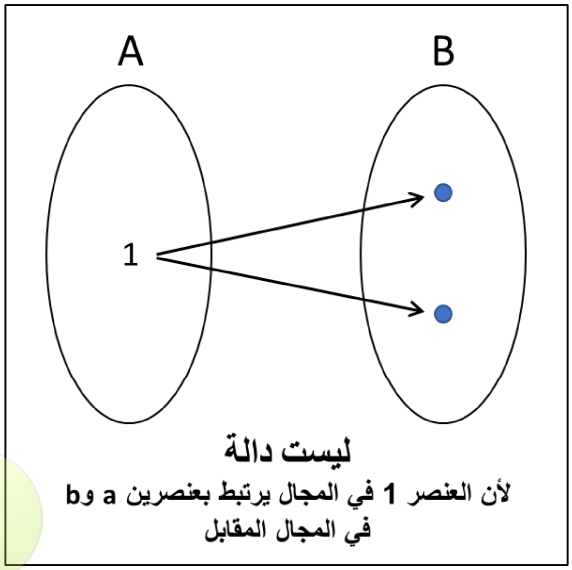
$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 3$$

استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

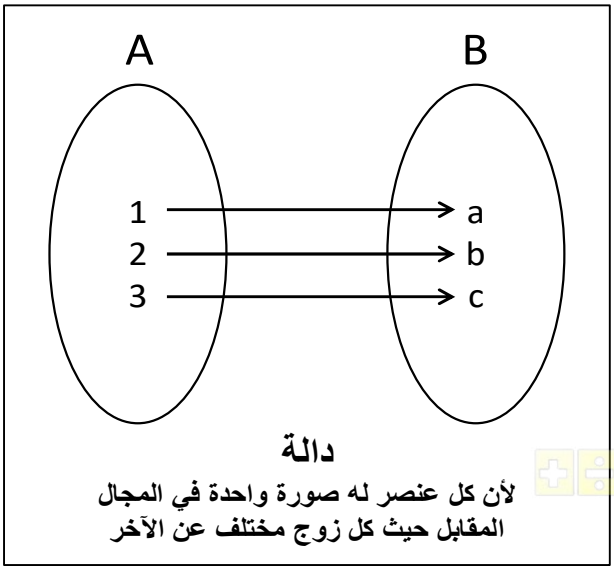
الدوال الحقيقية

مفهوم الدالة/ إذا كانت العلاقة من مجموعة (A) إلى المجموعة (B) حيث كل عنصر من المجموعة (A) له صورة واحدة في المجموعة (B) أي أن كل زوج يظهر لنا مرة واحدة.



ليست دالة

لأن العنصر 1 في المجال يرتبط بعنصرين a وb في المجال المقابل



دالة

لأن كل عنصر له صورة واحدة في المجال المقابل حيث كل زوج مختلف عن الآخر

التعبير الرياضي للدالة: حيث يعبر عن الدالة بالصيغة الرمزية الآتية:

$f: A \longrightarrow B$ حيث يقرأ (f دالة من A إلى B)

حيث $\forall x \in A$ ، يوجد $y = f(x) \in B$

1) إذا كان الزوج المرتب (x,y) ينتمي إلى بيان الدالة (f).

$f(x) = x \longrightarrow y$ حيث (y) هو صورة العنصر x تحت تأثير الدالة (f).

2) تتعين الدالة من ثلاث مكونات وهي:

a) المجال: وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي إليها المتغير (x) إذا كان (x,y) ينتمي إلى بيان الدالة (f).

b) المجال المقابل: وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي إليها المتغير (y) إذا كان (x,y) ينتمي إلى بيان الدالة (f).

c) قاعدة الدالة f: هي العلاقة التي تربط عناصر (A) بعناصر (B) أي أن y=f(x).

3) تعطى قاعدة الدالة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

a) ذكر بيان الدالة $f: A \longrightarrow B$ وهذا يعني أنها تكتب على شكل أزواج مرتبة

$$f(x) = \{(x, y): y = f(x),\ x \in A\}$$

b) أو يذكر المعادلة التي تقوم بربط المتغير (x) بالمتغير (y).

استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الدوال الحقيقية

تسمى الدالة $f: A \longrightarrow B$ دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) هما مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية (R).
حيث المجال المقابل، المجال $= \{x: x \in R, f(x) \in R\}$ ⊆ R

أوسع مجال للدالة f في R:
هو مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى (A) والتي يكون عندها f(x) E R

ملاحظة مهمة ((عندما تعطى قاعدة دالة ويطلب تحديد مجالها، فإن المجال سيكون أوسع مجال ممكن في R))

أوسع مجال للدالة

أولاً / إذا كانت الدالة f(x) كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R.

مثال1/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = 3x^2 + 7$
الحل/ أوسع مجال للدالة هو R (لأن الدالة كثيرة الحدود)

مثال2/ عين مجال للدالة f (أوسع مجال للدالة) إذا كانت $f(x) = x^2$
الحل/ ∵ x^2 معرفة دوماً في R مهما كانت $x \in R$
∴ أوسع مجال للدالة هو R أي مجال f = R

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم

كيف نتعرف على الدوال الكثيرة الحدود (ما هي مواصفاتها)

a- مجال الدالة فيها ومجالها المقابل = R (أو مجموعة جزئية من R).
b- قاعدة الدالة تتكون من حد واحد أو عدة حدود.
c- أن أس (x) في أي حد من حدود الدالة يكون عدد طبيعي.

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

صور الدوال الكثيرة الحدود

(a) الدالة الثابتة: حيث f(x)=a، (حيث a عدد ثابت) فإن $a \in R$.
تمثله كل الدوال الثابتة: $f(x) = 17$, $f(x) = \sqrt{3}$, $f(x) = -8$

(b) الدالة الخطية: حيث f(x)==ax+b $[a , b , c \in R , a \neq 0]$
أمثلة على الدالة الخطية: $f(x) = \sqrt{2}x + 12$, $f(x) = 6x + 11$

(c) الدالة التربيعية: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a , b , c \in R, a \neq 0)$

أمثلة على الدوال التربيعية: $f(x) = 9x^2 - 4$, $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$

(d) الدالة التكعيبية: مثل $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

ثانياً / إذا كانت الدالة كسرية (مكونة من بسط ومقام) فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل المقام = صفر

مثال3/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

الحل/ نجعل المقام مساوياً للصفر ← $x^2 - 5x + 6 = 0$

نقوم بتحليل المعادلة بواسطة التجربة ← $(x - 3)(x - 2) = 0$

إيجاد قيم (x) التي تجعل المقام مساوياً للصفر $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ اما

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ او

∴ أوسع مجال للدالة f هو $R / \{2,3\}$

ثالثاً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي فإن أوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي:

(a) إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي والجذر في البسط تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا العدد الذي يجعل القيمة التي تحت الجذر ≤ صفر.

مثال4/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x + 7}$ ← الدليل وهو زوجي

الحل/ ∵ الدالة دليلها زوجي (تربيعي)

∴ الجذر يقع في البسط

$x + 7 \geq 0$

$x \geq -7$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , x \geq 7\}$

(b) إذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليله زوجي والجذر يقع في المقام تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل القيم التي تحت الجذر التربيعي > صفر.

مثال5/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+6}}$

الحل/ ∵ الدالة دليلها زوجي (تربيعي) والجذر يقع في المقام

$3x + 6 > 0$

$3x > -6$

$\frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}x > \frac{1}{\cancel{3}} \times -\cancel{6}^{2}$

$x > -2$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , x > -2\}$

رابعاً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله فردي وكان الجذر في البسط تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو R.

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس أول الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال6/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt[5]{x-4}$

الحل/ ∵ الجذر في البسط ودليله فردي وهو (5). ∴ أوسع مجال للدالة هو R.

خامساً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله فردي وكان الجذر في المقام فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر.

مثال7/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-5}}$

الحل/ $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

∴ أوسع مجال للدالة هو R / {5}.

مثال8/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{3x+5}$

الحل/ $3x + 5 = 0$

$3x = -5$

$x = \frac{-5}{3}$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \left\{\frac{-5}{3}\right\}$.

مثال9/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

الحل/ $x \geq 0$

∴ أوسع مجال للدالة f هو $\{x : x \in R , x \geq 0\}$

مثال10/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

الحل/ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

∴ أوسع مجال للدالة هو R / {1}.

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

التمثيل البياني للدوال الحقيقية

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الجدول الآتي لبعض الدوال المرتبة:

تمثيل الدالة $a,b \in R , a \neq 0 , f(x) = ax^2+b$

هذه الدالة يمثلها قطعا مكافئا راسه النقطة $(0,y)$ ويكون بشكل:

∪ بيانها يقع في النصف الأعلى من المستوى الإحداثي

∩ بيانها يقع في النصف الأسفل من المستوى الإحداثي

أولاً / تمثيل الدالة الخطية:

$f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = ax + b$ حيث $a , b \in R$ لتمثيل هذه الدالة نأخذ نقطتين (على الأقل) من مجال الدالة ونجد $f(x)$ لكل نقطة ونعين الأزواج المرتبة $(x,f(x))$ في المستوى الديكارتي ونصل بينهما بمستقيم.

مثال1/ مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = x - 2$ بيانياً؟

الحل/ إن التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم

فعندما x=1 مثلا فإن $y = f(1) = 1 - 2 = -1$

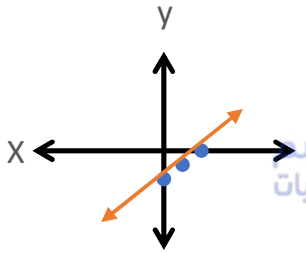
وعندما x=2 فإن $y = f(2) = 2 - 2 = 0$

وعلى ذلك فإن الزوجان المرتبطان a(1-1), b(2,0)

ينتميان إلى بيان الدولة وتعينان النقطتين a , b

ويكون المستقيم (ab) هو المستقيم المطلوب

x	y	(x,y)
1	-1	(1,-1)
2	0	(2,0)
0	-2	(0,-2)



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مثال2/ مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 2x + 1$ بيانياً؟

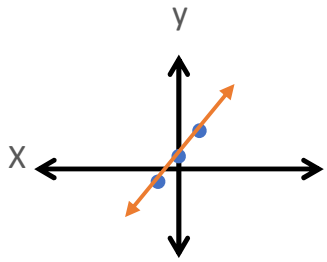
الحل/

استاذ رابع علمي
@stad4al

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

$f(-1) = (2 \times -1) + 1 = -1$

x	y	(x,y)
1	3	(1,3)
-1	-1	(-1,-1)



مثال3/ مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 2$ بيانياً؟

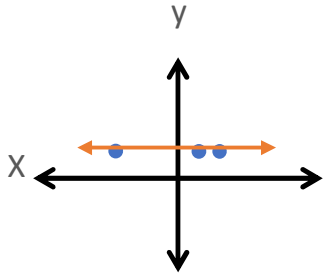
الحل/ تسمى هذه الدالة بالثابتة وتمثل مستقيماً يوازي محور السينات

$f(1) = 2$

$f(2) = 2$

$f(-3) = 2$

x	y	(x,y)
1	2	(1,2)
2	2	(2,2)
-3	2	(-3,2)



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

ثانياً / التمثيل البياني للدالة التربيعية:

لتمثيل مثل هذه الدوال نأخذ خمس قيم (على الأقل) لـ (x) من مجال الدالة ونجد f(x) لكل منها باستخدام قاعدة التعريف التالية:

تعريف

التمثيل البياني للدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = ax^2 + b$ حيث $a, b \in R$

وإن $a \neq 0$ وهي تمثل منحنياً وليس مستقيما

مثال4/ مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = x^2$ بيانياً؟

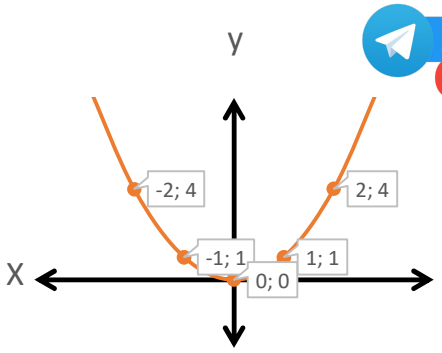
الحل/ نأخذ خمس قيم لـ (x) ونعوضها في $f(x) = x^2$

x	y	(x,y)
2	4	(2,4)
1	1	(1,1)
0	0	(0,0)
-1	1	(-1,1)
-2	4	(-2,4)

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

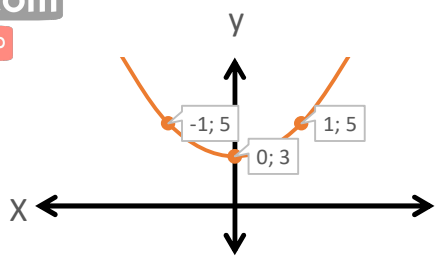
$f(-1) = (-1)^2 = 1$



استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

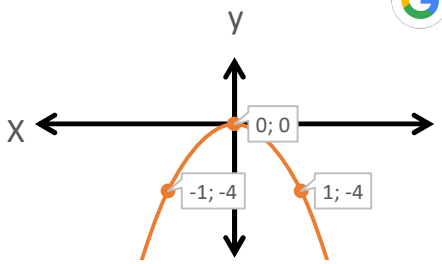
مثال5/ مثل الدالة $f(x) = 2x^2 + 3$ بيانياً؟

x	1	0	-1
y	5	3	5



مثال6/ مثل الدالة $f(x) = -4x^2$ بيانياً؟

x	1	0	-1
y	-4	0	-4



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال7/ مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $y = x^2 + 3$ بيانياً؟

x	y	(x,y)
2	7	(2,7)
1	4	(1,4)
0	3	(0,3)
-1	4	(-1,4)
-2	7	(-2,7)

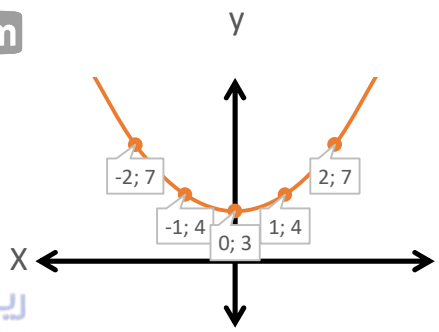
$y = (2)^2 + 3 = 7$

$y = (1)^2 + 3 = 4$

$y = (0)^2 + 3 = 3$

$y = (-1)^2 + 3 = 4$

$y = (-2)^2 + 3 = 7$



مثال8/ مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $y = 1 - x^2$ بيانياً؟

x	y	(x,y)
2	-3	(2,-3)
1	0	(1,0)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)
-2	-3	(-2,-3)

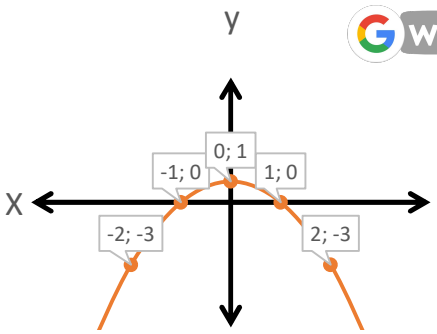
$y = 1 - (2)^2 = -3$

$y = 1 - (1)^2 = 0$

$y = 1 - (0)^2 = 1$

$y = 1 - (-1)^2 = 0$

$y = 1 - (-2)^2 = -3$



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

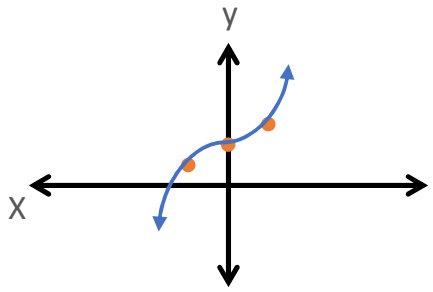
ثالثاً / التمثيل البياني للدالة التكعيبية:

تمثيل الدالة $f(x)=ax^3+b$ ، $a, b \in R, a \neq 0$

استاذ رابع علمي
@stad4al

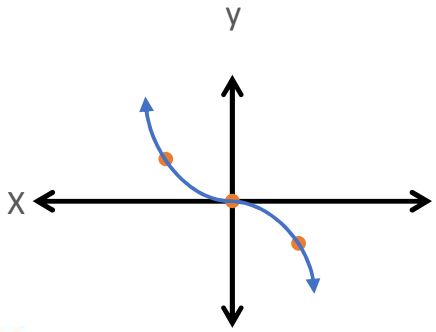
مثال1/ مثل الدالة $f(x) = x^3 + 2$

x	1	0	-1
y	3	2	1



مثال2/ مثل الدالة $f(x) = -x^3$

x	1	0	-1
y	-1	0	1



رابعاً / تمثيل الدالة $f_a(x) = a^x$

لقد تعرفنا على الرمز a^x حيث كان الأس عدداً نسبياً، ورأينا أن قوانين الأسس في حالة كون الأس عدداً صحيحاً، بقيت نفسها عندما أصبح الأس عدداً نسبياً.
وإذا كان a عدداً حقيقياً موجباً $(a \neq 1)$، وكان x عدداً حقيقياً فالرمز a^x يدل على قوة العدد (أسها x وأساسها a).

استاذ رابع علمي
@stad4al

تعريف (3-3)

إذا كان $x \in R$ ، $a \in R^+/\{1\}$ وكان $f(x) = a^x$
فإن f(x) تسمى الدالة الأسية للأساس a (Exponential Function)

فمثلاً / $f_2(x) = 2^x$, $g_3(x) = 3^x$, $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

مثال9/

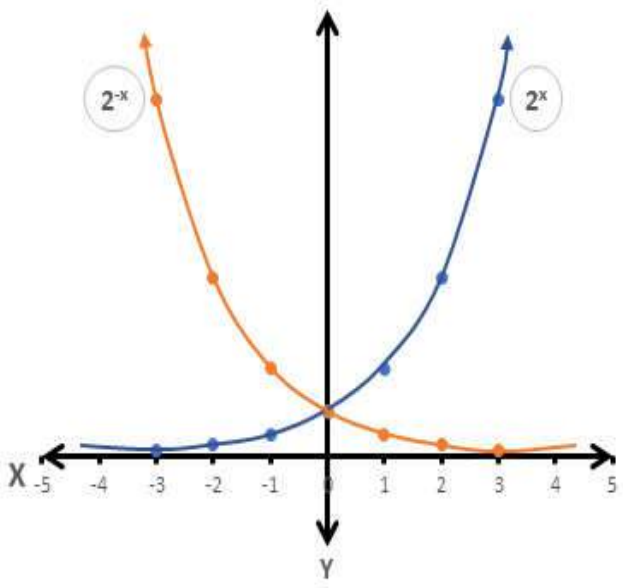
(أ) جد قيم الدالة $f(x) = 2^x$ من أجل $x = 3 , 2 , 1 , 0 , -1 , -2 , -3$ ، ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحني هذه الدالة.

(ب) ابحث عن طريقة للإفادة من المنحني السابق في رسم جزء من منحني هذه الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$ على الشكل نفسه.

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الحل/ (أ) $f(x) = 2^x$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
2^x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



(ب) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$

ولنفرض R_y تناظر بالنسبة لمحور الصادات

$R_y : (x,y) = (-x,y)$

أي أن صورة $(x , 2^x) = (-x,2^x)$

لذلك فإننا نحصل على منحني لدالة

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ من المنحني $f(x) = 2^x$

بالتناظر حول محور الصادات كما موضح في الشكل (3-1)

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

بعض خصائص الدالة الأسية $f(x) = a^x$

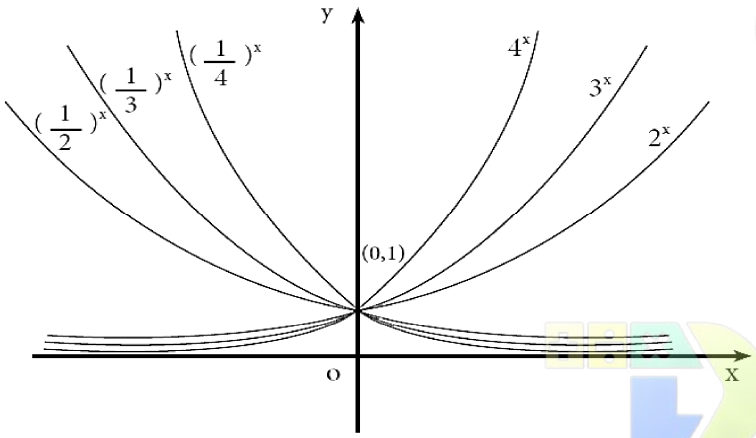
(1) إذا قمنا برسم منحنيات الدوال: $2^x, 3^x, 4^x, 5^x, \ldots\ldots$

وكذلك الدوال: $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x, \left(\frac{1}{4}\right)^x, \left(\frac{1}{5}\right)^x, \ldots\ldots$

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات:

الأولى: عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x.

الثانية: عندما $1 > a > 0$ حيث تتناقص قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x.



وقد رسمنا في الشكل (3-2) ستة من المنحنيات (رسم جزء من كل منحني) ثلاثة فيها $a > 1$ وثلاثة أخرى فيها $1 > a > 0$ وقد اخترنا قيم a في هذه الأخيرة مقلوب قيم a في الثلاثة الأولى ونلاحظ أن جميع هذه المنحنيات تمر بالنقطة (0,1).

(2) بالرجوع إلى المنحني البياني لأية دالة أسية a^x، $a \neq 0$ نجد أن مجالها R.

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س/ إضافي/ جد مجال كل من الدوال التالية:

أ) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ الحل/ ∵ الدالة كثيرة الحدود ∴ أوسع مجال للدالة هو R	ب) $f(x) = \frac{2x+6}{x^2-x-6}$ الحل/ $x^2 - x - 6 = 0$ $(x-3)(x+2) = 0$ أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ او $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ∴ مج = S= {3,-2} ∴ أوسع مجال للدالة هو R/{3,-2}

استاذ رابع علمي
@stad4al

جـ) $f(x)=\sqrt{4-x}$ الحل/ $4-x \geq 0$ $-\cancel{4}+\cancel{4}-x \geq 0-4$ $[-x \geq -4]\times -1$ $x \leq 4$ ∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \leq 4\}$	د) $f(x)=\sqrt{x+2}$ الحل/ $x+2 \geq 0$ $x+\cancel{2}-\cancel{2} \geq 0-2$ $x \geq -2$ ∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \geq -2\}$

حلول تمارين (3-3)

س1/ أ) أختصر $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$

الحل/

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\frac{(a+b)-(a-b)}{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\frac{\cancel{a}+b-\cancel{a}+b}{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\times\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{2b(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{2b(a+b)}$$

$$=\frac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{2b\cancel{(a+b)}}=\frac{a-b}{2b}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

ب) إذا كان $x = \sqrt[3]{2} + 1 , y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ فأثبت أن $xy = 3$

الحل/

الطرف الأيسر $= (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$ ← هذا ناتج مجموع مكعبي حدين

$= (\sqrt[3]{2})^3 + 1$ نعيده إلى وضع الأصلي

الطرف الأيمن $= 2 + 1 = 3$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س2/ مثل الدوال الآتية:

a) $f(x) = -4x^2 + 5$

الحل/

$f(2) = -4(2)^2 + 5 = -11$

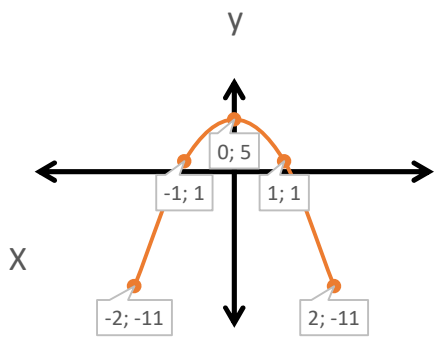
$f(1) = -4(1)^2 + 5 = 1$

$f(0) = -4(0)^2 + 5 = 5$

$f(-1) = -4(-1)^2 + 5 = 1$

$f(-2) = -4(-2)^2 + 5 = -11$

x	y	(x,y)
2	-11	(2,-11)
1	1	(1,1)
0	5	(0,5)
-1	1	(-1,1)
-2	-11	(-2,-11)



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

b) $f(x) = x - 8$

الحل/

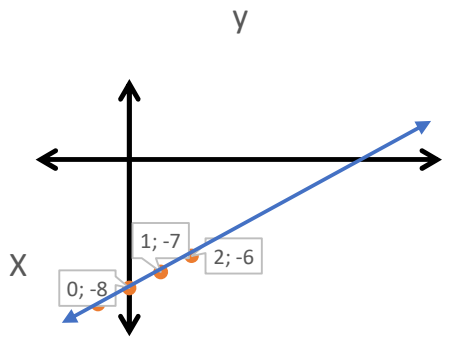
$f(2) = 2 - 8 = -6$

$f(1) = 1 - 8 = -7$

$f(0) = 0 - 8 = -8$

$f(-1) = -1 - 8 = -9$

x	y	(x,y)
2	-6	(2,-6)
1	-7	(1,-7)
0	-8	(0,-8)
-1	-9	(-1,-9)



استاذ رابع علمي
@stad4al

c) $f(x) = 2 - x^3$

الحل/

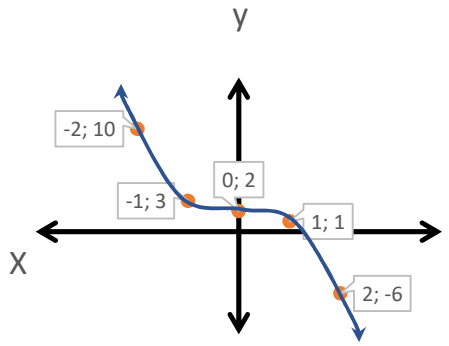
$f(2) = 2 - (2)^3 = -6$

$f(1) = 2 - (1)^3 = 1$

$f(0) = 2 - (0)^3 = 2$

$f(-1) = 2 - (-1)^3 = 3$

x	y	(x,y)
2	-6	(2,-6)
1	1	(1,1)
0	2	(0,2)
-1	3	(-1,3)



س3/ جد أوسع مجال للدوال التالية:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 9$

الحل/ أوسع مجال للدالة هو R لأن الدالة كثيرة الحدود.
لأن أي قيمة عددية حقيقية تعطى إلى (x) فإن $x \in R$ دائماً.

b) $f(x) = \frac{1-x}{x+9}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرسة في الرياضيات

الحل/ $x+9 = 0$

$x = -9$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \{-9\}$

لأن (-9) يجعل المقام يساوي (صفر) وهذا لا ينتمي للأعداد الحقيقية.

c) $f(x) = \sqrt{x - 9}$

الحل/ $x - 9 \geq 0$

$x \geq 9$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \geq 9\}$

d) $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$

الحل/ $3 - 5x \geq 0$

$-5x \geq -3$

$\frac{-1}{\cancel{5}} \times -\cancel{5}x \leq \frac{-1}{5} \times -3$

$x \leq \frac{3}{5}$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \leq \frac{3}{5}\}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

الحل/ $x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R/\{-3,3\}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س4/ أوجد ناتج ما يأتي بحيث يكون المقام عدد نسبي:

أ- $\frac{3}{a-b} \times \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$

الحل/

$$\frac{3}{a-b} \times \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$$

$$= \frac{\cancel{3}}{a-b} \times \frac{\cancel{\sqrt{2}} \times \cancel{\sqrt{x}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}}}{\cancel{3}\cancel{\sqrt{2}} \times \cancel{\sqrt{x}} \times x}$$

$$= \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}}}{x \times (a-b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}}{x} = \frac{(a-b)^{\frac{5-3}{2}}}{x} = \frac{(a-b)^{\frac{2}{2}}}{x} = \frac{a-b}{x}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

ب- $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

الحل/

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{(3\sqrt{3}\sqrt{3}) - (2\sqrt{2}\sqrt{2})}{3\sqrt{3} \times \sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{\frac{(3 \times 3) - (2 \times 2)}{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{9-4}{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{5}{3\cancel{\sqrt{3}} \times \sqrt{2}} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{5}{3 \times 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5}{24}$$

ج- $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$

الحل/

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\cancel{\sqrt{5}}+1-\cancel{\sqrt{5}}+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س5/ أثبت أن: $\frac{-15}{x+\sqrt{x}-6}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}-\frac{3}{\sqrt{x}+3}=0$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{-15}{x+\sqrt{x}-6}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}-\frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{-15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}+\frac{3}{(\sqrt{x}-2)}-\frac{3}{(\sqrt{x}+3)}$$

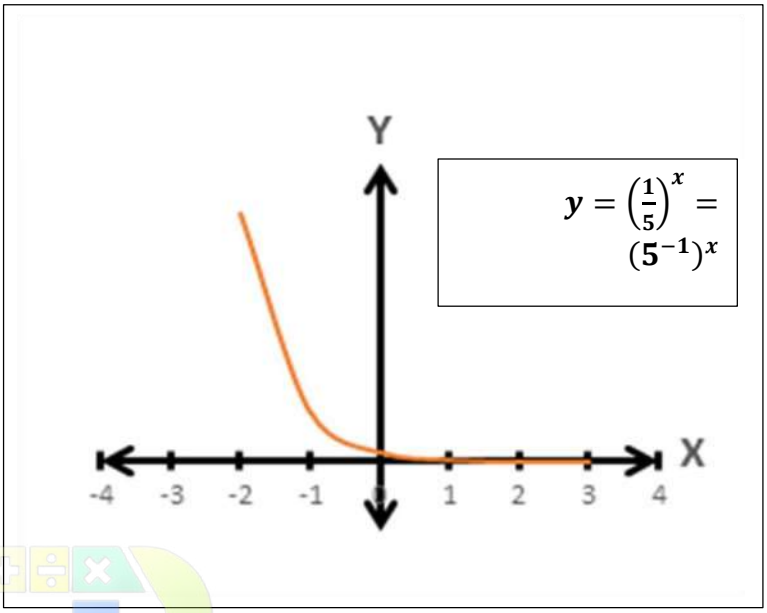
$$=\frac{-15+3(\sqrt{x}+3)-3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}=\frac{\cancel{-15}+\cancel{3\sqrt{x}}+\cancel{9}-\cancel{3\sqrt{x}}+\cancel{6}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{zero}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}=0=\text{الطرف الأيمن}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س6/ ارسم جزءاً من المنحني البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

الحل/



$$x = 3 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow y = \frac{1}{125}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{25}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \Rightarrow y = 5$$

$$x = -2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow y = 25$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

أسئلة حلول الفصل

استاذ رابع علمي
@stad4al

س1/ برهن أن: $\frac{(2^x)^{x-1}}{2^{x-1}} \div \frac{(2^{x-1})^{x+1}}{4^{x+1}} = 16$

س2/ برهن أن: $\frac{3^{1-n}}{2^{-(n+1)}} \times \frac{25^{1-n}}{9^{-n}} \div \frac{30^{n-1}}{(125)^{n-1}} = 36$

س3/ أثبت أن: $\frac{4^x \times 9^{2x+2} \times 3^{2x-5}}{4^{x-2} \times 3^{6x-1}} = 16$

س4/ أثبت أن: $\frac{2^{n+1} \times 3^{x-5} + 2^{n-1} \times 3^{x-4}}{2^n \times 3^{x-3} + 2^{n-2} \times 3^{x-4}} = \frac{14}{39}$

س5/ أوجد أوسع مجال للدوال التالية:

1) $f(x) = \frac{12}{\sqrt{x}-3}$

2) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-2}-2}$

3) $f(x) = \frac{7}{\sqrt{5-x}-3}$

4) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-2}-2}$

5) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x-3}}$

6) $f(x) = \sqrt{3x+5}$

7) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-3}}$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س6/ ليكن $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = y = x+1$ جد

f(-3), f(2), f[f(-1)], f(1+Δx), f(a+2), f(b-3)

الحل/

$f(-3) = -3 + 1 = -2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f[f(-1)] = f[-1+1] = f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(1+\Delta x) = 1 + \Delta x + 1 = \Delta x + 2$

$f(a+2) = a + 2 + 1 = a + 3$

$f(b-3) = b - 3 + 1 = b - 2$

الفصل الرابع

حساب المثلثات

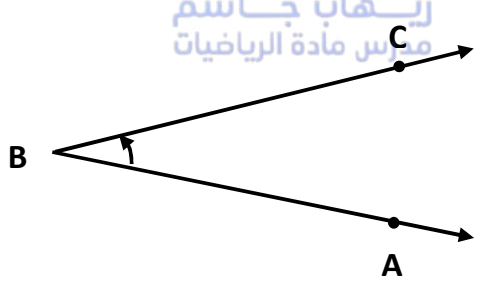
الزاويــة الموجهـة بالوضـع القياســي

هي الزاوية التي رأسها نقطة الأصل في المستوي المتعامد المحورين وضعها الأبتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات و ضلعها النهائي في أحد الأرباع.

التعريف رقم (1) :

الزاوية الموجهة Directed Angle : إذا كان للشعاعين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ نقطة بداية مشتركة هي B فأن الزوج المرتب $(\overrightarrow{BA} ، \overrightarrow{BC})$ يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{BA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{BC}$ ورأسها النقطة B وتكتب بأحدى الطريقتين :
$(\overrightarrow{BA} ، \overrightarrow{BC})$ أو $\overleftrightarrow{ABC}$.

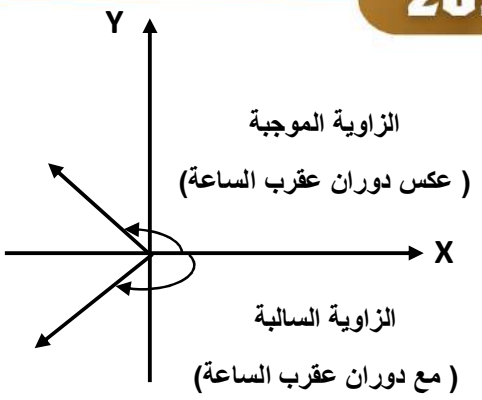
استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

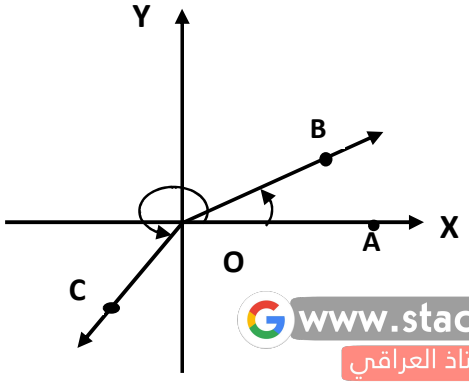


التعريف رقم (2) :

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي : إذا كان لدينا نظام احداثي متعامد المحورين في المستوي و زاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية في وضع قياسي إذا وقع رأسها في نقطة الأصل و أنطبق ضلعها الأبتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل الآتي :

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي





www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

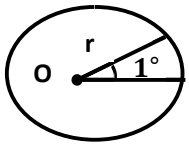
العلاقة بين التقديرين الستيني و الدائري لقياس الزوايا

كما نعلم في المرحلة المتوسطة فأنه :

إذا قسمنا دائرة الى 360° قسماً متساوياً فأننا نحصل على 360° قوساً متساوياً ، كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في القياس الستيني Degree Measure ويرمز له (1°).

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

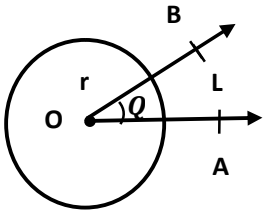
فالقياس الستيني :



هي الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طولهُ $\left(\frac{1}{360^\circ}\right)$ من محيط الدائرة.

القياس الدائري :

هي قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طولهُ مساوي لنصف قطر الدائرة.



كمـا ان : $60^{/} = 60$ دقيقة $= 1^\circ$

$60^{//} = 60$ دقيقة $= 1^{/}$

استاذ رابع علمي
@stad4al

ذكرنا سابقاً أن :

محيط الدائرة $= 2\pi r$

وبما أن :

$$Q = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r}$$

$\therefore 2\pi$: زاوية نصف قطرية $= 360°$

$\Leftarrow \pi$: زاوية نصف قطرية $= 180°$

$\therefore 1$: زاوية نصف قطرية $= \frac{180°}{\pi}$

$\therefore 1° = \frac{\pi}{180°}$ زاوية نصف قطرية $= 0.01745$ زاوية نصف قطرية.

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

بصورة عامة

6) إذا كان قياس زاوية موجهة = Q (من الزاويا النصف قطرية) فأن :

$$Q = \frac{D° * \pi}{180°}$$

7) إذا كان قياس زاوية موجهة $= D°$ فأن :

$$D° = \frac{Q * 180°}{\pi}$$

ومنه نستنتج إن :

$$\frac{Q}{D°} = \frac{\pi}{180°}$$

ريهاب جاسم
مدرس رياضيات

تستخدم العلاقة اعلاه لتحويل القياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس.

استاذ رابع علمي
@stad4al

مثال1/ إذا كانت $m\,\overrightarrow{AOB}$ في وضع قياسي تقابل طوله 10 سم في دائرة طول نصف قطرها 12 سم.

1) أحسب بالتقدير الدائري $m\,\overrightarrow{AOB}$ حيث: $2\pi \geq m\angle AOB \geq 0$ علماً ان مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

2) أحسب بالتقدير الدائري $m\,\overrightarrow{AOB}$ حيث: $0 \geq m\angle AOB \geq -2\pi$

الحل/

$$L = 10\ cm \quad ; \quad r = 12\ cm$$

1) ∴ زاوية نصف قطرية :

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

2) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالباً ويكون :

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

∴ $Q = -0.833$ زاوية نصف قطرية (لأن الزاوية سالبة)

مثال2/ إذا كانت $\angle\overrightarrow{AOB}$ في وضعها القياسي وكان قياسها $\frac{3\pi}{4}$. فما قياسها بالتقدير الستيني؟

الحل/

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \quad \rightarrow \quad D^\circ = 180^\circ * \frac{3}{4} = 135^\circ$$

مثال3/ حول : (أ) 40° الى التقدير الدائري. (ب) 75° الى التقدير الدائري.

(جـ) 2.6π الى التقدير الستيني. (د) $\frac{1}{4}\pi$ الى التقدير الستيني.

الحل/

(أ) من الزاويا النصف قطرية

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{40^\circ} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{2\pi}{9}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

استاذ رابع علمي
@stad4al

(ب) من الزاويا النصف قطرية

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{75^\circ} \rightarrow Q=\frac{5\pi}{12}$$

(جـ)

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2.6\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ=180^\circ*2.6=468^\circ$$

(د)

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ=180^\circ*\frac{1}{4}=45^\circ$$

مثال4/ حول : (أ) 45° الى التقدير الدائري. (ب) 2.6π الى التقدير الستيني.

الحل/

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(أ) من الزاويا النصف قطرية

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{45^\circ} \rightarrow Q=\frac{\pi}{4}$$

(ب)

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2.6\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ=180^\circ*2.6=468^\circ$$

مثال5/ زاوية مركزية قياسها 60° فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9cm ؟

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الحل/

$$\because \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{Q}{60^\circ} \rightarrow Q=\frac{\pi}{3}$$

$$\because |Q|=\frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3}=\frac{L}{9} \rightarrow L=\frac{9\pi}{3} \rightarrow L=3\pi \rightarrow L=3*3.142=9.426\ cm$$

مثال6/ زاوية مركزية طول قوسها $21\frac{1}{4}\ cm$ وطول نصف قطر دائرتها 20 cm . **فما مقدار قياسها الستيني ؟**

الحل/ من الزاويا النصف قطرية

$$|Q| = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{21\frac{1}{4}}{20} = \frac{17}{16}$$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{17}{16}}{D°} \rightarrow D° = 180° * \frac{17}{16} * \frac{7}{22} = 60.85°$$

مثال7/ في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية . **فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟**

الحل/

$$\because \frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{0.44}{D°} \rightarrow D° = 180° * 0.44 * \frac{7}{22} = 25.2°$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما A , B :

$$A + B = 90° \rightarrow (1)$$

$$A - B = 25.2° \rightarrow (2)$$

بالجمع

$$2A = 115.2°$$

$$\therefore A = 57.6°$$

$$B = 32.4°$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
استاذ رابع علمي
@stad4al

مثال8/ زاوية مركزية طول قوسها $22\ cm$ وطول نصف قطر دائرتها 20 cm . **فما مقدار قياسها الستيني ؟**

الحل/ من الزاويا النصف قطرية

$$|Q| = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{22}{20}$$

قياس الزاوية المركزية بالدائري

$$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{22}{20}}{D^\circ}$$ → القياس بالتقدير الستيني

$$\rightarrow \; D^\circ = 180^\circ * \frac{22}{20} * \frac{7}{22} = 63^\circ$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حلول تمارين (1-4)

س1/ حول الى التعبير الدائري كل من قياس الزاوية الاتية :

$30^\circ \quad , \quad 120^\circ \quad , \quad 15^\circ \quad , \quad 300^\circ$

الحل/

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{30^\circ} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{120^\circ} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{15^\circ} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{300^\circ} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{5\pi}{3}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

استاذ رابع علمي
@stad4al

س2/ حول كلاً من الزوايا النصف قطرية الاتية الى التقدير الستيني :

$\frac{3\pi}{5} \quad , \quad \frac{5\pi}{6} \quad , \quad \frac{1}{3}$

الحل/

$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$	$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$	$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$
$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{D^\circ}$	$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{D^\circ}$	$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{1}{3}}{D^\circ}$
$\pi * D^\circ = \frac{3\pi}{5} * 180^\circ$	$\pi * D^\circ = \frac{5\pi}{6} * 180^\circ$	$\pi * D^\circ = \frac{1}{3} * 180^\circ$
$D^\circ = \frac{3\cancel{\pi} * 36^\circ}{\cancel{\pi}}$	$D^\circ = \frac{5\cancel{\pi} * 30^\circ}{\cancel{\pi}}$	$D^\circ = \frac{60^\circ}{\pi}$
$D^\circ = 108^\circ$	$D^\circ = 150^\circ$	$D^\circ = \frac{60^\circ}{22/7} = \frac{210}{11}$
		$D^\circ = 19\frac{1}{11}$

س3/ قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا النصف قطرية تقابل قوساً طوله (25 cm).
جد طول نصف قطر الدائرة ؟

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الحل/

$$\because |Q| = \frac{L}{r} \rightarrow r = \frac{L}{Q} \rightarrow r = \frac{25}{\frac{5}{6}}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

$$r = 25 * \frac{6}{5} \rightarrow r = 30\ cm$$ طول نصف قطر الدائرة

س4/ ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 135° في دائرة نصف قطرها (8 cm)؟

الحل/

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{135^\circ} \rightarrow Q = \frac{135^\circ}{180^\circ} \rightarrow Q = \frac{3}{4}\pi$$

$$L = Q * r \rightarrow L = \frac{3}{4}\pi * 8 = 6\pi$$

$$L = 6 * 3.14 \rightarrow L = 18.857\ cm$$ طول القوس

س5/ زاويتان مجموعهما $\frac{\pi}{4}$ زاوية نصف قطرية و فرقهما يساوي $9°$. فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستيني ؟

الحل/

$$\because \frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{D°} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{\pi}{4}}{D°}$$

$$\rightarrow D° = 180° * \frac{\pi}{4} * \frac{1}{\pi} = 45°$$ مجموع الزاويتين بالتقدير الستيني

نفرض ان الزاوية الأولى $= x$

نفرض ان الزاوية الثانية $= y$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$x + y = 45° \quad \rightarrow (1)$$

$$x - y = 9° \quad \rightarrow (2)$$

بالجمع

$$2x = 54°$$

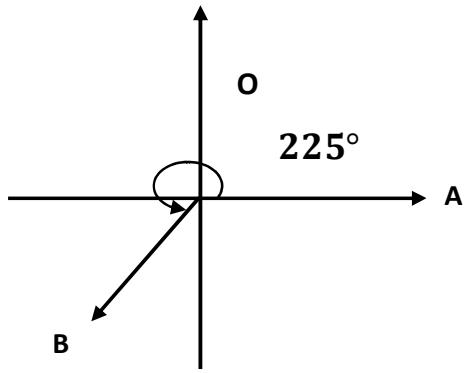
$$\therefore x = \frac{54°}{2} = 27°$$ قيمة الزاوية الأولى

$$y = 45° - 27° = 18°$$ قيمة الزاوية الثانية

س6/ أرسم الزاوية $\overrightarrow{AOB}$ في وضعها القياسي اذا كان قياسها $\frac{5\pi}{4}$ ثم جد قياسها بالتقدير الستيني ؟

الحل/

استاذ رابع علمي
@stad4al



$$\because \frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{D°}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{5\pi}{4}}{D°}$$

$$\rightarrow D° = 180° * \frac{5\pi}{4} * \frac{1}{\pi}$$

$$\rightarrow D° = 45° * 5 = 225°$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

النسب المثلثية لزاوية حادة

التعريف/

ΔABC القائم الزاوية في B :

جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q)

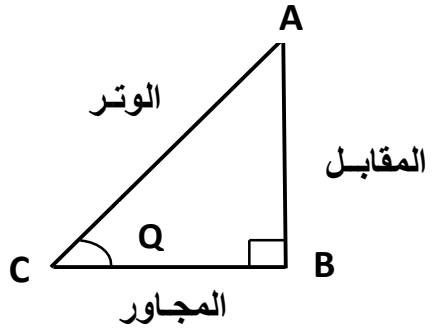
وتكتب $Sin\ Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$

جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q)

ويرمز له (Cos) وتكتب $Cos\ Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$

ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $tan\ Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$



استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

ملاحظة

من النسب المثلثية لزاوية حادة :

$Sin\ Q\ , Cos\ \ Q\ \ [-1\ , 1\ ]$

$Sin\ 0 = 0\ \ \ , Sin\ 90° = 1$

$Cos\ 0 = 1\ \ \ , Cos\ 90° = 0$

$tan\ 0 = 0\ \ \ , tan\ 90°$ غير معرفة

بعض العلاقات الأساسية في حساب المثلثات

الشكل اعلاه يمثل مثلثاً قائم الزاوية في B والزاوية الحادة Q :

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABC نجد ان :

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ بقسمة كل الحدود على $(AC)^2$:

كذلك $tanQ = \frac{AB}{BC}$ $\qquad \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

بالقسمة على (AC) ينتج :

$$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 = 1$$

$$Sin^2Q + Cos^2Q = 1$$

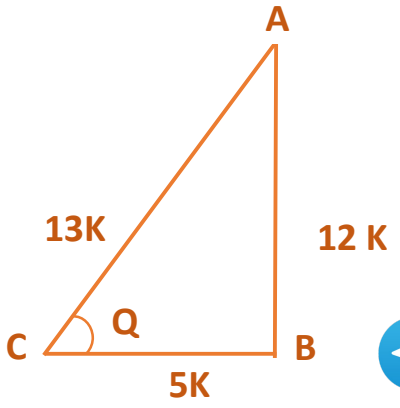
$$\therefore tan\ Q = \frac{sin\ Q}{cos\ Q}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال1/ إذا علمت ان $\cos C = \frac{5}{13}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في B.

جد : $\tan C\ , \sin A\ , \cos A$

الحل/



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية B

$\therefore \cos C = \frac{5}{13}\ , BC = 5k\ , AC = 13k$

حيث k ثابت .

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(13K)^2 = (AB)^2 + (5K)^2$$

$$(AB)^2 = (13K)^2 - (5K)^2$$

$$(AB)^2 = 169\ K^2 - 25\ K^2$$

$$(AB)^2 = 144\ K^2$$

$$\therefore AB = 12\ K$$

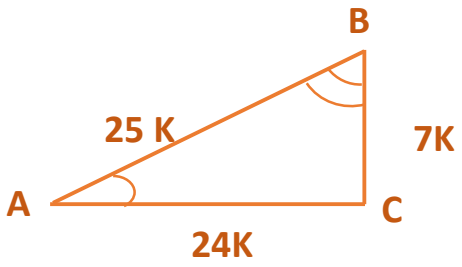
$$\sin A = \frac{5\ K}{13\ K} = \frac{5}{13}$$

$$\tan C = \frac{12\ K}{5\ K} = \frac{12}{5}$$

$$\cos A = \frac{12\ K}{13\ K} = \frac{12}{13}$$

مثال2/ إذا علمت ان $\tan A = \frac{7}{24}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في C. جد $\sin A$, $\cos B$ ؟

الحل/



نرسم المثلث ABC القائم الزاوية C

$$\tan A = \frac{7}{24}$$

$$BC = 7K \quad ; \quad AC = 24\,K$$

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (24K)^2 + (7K)^2$$

$$(AB)^2 = 576\,K^2 + 49\,K^2$$

$$(AB)^2 = 625\,K^2$$

$$\therefore AB = 25\,K$$

$$\sin A = \frac{7\,K}{25\,K} = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{7\,K}{25\,K} = \frac{7}{25}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

النسبة المثلثية لزاوية خاصة

اولاً : زاوية قياسها 45° :

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B. وأحدى زواياه قياسها (45°) فتكون الأخرى (45°) ايضاً.

$$\therefore AB = BC = L$$

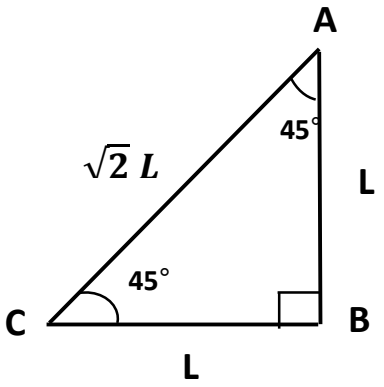
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}\,L$$



$$Sin\ 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Sin\ 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$Cos\ 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Cos\ 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

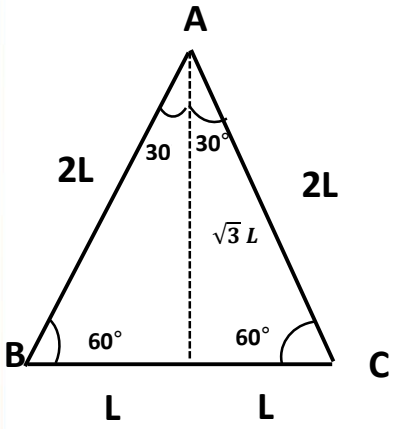
$$tan\ 45^\circ = \frac{L}{L} = 1$$

$$tan\ 45^\circ = \frac{L}{L} = 1$$

ثانياً : زاوية قياسها $30°$ ، $60°$:

نرسم مثلثا متساوي الاضلاع طول ضلعه = 2L فيكون قياسات زواياه متساوية وكل منها =60°

نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ لاحظ الشكل المجاور



$\therefore CD = DB = L$

وأن : $m\angle BAD = 30°$

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد ان : $AD = \sqrt{3}\,L$

$Sin\ 30° = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2}$ $\quad Sin\ 30° = \frac{1}{2}$

$Sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}\,L}{2\,L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad Sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}\,L}{2\,L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad Cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Cos\ 60° = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2}$ $\quad Cos\ 60° = \frac{1}{2}$

$tan\ 30° = \frac{L}{\sqrt{3}\,L} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}\,L}{L} = \sqrt{3}$ $\quad tan\ 60° = \sqrt{3}$

لاحظ ان : $Sin\ 30° = Cos\ 60° = \frac{1}{2}$

وكذلك : $Cos\ 30° = Sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

أي ان جيب أحدهما يساوي جيب تمام الاخرى و بالعكس

و بصورة عامة اذا كانت (Q) زاوية حادة فان قياس متممتها هو $(90° - Q)$ و يكون :

$$Sin\ (90° - Q) = Cos\ Q$$
$$Sin\ (90° - Q) = Sin\ Q$$

ملاحظة

استاذ رابع علمي
@stad4al

الزاويتان : 30°، 60° متتامتان لأن $60° + 30° = 90°$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الخلاصة

- $Sin\ Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$; $Cos\ Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$; $tan\ Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
- $Sin^2 Q + Cos^2 Q = 1$; $tan\ Q = \frac{sin\ Q}{cos\ Q}$
- $Sin\ (90° - Q) = Cos\ Q$; $Cos\ (90° - Q) = Sin\ Q$
- $Sin\ 30° = Cos\ 60° = \frac{1}{2}$; $Cos\ 30° = Sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $Sin\ 45° = Cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

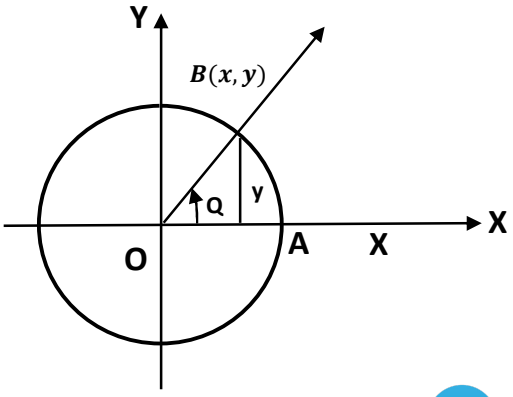
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

دائرة الوحدة و النقطة المثلثية

التعريف/

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها يساوي وحدة

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل $m\angle \overrightarrow{AOB} = Q$ زاوية موجهة في الوضع القياسي , B نقطة تقاطع الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ مع دائرة الوحدة.



نفرض ان $B(x, y)$

$$\cos Q = \frac{x}{1} \quad \rightarrow \quad \cos Q = x$$

$$\sin Q = \frac{y}{1} \quad \rightarrow \quad \sin Q = y$$

$$\therefore B(x, y) = (\cos Q \ , \sin Q)$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

ملاحظة

بأستخدام دائرة الوحدة و الأنعكاس على المستوي يمكن إيجاد النسب المثلثية الآتية :

$$Sin\ (180° - Q) = Sin\ Q$$

$$Cos\ (180° - Q) = -Cos\ Q$$

$$tan\ (180° - Q) = -tan\ Q$$

التعريف/

النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي :
هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة.

لاحظ ان نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ مما سبق يتضح ان لكل زاوية موجهة Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x, y) يكون $x = \cos Q$ ، $y = \sin Q$

مثال7/ جد $\sin Q , \cos Q , \tan Q$ إذا علمت ان $Q = 0° , 90° , 180°$ ؟

الحل/

نعلم ان $0° , 90° , 180°$ يقع الضلع النهائي لكل منها على احد المحورين الاحداثيين. وكما في الشكل الاتي ، فأن :

$(\cos 0° , \sin 0°) = (1, 0)$

$\Rightarrow \cos 0° = 1 \quad ; \sin 0° = 0$

$\therefore \tan 0° = \dfrac{\sin 0°}{\cos 0°} = \dfrac{0}{1}$

$\Rightarrow \tan 0° = 0$

$(\cos 90° , \sin 90°) = (0, 1)$

$\Rightarrow \cos 90° = 0 \quad ; \sin 90° = 1$

$\therefore \tan 90° = \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{1}{0}$

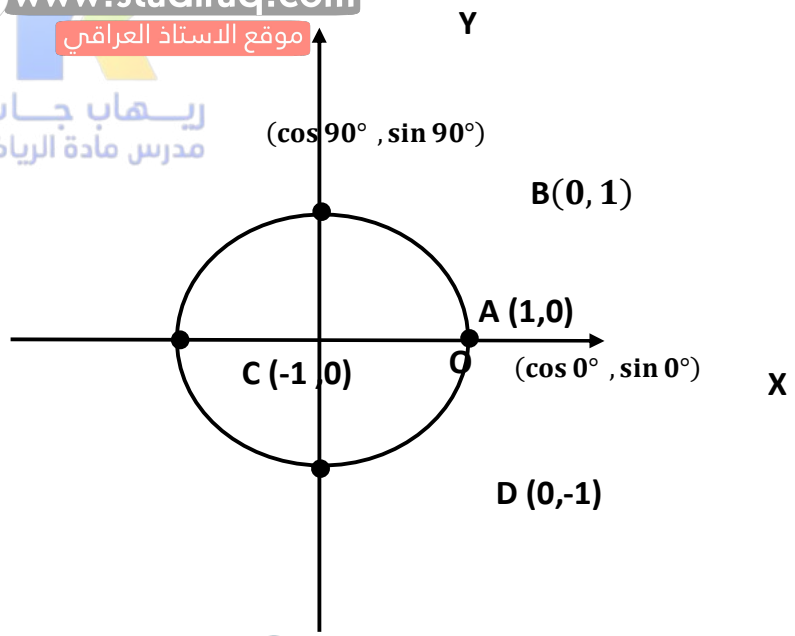
$\Rightarrow \tan 90° =$ غير معرف

$(\cos 180° , \sin 180°) = (-1, 0)$

$\Rightarrow \cos 180° = -1 \quad ; \sin 180° = 0$

$\therefore \tan 180° = \dfrac{\sin 180°}{\cos 180°} = \dfrac{0}{-1}$

$\Rightarrow \tan 180° = 0$



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al

ملاحظة

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

النسب المثلثية للزاوية $(180° + \theta)$

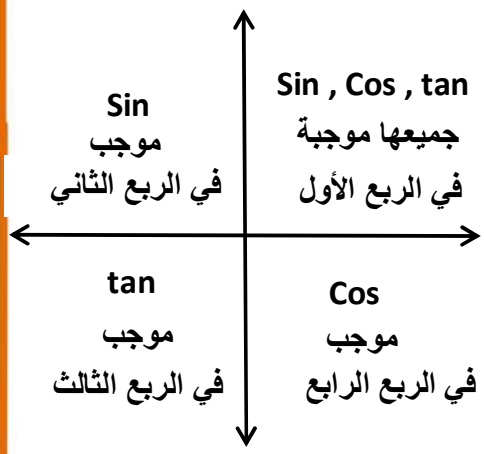
في الربع الثالث :

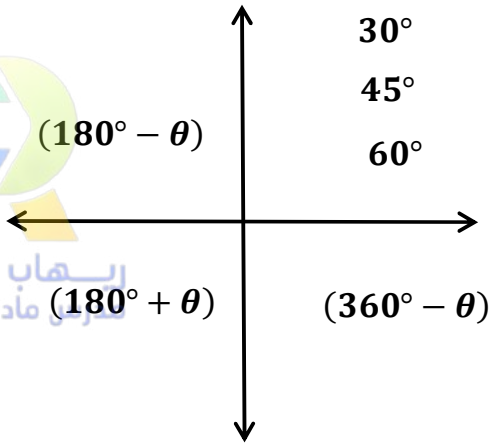
$$Sin\ (180° + \theta) = -Sin\ \theta$$
$$Cos\ (180° + \theta) = -Cos\ \theta$$
$$tan\ (180° + \theta) = tan\ \theta$$

النسب المثلثية للزاوية $(360° - \theta)$

في الربع الرابع :

$$Sin\ (360° - \theta) = -Sin\ \theta$$
$$Cos\ (360° - \theta) = Cos\ \theta$$
$$tan\ (360° - \theta) = -tan\ \theta$$





ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

استاذ رابع علمي
@stad4al

التطبيقات الدائرية

التعريف/

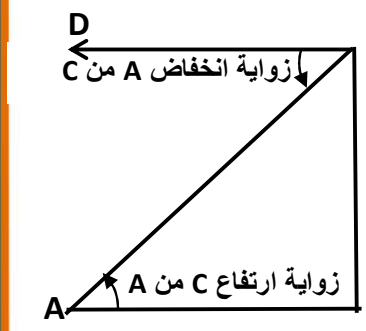
زاوية الأرتفاع : هي الزاوية المحصورة بين المستوي الأفقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة اعلى من هذا المستوي .

زاوية الانخفاض : هي الزاوية المحصورة بين المستوي الأفقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة تحت مستوى النظر .

زاويتا الأرتفاع و الأنخفاض :

نتمكن من حساب الأرتفاعات و الأبعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها . فأذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C تقع فوق أفق A فأن الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C وبين أفق A تدعى (زاوية ارتفاع C بالنسبة الى A).

مثلاً الزاوية $\angle CAB$ في الشكل المجاور.



أما اذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت افق C ، فأن الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى النقطة A وبين افق C تدعى (زاوية انخفاض A بالنسبة الى C).

مثلاً الزاوية $\angle ACD$ في الشكل المجاور.

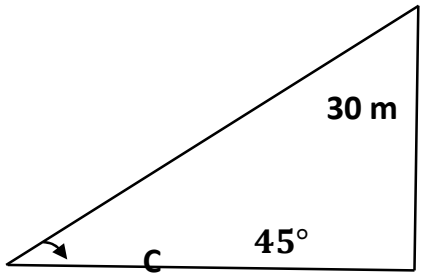
مثال8/ طائرة ورقية خيطها 30 m فأذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض (مع الأفق) هي $45°$. جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض ؟

استاذ رابع علمي
@stad4al

الحل/

نفرض ان الأرتفاع = L من وحدات الطول في المثلث ABC قائم الزاوية في B .

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



$$Sin\ 45° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30}$$

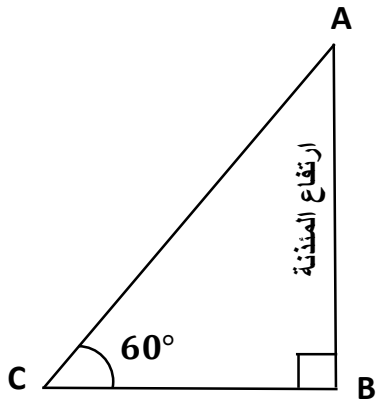
$$L = \frac{30}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$$

$$L = 21.21\ m$$

---

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال9/ وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة على الارض تبعد 8m عن قاعدتها تساوي $60°$. فما ارتفاع المئذنة؟



استاذ رابع علمي
@stad4al

الحل/

ΔABC قائم الزاوية في B :

$$\tan 60° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{8}$$

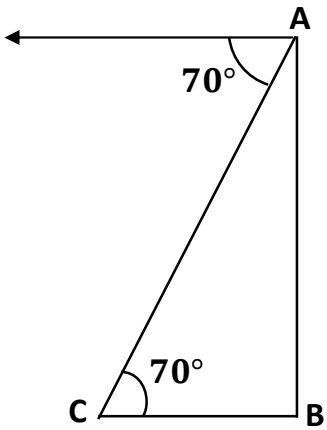
$$AB = 8\sqrt{3}\ m$$ ارتفاع المئذنة

مثال10/ جبل ارتفاعه 2350 m وجد راصد من قمته ان قياس زاوية انخفاض نقطة على الأرض $70°$. فماهي المسافة بين النقطة و الراصد ؟

علماً ان $Sin\ 70° = 0.9396$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الحل/



قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

ΔABC قائم الزاوية في B :

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$Sin\ 70° = \frac{AB}{AC}$$

$$\rightarrow 0.9396 = \frac{2350}{AC}$$

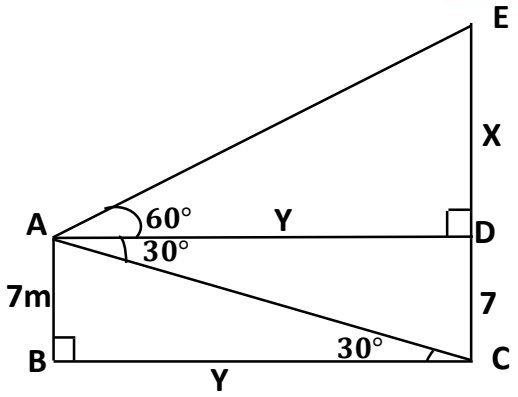
$$AC = \frac{2350}{0.9396} \cong 2500m$$

مثال11/ من سطح منزل ارتفاعه 7 متر وجد راصد ان زاوية ارتفاع اعلى عمارة امامه $60°$ و زاوية انخفاض قاعدتها $30°$. جد البعد بين الراصد و العمارة وارتفاع العمارة ؟

الحل/

$\angle DAC = \angle ACB$ [زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع]

استاذ رابع علمي
@stad4al



في Δ ABC قائم الزاوية في B :

$$\tan 30° = \frac{7}{Y}$$

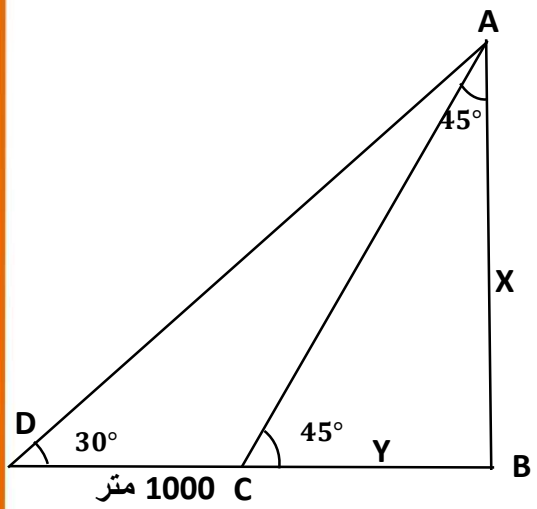
$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{Y}$$

$$\rightarrow \quad Y = 7\sqrt{3}$$ البعد بين الراصد و العمارة.

مثال12/ شاهد راصد ان زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي $30°$ ولما سار الراصد في مستوي افقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد ان زاوية الارتفاع هي $45°$. جد ارتفاع المنطاد الى أقرب متر ؟

الحل/

Δ ABC قائم الزاوية في B :



$$\tan 45° = \frac{x}{y}$$

$$\rightarrow 1 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore x = y \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

$$\tan 30° = \frac{x}{y + 1000} \qquad \rightarrow \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{y + 1000}$$

$$\sqrt{3}\, y = y + 1000$$

$$1.7\, y - y = 1000$$

$$y = \frac{1000}{0.7} = 1428.6$$

$$x = 1429\ m$$ ارتفاع المنطاد

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

القطاع الدائري Circular Sector

التعريف/

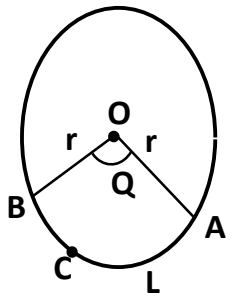
القطاع الدائري : هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس .

في الشكل التالي تسمى $\angle AOB$ المركزية بزاوية القطاع الأصغر وقياسها أقل من $180°$.

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2}$ طول القوس $r * \overset{\frown}{AB}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} L\, r \qquad \leftarrow (1)}$$



وإذا فرضنا ان قياس الزاوية المركزية بالقطاع الدائري = Q

فأن :

$$L = Q\, r \qquad \rightarrow \qquad \frac{L}{r} = Q$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

وبالتعويض في (1) :

$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} Q\, r^2 \qquad \leftarrow (2)}$$

ملاحظة

محيط القطاع الدائري $= r + r + L = 2r + L$

حيث ان :

L : طول قوس القطاع الدائري.

r: طول نصف قطر دائرة القطاع.

استاذ رابع علمي
@stad4al

نتيجة (1)

إذا فرضنا سطح دائرة قطاعاً دائرياً زاويته = 2π

∴ مساحة الدائرة = $\frac{1}{2}(2\pi) * r^2 = \pi r^2$

استاذ رابع علمي
@stad4al

نتيجة (2)

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}} = \frac{\frac{1}{2} Q\, r^2}{\pi\, r^2} = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi}$$

حيث ان :

D° : قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الستيني.

$$\therefore \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{D^\circ}{360^\circ}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ} * \text{مساحة سطح دائرة القطاع}$$

مثال13/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي 60° و طول نصف قطر دائرته 8cm؟

الحل/

- مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} L\, r$

$$\rightarrow \frac{1}{2} * 6 * r = 15 \quad \rightarrow r = 5$$

- محيط القطاع الدائري $= 2r + L$

محيط القطاع الدائري $= 2 * 5 + 6 = 16\ cm$

- زاوية نصف قطرية $|Q| = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{6}{5} = 1.2$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\rightarrow \frac{3.14}{180^\circ} = \frac{1.2}{D^\circ}$$

$$\rightarrow D^\circ = \frac{180^\circ * 1.2}{3.14}$$

$$\rightarrow D^\circ = 68.6898^\circ$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

القطعة الدائرية Circular Sector

التعريف/

القطعة الدائرية : هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها من الدائرة و وتر مار بنهايتي ذلك القوس .

في الشكل التالي تسمى $\angle AOB$ المركزية بزاوية القطعة الصغرى وقياسها أصغر من 180°.

لأيجاد مساحة القطعة الدائرية :

ريهاب جاسم
مدرسة الرياضيات

نفرض ان Q القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى.

∴ مساحة القطعة ACB = مساحة القطاع (OACB) – مساحة Δ OAB

∴ مساحة (القطاع الدائري $\overset{\frown}{(OACB)}$) $= \frac{1}{2} Q r^2$

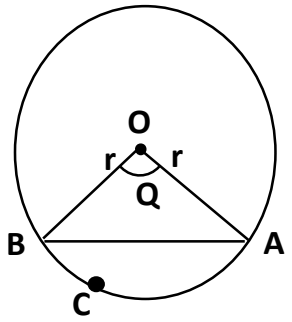
مساحة Δ OAB $= \frac{1}{2} * OA * OB * \sin Q$

∴ Δ OAB $= \frac{1}{2} * r * r \sin Q$

∴ مساحة القطعة AC $= \frac{1}{2} Q r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin Q$

∴ مساحة القطعة ACB $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

استاذ رابع علمي
@stad4al



حيث ان :

Q : قياس زاوية القطعة بالتقدير الدائري.

r : نصف قطر دائرتها.

مثال15/ جد مساحة قطعة الدائرية طول نصف قطر دائرتها 12 cm وقياس زاويتها يساوي 30° ؟

الحل/

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{D°} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{30°} \quad \rightarrow \quad Q = 0.5236$$

∴ مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2}\, r^2\, (Q - \sin 30°)$

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} * 144 * (0.5236 - 0.5)$

مساحة القطعة الدائرية $= 1.7\ cm^2$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

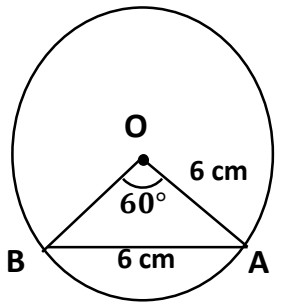
مثال16 / O مركز دائرة نصف قطرها 6 cm ، رسم فيها وتر طوله 6 cm ، جد لأقرب cm^2 مساحة القطعة الدائرية الصغرى ؟

الحل/

Δ AOB متساوي الأضلاع ، $m\angle AOB = 60°$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{D°} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180°} = \frac{Q}{60°} \quad \rightarrow \quad Q = 1.047$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



∴ مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2}\, r^2\, (Q - \sin 60°)$

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} * 36 * (1.047 - 0.865)$

مساحة القطعة الدائرية $= 3.276\ cm^2$

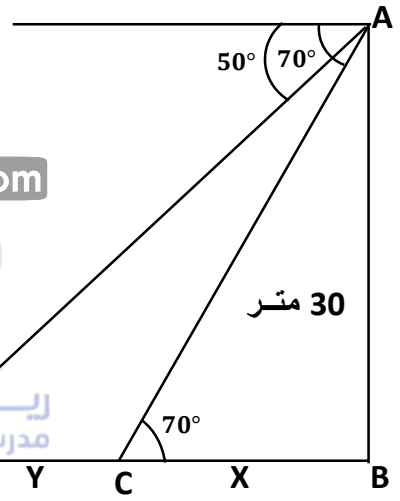
استاذ رابع علمي
@stad4al

حلول تمارين (2-4)

س1/ وقف رجل في أعلى برج و أبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على أستقامة واحدة ، فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الأولى (70°) و زاوية أنخفاض قاعدة الشجرة الثانية (50°) . جد المسافة بين الشجرتين مع العلم ان ارتفاع البرج (30m)؟

علماً $\tan 50^\circ = 1.2$ ، $\tan 70^\circ = 2.8$

الحل/



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
ريهاب جاسم
مدرسة الرياضيات

$$\tan 70^\circ = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{2.8} = 10.7\ m$$

$$\tan 50^\circ = \frac{30}{x+y}$$

$$1.2 = \frac{30}{10.7+y}$$

$$30 = 1.2\,(10.7+y)$$

$$30 = 12.84 + 1.2\,y$$

$$1.2\,y = 30 - 12.84$$

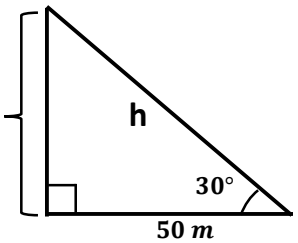
$$1.2\,y = 17.16$$

$$y = \frac{17.16}{1.2} = 14.3\ m \longrightarrow$$ البعد بين الشجرتين

استاذ رابع علمي
@stad4al

س2/ من نقطة تبعد عن قاعدة البرج (50m) وجد ان زاوية أرتفاع قمتها (30°) فما أرتفاع البرج؟

الحل/



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{50} \quad \rightarrow \quad h = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \quad h = 28.86\ m$$

أرتفاع البرج

س3/ جد مساحة قطاع دائري طول قوسه (8 cm) و طول نصف قطر دائرته (3.2cm) ؟

الحل/

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2}\ L\ r$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} * 8 * 3.2$

مساحة القطاع الدائري $= 12.8\ cm^2$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س4/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 100° و طول نصف قطر دائرته (10cm) ؟

الحل/

مساحة القطاع الدائري $= \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ} *$ مساحة سطح دائرة القطاع

مساحة القطاع الدائري $= \frac{100^\circ}{360^\circ} * \pi\ r^2$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{100^\circ}{360^\circ} * 3.14 * 10^2$

مساحة القطاع الدائري $= 87.3\ cm^2$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س5/ قطاع دائري مساحته ($37.68\ cm^2$) و طول نصف قطر دائرته (6cm) . جد طول قوسه ؟

الحل/

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} L\, r$

$\rightarrow \frac{1}{2} * L * 6 = 37.68$

$\rightarrow 3\, L = 37.68$

$\rightarrow L = 12.56\ cm$ ⟶ طول القوس

استاذ رابع علمي
@stad4al

س6/ نصف محيط دائرة هو (10 cm) جد مساحة قطاع فيها قياس زاويته (45°)؟

الحل/

محيط الدائرة $= 2 * r * \pi$

$2 * r * \pi = 2 * 10$

$\rightarrow r = \frac{2 * 10}{2\,\pi} = \frac{10}{\pi}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مساحة القطاع الدائري $= \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360°} *$ مساحة سطح دائرة القطاع

مساحة القطاع الدائري $= \frac{45°}{360°} * \pi\, r^2$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{45°}{360°} * \pi * \left(\frac{10}{\pi}\right)^2$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{45°}{360°} * \pi * \frac{100^2}{\pi^2}$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{100 * 45°}{\pi * 360°}$

مساحة القطاع الدائري $= 3.98\ cm^2$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س7/ جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها (60°) و طول نصف قطر دائرتها (8 cm)؟

الحل/

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} * (8)^2 * \left(\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ\right)$

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} * 64 * \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

مساحة القطعة الدائرية $= 32 * \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right)$

مساحة القطعة الدائرية $= 5.81\ cm^2$

استاذ رابع علمي
@stad4al

استخدام الحاسبة في ايجاد قيم التطبيقات الدائرية

لقد علمنا ان للزاوية نظامين للقياس هما : القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ اعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له DEG اختصاراً لكلمة (DEGREE) درجة .

اما القياس الدائري فيرمز له RAD اختصاراً لكلمة (RADLAN) نصف قطري .

وهذان الرمزان يظهران في أعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح DRG →

فالضغطة الاولى تظهر DEG والضغطة الثانية تظهر RAD وبالعكس .

وللنسب المثلثية مفاتيح أيضاً وسنقتصر على نسبة الجيب ، نسبة الجيب التمام ونسبة الظل .

فالمفتاح sin يرمز الى الجيب (sine) .

والمفتاح cos يرمز الى الجيب تمام (cosine) .

والمفتاح tan يرمز الى الظل (tangent) .

طريقة استخدام الحاسبة

11) تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) او الدائري (RAD) بالضغط على (DRG) .

12) تدخل الزاوية حسب النظام .

13) تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة .

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

الامثلة الآتية توضح ذلك :

مثال17/ جد

(1) $\sin 30°$ (2) $\cos 120°$

(3) $\tan 350°$

الحل/

1. ¤ النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG اعلى الشاشة .
   ¤ اكتب 30
   ¤ اضغط على (sin) فتحصل على الناتج = 0.5

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

2. ¤ النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG
   ¤ اكتب 120
   ¤ اضغط على (cos) فتحصل على الناتج = −0.5

3. ¤ النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG
   ¤ اكتب 350 ثم اضغط على (tan) فيكون الناتج ≅ −0.1763
   ¤ فيكون:

$$(\tan(-Q) = -\tan Q) \leftarrow \tan(-350°) \cong -0.1763$$

ملاحظة

استاذ رابع علمي
@stad4al

$$\sin(-Q) = -\sin Q$$
$$\cos(-Q) = \cos Q$$
$$\tan(-Q) = -\tan Q$$

مثال18/ جد ناتج

(1) $\sin\frac{5\pi}{4}$ (2) $\cos(-3\pi)$

(3) $\tan\frac{7\pi}{5}$

الحل/

¤ النظام دائري : نضغط لتظهر RAD

¤ نضغط على المفتاح الموجود عادة على اللوحة 2ndf ويكون بلون مغاير للاسود (اصفر او احمر مثلاً ...) INV

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نضغط على مفتاح : π ← العمليات الحسابية ← النسبة ← ناتج

1. $\sin\frac{5\pi}{4}$

¤ اضغط لتظهر RAD

¤ نضغط 2ndf ثم π ← 3.141592654 أضرب ∗5 = 15.70796327

÷ 4 = 3.926990817 ثم sin = - 0.707106781

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

2. $cos(-3\pi)$

من المعلوم ان $cos\ (-Q) = cos\ Q$ (نحذف الاشارة السالبة) .

¤ اضغط لتظهر RAD

¤ نضغط [2ndf] ثم [π] ← 3.141592654 أضرب ∗3 = 9.424777961

ثم [Cos] = 1 -

استاذ رابع علمي
@stad4al

3. $tan\frac{7\pi}{5}$

¤ اضغط لتظهر RAD

¤ نضغط [2ndf] ثم [π] ← 3.141592654 أضرب ∗7 = 21.9114858

[÷ 5] = 4.398229715 ثم [tan] = 3.07763537

تمرين/ جد ما يأتي باستخدام الحاسبة :

(1) $sin\frac{\pi}{6}$ (2) $cos(-400°)$ (3) $tan(-15°)$

(4) $tan(-36°)$ (5) $cos\frac{2\pi}{3}$ (6) $tan\frac{8\pi}{5}$

الحل/

(1) 0.5 (2) 0.766044443 (3) – 0.267949192

(4) – 0.588 (5) – 0.5 (6) – 3.077683537

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

حل المثلث القائم الزاوية Solution Of Right Angle Triangle

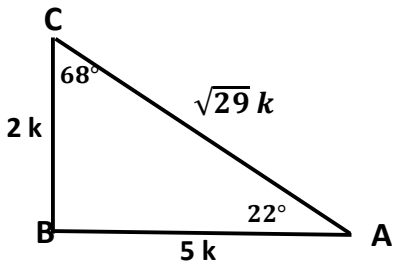
يشتمل كل مثلث على ستة عناصر (ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا) ويقصد بحل المثلث ايجاد قيم عناصره المجهولة .

مثال19/ اذا كان $tan\ 22° = 0.4$ اوجد : (1) $sin\ 22°\ ,\ cos\ 22°$

(2) $cos\ 68°\ ,\ sin\ 68$

استاذ رابع علمي
@stad4al

الحل/



$$tan\ 22° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ المقابل $= 2k$

$\therefore$ المجاور $= 5k$

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ ← مبرهنة فيثاغورس

$4k^2 + 25k^2 = (AC)^2$

$AC = \sqrt{29}k$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(1)

$$sin\ 22° = \frac{BC}{AC} = \frac{2k}{\sqrt{29}k} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$cos\ 22° = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{29}k} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

(2)

$$sin\ 68° = sin(90° - 22°) = cos22° = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$cos\ 68° = cos(90° - 22°) = sin22° = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

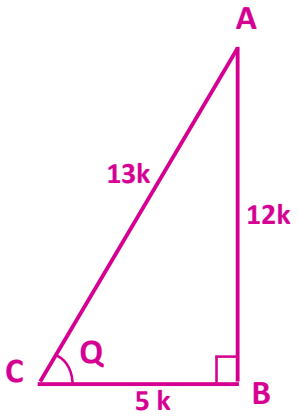
مثال20/ اذا علمت أن $\cos C = \frac{5}{13}$ في ΔABC القائم الزاوية في B جـد

$\cos A \ , \ \cos C \ , \ \sin A$

الحل/

استاذ رابع علمي
@stad4al

نرسم ABC القائم الزاوية في B:



$$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5k}{13k} = \frac{2}{5}$$

$\because (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (فيثاغورس)

$\therefore 169k^2 = (AB)^2 + 25k^2$

$\therefore (AB)^2 = 69k^2 - 25k^2$

$\therefore (AB)^2 = 144k^2 \rightarrow AB = 12k$

$$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مثال21/ ABC قائم الزاوية في A فيه $AB = 7cm \ , \ AC = 24cm$ جـد : $\sin C \ ,$

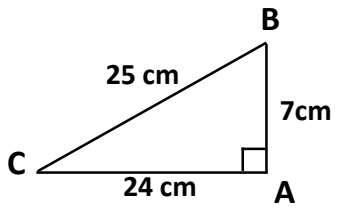
$\sin B \ , \ \tan C \ , \ \cos B$

الحل/

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ (فيثاغورس)

$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$

$\therefore BC = 25cm$



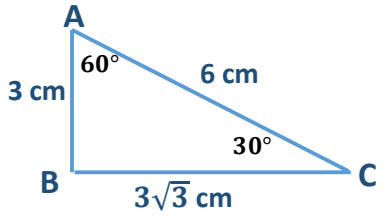
$\therefore \sin C = \frac{7}{25} \quad , \quad \sin B = \frac{24}{25}$

$\tan C = \frac{7}{24} \quad , \quad \cos A = \frac{7}{25}$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

مثال22/ حل المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا علمت أن :

$$AC = 6cm \quad , \quad AB = 3cm$$



الحل/

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$36 = 9 + (BC)^2$$

$$BC = 3\sqrt{3}$$

أستكملنا ايجاد اطوال الاضلاع ،

والآن سنجد زوايا المثلث الباقية

$$\tan C = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 30°$$

$$m < A = 90° - 30° = 60°$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي
استاذ رابع علمي
@stad4al

حلول تمارين (3-4)

س1/ ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $\sin C = \frac{8}{17}$ جـد : $\tan C$, $\cos C$, $\sin A$

الحل/

$$\sin C = \frac{8}{17} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

نفرض ان المقابل $= 8k$ ، نفرض ان الوتر $= 17k$

حسب نظرية فيثاغورس :

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2$$

$$(BC)^2 = (17k)^2 - (8k)^2$$

$$(BC)^2 = 289k^2 - 64k^2$$

$$(BC)^2 = 225k^2$$

$$BC = 15k$$

$$\cos C = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$

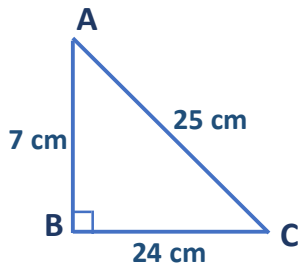
$$\tan C = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}$$

$$\sin A = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

س2/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $AB = 25cm$, $BC = 24cm$ جـد قيمة $sin^2B + cos^2B$ وبأستخدام المعلومات المعطاة ؟

الحل/



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = 625 - 576$$

$$(AC)^2 = 49$$

$$AC = 7cm$$

$$sin\ B = \frac{7}{25}$$

$$cos\ B = \frac{24}{25}$$

$$sin^2B + cos^2B = \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$= \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1$$

$$sin^2B + cos^2B = 1$$

مدرس مادة الرياضيات
استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س3/ اذا كان $\cos Q = \frac{4}{5}$ فأوجد : $\sin Q \ , \ \tan Q$

الحل/

$\because \cos Q > 0$

$\therefore$ Q تقع في الربع الاول او الربع الرابع

$$\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$$

$$\sin^2 Q + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 Q + \frac{16}{25} = 1$$

$$\sin^2 Q = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 Q = \frac{25-16}{25} \rightarrow \sin^2 Q = \frac{9}{25} \rightarrow \sin Q = \pm\frac{3}{5}$$

لان Q تقع في الربع الاول $\sin Q = \frac{3}{5}$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

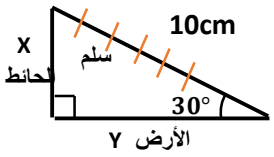
لان Q تقع في الربع الرابع $\sin Q = \frac{-3}{5}$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{-3}{4}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س4/ سلم طوله $(10cm)$ مرتكزطرفه الاسفل على ارض أفقية وطرفه الآخر على حائط شاقولي فإذا كانت الزاوية بين السلم والارض $(30°)$ فما بعد طرفه الاعلى عن الارض وطرفه الاسفل عن الحائط ؟ $Ans\ (\sqrt{3} = 1.73)$.

الحل/



$$\sin 30° = \frac{x}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$$

$$2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2}$$

$x = 5m$ بعد الطرف الاعلى عن الارض

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

$$\cos 30° = \frac{y}{10}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10}$$

$$2y = 10\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{10\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = 5\sqrt{3}m$$

$y = 5 \times 1.73 \rightarrow y = 8.63m$ بعد الطرف الاسفل عن الحائط

ريهاب جاسم
استاذ رابع علمي
@stad4al

س5/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $(M\angle CAB = 60°)$ $\overline{AB} = 20cm$ جد مساحة منطقته ؟

الحل/

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

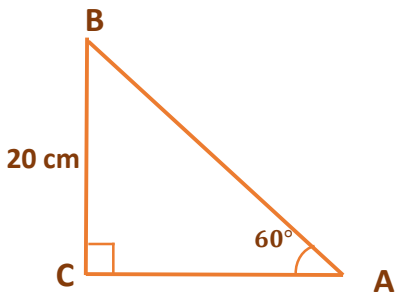
$$\cos 60° = \frac{AC}{20} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \rightarrow AC = 10cm$$

$$\sin 60° = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{20} \rightarrow BC = 10\sqrt{3}cm$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times AC \times BC$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3}$

مساحة المثلث $= 50\sqrt{3}cm^2$



www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

س6/ جد قيمة :

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(A)

$$\frac{3}{4}\tan^2 30° + 2\sin 60° + 3\tan 45° + \cos^2 30° - \tan 60°$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (3 \times 1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{1} = 1 + 3 = 4$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

(B)

$\cos^2 45° \ \sin 60° \ \tan 60° \ \cos^2 30°$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{9}{16}$$

استاذ رابع علمي
@stad4al

(C)

$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س7/ شبه منحرف $ABCD$ فيه $AD = BC$ (متساوي الساقين)

$DC = 20cm$, $AD = 6cm$, $AB = 14cm$, جد $m\angle CDA$ ؟

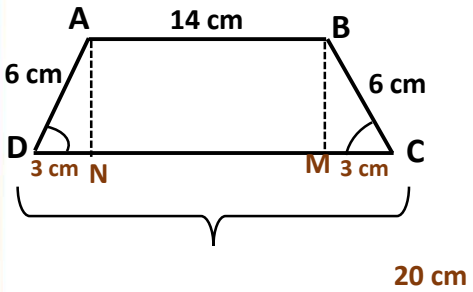
الحل/

نرسم من B مستقيم $\perp DC$ في نقطة M

نرسم من A مستقيمي $\perp DC$ في نقطة N

في المثلثان BCM , AND $DN = MC = 3cm$

في المثلث ADN القائم الزاوية في N



$$\cos\angle D = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos D = \frac{3cm}{6cm} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m\angle CDA = 60°$$

www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي

أسئلة حلول الفصل الرابع

س1/ جد محيط المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها $5\sqrt{3}cm$ ؟

س2/ رجل طوله $1.8m$ وقف امام مصباح وعلى بعد $22m$ منه وجد ان طول ظله على الأرض $18m$ فما أرتفاع المصباح عن سطح الارض ؟

س3/ سلم اسند على جدار فصنع مع الارض زاوية قياسها $30°$ ووصل الى نقطة ترتفع $3m$ عن سطح الارض . ثم ادير السلم واسند على جدار اخر في الجهة الثانية فصنع مع الارض زاوية $45°$ فما عرض الشارع ؟

س4/ وجد رجل على ظهر زورق زاوية ارتفاع قمة عمود فوق سطح المنزل يساوي $30°$ وبعد ان تحرك الزورق مسافة $60m$ في اتجاه العمود تماماً وجد أن زاويتي ارتفاع قمة العمود وقاعدته $60°$ و$30°$ على التوالي . احسب ارتفاع العمود والمنزل ؟

س5/ سارية علم مثبتة فوق عمارة طولها $\frac{1}{9}$ ارتفاع العمارة وجد ان رجل من نقطة على الارض ان زاوية ارتفاع قاعدة السارية $37°$ وبعد ان تقدم نحو العمارة مسافة $30m$ وجد أن زاوية ارتفاع قمة السارية $53°$. فما ارتفاع العمارة ؟

ملاحظة / $tan\ 53° = \frac{4}{3}$, $tan\ 37° = \frac{3}{4}$

استاذ رابع علمي
@stad4al
www.stadiraq.com
موقع الاستاذ العراقي