В. А. КРЕЧМАР

Задачник по АЛГЕБРЕ

В. А. КРЕЧМАР

ЗАДАЧНИК ПО АЛГЕБРЕ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

512
К 80
УДК 512. 0 (075.4)

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга является сборником задач повышенного типа по элементарной алгебре и тригонометрии.

Ее цель — дать материал для самостоятельных упражнений учащихся средней школы, желающих углубить свое знание математики. Ко всем задачам (за единичными исключениями) даны решения.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В течение последних двух лет Ленинградский государственный университет проводил математические олимпиады.

Автор принимал в них участие, предлагая задачи по алгебре и тригонометрии. Так родилась эта книга.

Ее цель — дать возможность попробовать свои силы в решении более трудных алгебраических задач лицам, познания которых в этой области не выходят существенно за пределы элементарных. Поднятие общей культуры математического мышления в пределах элементарной математики (в частности, повышение квалификации преподавателей математики средней школы) — вот задача, разрешению которой автор хотел бы оказать помощь своей книгой.

Предлагаемый сборник содержит задачи как по алгебре, так и по тригонометрии (последние исключительно алгебраического характера).

Задачи по возможности систематизированы и снабжены решениями. Внутри каждого отдела задачи во многих местах расположены так, что ознакомление с методом решения одной из основных задач дает возможность получить решение ряда других, непосредственно следующих за ней.

В. Кречмар

Настоящее, пятое издание выходит без существенных изменений Устранены некоторые погрешности, имевшиеся в предыдущих изданиях.

ЗАДАЧИ

§ 1. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Тождественное преобразование целых рациональных выражений — вот основное содержание задач настоящего параграфа. Сложение, умножение, деление и вычитание одночленов и многочленов, а равным образом возведение их в степень и разложение на множители — вот те элементарные сведения, которыми нам приходится пользоваться. Что касается тригонометрических задач, то в этом параграфе, как и в дальнейшем, мы предполагаем известными определение тригонометрических функций, основные соотношения между этими функциями, все свойства, связанные с их периодичностью, и все следствия теоремы сложения.

Обратим внимание только на те формулы, которые дают возможность преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму или разность этих функций. Именно:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right],$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right],$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right].$$

1. Доказать тождество:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2.$$

2. Показать, что

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) = (ax-by-cz-dt)^2 +$$
$$+ (bx+ay-dz+ct)^2 + (cx+dy+az-bt)^2 + (dx-cy+bz+at)^2.$$

3. Доказать, что из равенств:

$$\begin{aligned} ax-by-cz-dt&=0,\\ bx+ay-dz+ct&=0,\\ cx+dy+az-bt&=0,\\ dx-cy+bz+at&=0 \end{aligned}$$

следует либо $a=b=c=d=0$, либо $x=y=z=t=0$.

4. Показать, что имеет место следующее тождество:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=$$
$$=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2.$$

5. Показать, что предыдущее тождество может быть обобщено следующим образом:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots$$
$$\ldots+a_nb_n)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2.$$

6. Пусть

$$n(a^2+b^2+c^2+\ldots+l^2)=(a+b+c+\ldots+l)^2,$$

где n есть число величин a, b, c, $\ldots$, l.

Доказать, что тогда

$$a=b=c=\ldots=l.$$

7. Доказать, что из равенств

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1,$$
$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$$

следует, что

$$-1 \leqq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqq +1.$$

8. Доказать, что из равенства

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=$$
$$=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$$

следует:

$$x=y=z.$$

9. Доказать следующие тождества:

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

$$(6a^2-4ab+4b^2)^3=(3a^2+5ab-5b^2)^3+(4a^2-4ab+6b^2)^3+$$
$$+(5a^2-5ab-3b^2)^3.$$

10. Показать, что

$$(p^2-q^2)^4+(2pq+q^2)^4+(2pq+p^2)^4=2(p^2+pq+q^2)^4.$$

11. Доказать тождество:

$$X^2+XY+Y^2=Z^3,$$

если

$$X=q^3+3pq^2-p^3,$$
$$Y=-3pq(p+q),$$
$$Z=p^2+pq+q^2.$$

12. Доказать, что

$$(3a+3b)^k+(2a+4b)^k+a^k+b^k=(3a+4b)^k+(a+3b)^k+(2a+b)^k$$

при $k=1,\ 2,\ 3$.

13. 1° Показать, что если $x+y+z=0$, то

$$(ix-ky)^n+(iy-kz)^n+(iz-kx)^n=$$
$$=(iy-kx)^n+(iz-ky)^n+(ix-kz)^n$$

при $n=0,\ 1,\ 2,\ 4$.

2° Доказать, что

$$x^n+(x+3)^n+(x+5)^n+(x+6)^n+(x+9)^n+(x+10)^n+$$
$$+(x+12)^n+(x+15)^n=(x+1)^n+(x+2)^n+(x+4)^n+$$
$$+(x+7)^n+(x+8)^n+(x+11)^n+(x+13)^n+(x+14)^n$$

при $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

14. Доказать тождества:

1° $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+$
$$+(a+d-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

2° $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+dc+ad)^2=$
$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(ab-ad+bc+dc)^2.$$

3° $(a^2-c^2+2bd)^2+(d^2-b^2+2ac)^2=$
$$=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+dc+cd)^2.$$

15. Доказать тождество:

$$(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+(c+a-b)^4+(a+b-c)^4=$$
$$=4(a^4+b^4+c^4)+24(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2).$$

16. Пусть $s=a+b+c$.

Доказать:

$$s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b)=$$
$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$$

17. Доказать, что если $a+b+c=2s$, то

$$a(s-a)^2+b(s-b)^2+c(s-c)^2+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc.$$

18. Положим

$$2s=a+b+c;\quad 2\sigma^2=a^2+b^2+c^2.$$

Показать:

$$(\sigma^2-a^2)(\sigma^2-b^2)+(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)+(\sigma^2-c^2)(\sigma^2-a^2)=$$
$$=4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

19. Разложить на множители:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

20. Разложить на множители:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

21. Упростить выражение:

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3.$$

22. Разложить на множители выражение

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3.$$

23. Показать, что если $a+b+c=0$, то

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

24. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4).$$

25. Показать, что

$$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4].$$

26. Пусть $a+b+c=0$; доказать:

1° $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$.

2° $5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=6(a^5+b^5+c^5)$.

3° $10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$.

27. Даны $2n$ чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Положим

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=s_n.$$

Доказать:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=$$
$$=(a_1-a_2)s_1+(a_2-a_3)s_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)s_{n-1}+a_ns_n.$$

28. Положим

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}s.$$

Доказать:

$$(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\ldots+(s-a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

29. Пусть дан трехчлен: $Ax^2+2Bxy+Cy^2$.

Положим:

$$x=\alpha x'+\beta y',$$
$$y=\gamma x'+\delta y'.$$

Тогда данный трехчлен перейдет в следующий:

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2.$$

Доказать, что

$$B'^2-A'C'=(B^2-AC)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.$$

30. Пусть

$$p_i+q_i=1 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$p=\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}, \quad q=\frac{q_1+q_2+\ldots+q_n}{n}.$$

Доказать:

$$p_1q_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n=npq-(p_1-p)^2-(p_2-p)^2-\ldots-(p_n-p)^2.$$

31. Доказать:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\\ =\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

32. Пусть

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Показать:

1° $s_n=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)$.

2° $ns_n=n+\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\ldots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)$.

33. Доказать тождество:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

34. Доказать:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2\alpha-1}\right)\left(1+\frac{1}{3\alpha-1}\right)\ldots\\ \ldots\left(1+\frac{1}{(2n-1)\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n\alpha-1}\right)=\\ =\frac{(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha-1}\cdot\frac{(n+2)\alpha}{(n+2)\alpha-1}\cdots\frac{(n+n)\alpha}{(n+n)\alpha-1}.$$

35. Пусть символом $[\alpha]$ обозначается целое число, ближайшее к α и меньшее или равное ему. Таким образом, $[\alpha]\leqq\alpha<[\alpha]+1$. Доказать, что имеет место тождество:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

36. Доказать, что

$$\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b.$$

37. Показать, что

$$(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2=4\cos^2\frac{a-b}{2},$$

$$(\cos a-\cos b)^2+(\sin a-\sin b)^2=4\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

38. Дано:

$$(1+\sin a)(1+\sin b)(1+\sin c)=\cos a\cos b\cos c.$$

Упростить:

$$(1-\sin a)(1-\sin b)(1-\sin c).$$

39. Дано:

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma).$$

Показать, что одно из значений каждой части этого равенства будет:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

40. Показать, что

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+$$
$$+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha)=0.$$

41. Доказать:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d)+$$
$$+\sin(c+b)\sin(c-b)\sin(d+a)\sin(d-a)+$$
$$+\sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c)=0.$$

42. Проверить тождества:

1° $\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+$
$$+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

2° $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+$
$$+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

43. Привести к логарифмическому виду:

$$\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\sin\left(B+\frac{C}{4}\right)+\sin\left(C+\frac{A}{4}\right)+$$
$$+\cos\left(A+\frac{B}{4}\right)+\cos\left(B+\frac{C}{4}\right)+\cos\left(C+\frac{A}{4}\right),$$

если $A+B+C=\pi$.

44. Привести к логарифмическому виду:

$$\sin\frac{A}{4}+\sin\frac{B}{4}+\sin\frac{C}{4}+\cos\frac{A}{4}+\cos\frac{B}{4}+\cos\frac{C}{4},$$

если

$$A+B+C=\pi.$$

45. Упростить произведение:

$$\cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^{n-1}a.$$

46. Показать, что

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

47. Дано: $\sin B=\frac{1}{5}\sin(2A+B)$.

Доказать, что

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{3}{2}\operatorname{tg}A.$$

48. Пусть A и B — острые и положительные углы, удовлетворяющие равенствам:

$$3\sin^2 A+2\sin^2 B=1,$$
$$3\sin 2A-2\sin 2B=0.$$

Доказать, что $A+2B=\frac{\pi}{2}$.

49. Показать, что величина выражения:

$$\cos^2\varphi+\cos^2(a+\varphi)-2\cos a\cos\varphi\cos(a+\varphi)$$

не зависит от величины φ.

50. Пусть

$$a=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\delta,$$
$$a'=\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\delta,$$
$$a''=\sin\varphi\sin\delta;$$
$$b=\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\delta,$$
$$b'=\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\delta,$$
$$b''=-\cos\varphi\sin\delta;$$
$$c=-\sin\psi\sin\delta,\quad c'=\cos\psi\sin\delta,\quad c''=\cos\delta.$$

Доказать, что

$$a^2+a'^2+a''^2=1;\qquad b^2+b'^2+b''^2=1;\qquad c^2+c'^2+c''^2=1;$$
$$ab+a'b'+a''b''=0;\qquad ac+a'c'+a''c''=0;\qquad bc+b'c'+b''c''=0.$$

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Преобразования дробных рациональных выражений, рассматриваемые в данном параграфе, основываются на обычных правилах действий с алгебраическими дробями.

Обратим внимание только на один факт, которым нам приходится пользоваться (см. задачи 15, 16, 17). Если мы имеем двучлен первой степени относительно x

$$Ax+B$$

и если нам известно, что он обращается в нуль при двух различных значениях x (например, при $x=a$ и при $x=b$), то мы можем утверждать, что тогда коэффициенты A и B равны нулю. В самом деле, из равенств

$$Aa+B=0; \qquad Ab+B=0 \tag{*}$$

получаем:

$$A(a-b)=0$$

и так как $a-b\neq 0$, то $A=0$. Подставляя это значение $A=0$ в одно из равенств (*), найдем $B=0$. Равным образом можно утверждать, что если трехчлен второй степени относительно x

$$Ax^2+Bx+C$$

обращается в нуль при трех различных значениях x (например, при $x=a$, $x=b$ и $x=c$), то

$$A=B=C=0.$$

Действительно, тогда имеем:

$$Aa^2+Ba+C=0; \quad Ab^2+Bb+C=0; \quad Ac^2+Bc+C=0.$$

Вычитая почленно, найдем:

$$A(a^2-b^2)+B(a-b)=0,$$
$$A(a^2-c^2)+B(a-c)=0.$$

Так как $a-b\neq 0$, $a-c\neq 0$, то отсюда имеем:

$$A(a+b)+B=0; \quad A(a+c)+B=0.$$

Отсюда найдем: $A=0$ (так как $b-c\neq 0$), а затем получим, что

$$B=0 \quad \text{и} \quad C=0.$$

Совершенно так же можно показать, что если многочлен третьей степени

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

обращается в нуль при четырех различных значениях x, то

$$A=B=C=D=0,$$

и вообще если многочлен степени n обращается в нуль при $n+1$ различных значениях x, то все его коэффициенты равны нулю (см. § 6).

Наконец, в этом же параграфе мы рассмотрим ряд задач, относящихся к конечным непрерывным дробям. Мы предполагаем известными те сведения об этих дробях, которые сообщаются обычно в элементарных учебниках алгебры.

Из тригонометрии в этом параграфе мы предполагаем известными также и основные формулы, относящиеся к решению треугольников.

1. Доказать тождество:

$$p^3=\left(p\,\frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right)^3+\left(q\,\frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right)^3+q^3.$$

2. Упростить следующее выражение:

$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

3. Упростить:

$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}\right)+\frac{2}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{2}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right).$$

4. Пусть

$$x=\frac{a-b}{a+b};\quad y=\frac{b-c}{b+c};\quad z=\frac{c-a}{c+a}.$$

Доказать, что

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

5. Показать, что из равенства

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

вытекает:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

6. Упростить выражение:

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc\,(y-z)^2+ca\,(z-x)^3+ab\,(x-y)^2}$$

при условии:

$$ax+by+cz=0.$$

7. Доказать справедливость равенства:

$$\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-a^2)(y^2-a^2)(z^2-a^3)}{a^2(a^2-b^2)}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-a^2)}=$$
$$=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2.$$

8. Положим:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}=S_k.$$

Доказать, что

$$S_0=S_1=0;\quad S_2=1;\quad S_3=a+b+c;$$
$$S_4=ab+ac+bc+a^2+b^2+c^2;$$
$$S_5=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+abc.$$

9. Пусть

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}=S_k.$$

Показать, что

$$S_0 = S_1 = S_2 = 0; \quad S_3 = 1; \quad S_4 = a + b + c + d.$$

10. Положим:

$$\sigma_m = a^m \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^m \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^m \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Вычислить σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4.

11. Доказать тождество:

$$bc \frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}{(a-b)(a-c)} + ca \frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)}{(b-a)(b-c)} + ab \frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)}{(c-a)(c-b)} = abc - \alpha\beta\gamma.$$

12. Показать, что

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} + \frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)} + \frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)} = abc + abd + acd + bcd.$$

13. Упростить следующие выражения:

1° $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

2° $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$.

14. Упростить:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)(x-c)},$$

где $k = 1, 2$.

15. Показать, что

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)} + \frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)} + \frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)} + \frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)} = \frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

16. Доказать тождество:

$$a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

17. Доказать тождество:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

18. Показать, что если $a+b+c=0$, то

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

19. Упростить:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

20. Доказать:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

21. Упростить:

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}.$$

22. Доказать, что

$$\frac{d^m(a-b)(b-c)+b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d)+a^m(b-c)(c-d)}=\frac{b-d}{a-c}$$

при $m=1,\ 2$.

23. Доказать, что

$$\left\{1-\frac{x}{\alpha_1}+\frac{x(x-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}-\frac{x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{x}{\alpha_1}+\frac{x(x+\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{n-1})}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}\right\}=$$
$$=1-\frac{x^2}{\alpha_1^2}+\frac{x^2(x^2-\alpha_1^2)}{\alpha_1^2\alpha_2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{x^2(x^2-\alpha_1^2)\ldots(x^2-\alpha_{n-1}^2)}{\alpha_1^2\cdot\alpha_2^2\ldots\alpha_n^2}.$$

24. Дано:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

Доказать, что из трех дробей две должны быть равны положительной, а третья — отрицательной единице.

25. Показать, что из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

вытекает:

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n},$$

если n нечетное.

26. Показать, что из равенств:

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)}=\frac{cx+az}{y(ax-by+cz)}=\frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}$$

следует:

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}.$$

27. Дано:

$$\alpha+\beta+\gamma=0,$$

$$a+b+c=0,$$

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0.$$

Доказать:

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2=0.$$

28. Если

$$a^3+b^3+c^3=(b+c)(a+c)(a+b)$$

и

$$(b^2+c^2-a^2)x=(c^2+a^2-b^2)y=(a^2+b^2-c^2)z,$$

то

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(x+z)(y+z).$$

29. Рассмотрим конечную непрерывную дробь:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

Положим:

$$P_0=a_0;\quad Q_0=1;\quad P_1=a_0a_1+1;\quad Q_1=a_1$$

и вообще

$$P_{k+1}=a_{k+1}P_k+P_{k-1},$$
$$Q_{k+1}=a_{k+1}Q_k+Q_{k-1}.$$

Тогда известно, что

$$\frac{P_n}{Q_n}=a_0+\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Доказать следующие тождества:

1° $\left(\frac{P_{n+2}}{P_n}-1\right)\left(1-\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}\right)=\left(\frac{Q_{n+2}}{Q_n}-1\right)\left(1-\frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}}\right).$

2° $\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{Q_0Q_1}-\frac{1}{Q_1Q_2}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n}.$

3° $P_{n+2}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n+2}=(a_{n+2}a_{n+1}a_n+a_{n+2}+a_n)\cdot(-1)^n.$

4° $\frac{P_n}{P_{n-1}}=a_n+\frac{1}{c_{n-1}}+\dots+\frac{1}{a_0},$

$\frac{Q_n}{Q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}}+\dots+\frac{1}{a_1}.$

30. Положим для краткости

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}=(a_0,\quad a_1,\ \dots,\ a_n)=\frac{P_n}{Q_n},$$

и пусть дробь симметричная, т. е.

$$a_0=a_n;\quad a_1=a_{n-1},\ \dots$$

Доказать, что

$$P_{n-1}=Q_n.$$

31. Пусть имеем дробь:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\dots+\frac{1}{a}.$$

Доказать:

$$P_n^2+P_{n+1}^2=P_{n-1}P_{n+1}+P_nP_{n+2}.$$

32. Пусть

$$x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{l}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{l}$$

и пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — последняя и предпоследняя подходящая к дроби

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{l}.$$

Доказать, что

$$x=\frac{P_nQ_n+P_nP_{n-1}}{Q_n^2+P_nQ_{n-1}}.$$

33. Рассмотрим непрерывную дробь

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}.$$

Положим:

$$P_0=b_0;\quad Q_0=1;\quad P_1=b_0b_1+a_1;\quad Q_1=b_1;\ \ldots$$

и вообще

$$P_{k+1}=b_{k+1}P_k+a_{k+1}P_{k-1},$$
$$Q_{k+1}=b_{k+1}Q_k+a_{k+1}Q_{k-1}.$$

Доказать, что

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}.$$

34. Доказать:

$$\frac{r}{r+1}-\frac{r}{r+1}-\frac{r}{r+1}-\ldots-\frac{r}{r+1}=\frac{r^{n+1}-r}{r^{n+1}-1}$$

(число звеньев в непрерывной дроби равно n).

35. Доказать:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_1}-\frac{u_1^2}{u_1+u_2}-\frac{u_2^2}{u_2+u_3}-\ldots-\frac{u_{n-1}^2}{u_{n+1}+u_n}.$$

36. Доказать равенство:

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots + \cfrac{a_n}{b_n}}} = \cfrac{c_1 a_1}{c_1 b_1 + \cfrac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2 + \ldots + \cfrac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n b_n}}},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные величины, не равные нулю.

37. Доказать следующие тождества:

1° $$\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx} = 2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x - \ldots - \cfrac{1}{2\cos x}}}$$

(всего n звеньев).

2° $$1 + b_2 + b_2 b_3 + \ldots + b_2 b_3 \ldots b_n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \ldots - \cfrac{b_n}{b_{n+1}}}}}.$$

38. Доказать, что

1° $$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}.$$

2° $$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+c}{2}.$$

39. Показать, что

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

40. Доказать, что если $A + B + C = \pi$, то имеют место следующие соотношения:

1° $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

2° $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

3° $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

4° $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$.

5° $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$.

41. Найти алгебраические соотношения между величинами a, b и c, удовлетворяющими следующим зависимостям:

1° $\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$.

2° $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$.

3° $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = 1$.

42. Показать, что

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$$

если

$$xy + xz + yz = 1.$$

43. Показать, что сумма трех дробей:

$$\frac{b-c}{1+bc}, \quad \frac{c-a}{1+ac}, \quad \frac{a-b}{1+ab}$$

равна их произведению.

44. Доказать:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

45. Доказать, что из равенства:

$$\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$$

вытекает соотношение:

$$\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

46. Пусть имеем:

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n = 0,$$

$$a_1 \cos(\alpha_1 + \theta) + a_2 \cos(\alpha_2 + \theta) + \ldots + \alpha_n \cos(\alpha_n + \theta) = 0 \quad (\theta \neq k\pi).$$

Доказать, что при любом λ будет:

$$a_1 \cos(\alpha_1 + \lambda) + a_2 \cos(\alpha_2 + \lambda) + \ldots + a_n \cos(\alpha_n + \lambda) = 0.$$

47. Доказать тождество:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 0.$$

48. Пусть в треугольнике стороны равны соответственно a, b и c и пусть

$$r = \frac{s}{p}; \quad r_a = \frac{s}{p-a}; \quad r_b = \frac{s}{p-b}; \quad r_c = \frac{s}{p-c},$$

где s — площадь треугольника и $2p = a + b + c$.

Доказать следующие соотношения:

1° $\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{c-r}=2(r_a+r_b+r_c)$.

2° $\frac{a^2r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2r_c}{(c-a)(c-b)}=\frac{p^2}{r}$.

3° $\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)=4$.

4° $\frac{bc}{(a-b)(a-c)r_a^2}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)r_b^2}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)r_c^2}=$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)r_br_c}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)r_cr_a}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)r_ar_b}=\frac{1}{r^2}.$$

5° $\frac{ar_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{br_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{cr_c}{(c-a)(c-b)}=$

$$=\frac{(b+c)r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)r_c}{(c-a)(c-b)}=\frac{p}{r}.$$

49. Доказать тождество:

$$\sin(a+b-c-d)=\frac{\sin(a-c)\sin(a-d)}{\sin(a-b)}+\frac{\sin(b-c)\sin(b-d)}{\sin(b-a)}.$$

50. Дано:

$$\cos\theta=\frac{a}{b+c};\quad \cos\varphi=\frac{b}{a+c};\quad \cos\psi=\frac{c}{a+b}$$

(θ, φ и ψ лежат в промежутке от 0 до π).

Известно, что a, b и c — стороны треугольника, у которого углы равны соответственно A, B и C.

Доказать:

1° $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}=1$.

2° $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

51. Доказать:

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{1}{\sin(b-a)\sin(b-c)}+$$
$$+\frac{1}{\sin(c-a)\sin(c-b)}=\frac{1}{2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}.$$

52. Доказать тождества:

1° $\frac{\sin a}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{\sin b}{\sin(b-a)\sin(b-c)}+$

$$+\frac{\sin c}{\sin(c-a)\sin(c-b)}=0.$$

2° $\frac{\cos a}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{\cos b}{\sin(b-a)\sin(b-c)}+$

$$+\frac{\cos c}{\sin(c-a)\sin(c-b)}=0.$$

53. Доказать тождества:

1° $\sin a \sin(b-c)\cos(b+c-a)+$
$+\sin b\sin(c-a)\cos(c+a-b)+$
$$+\sin c\sin(a-b)\cos(a+b-c)=0.$$

2° $\cos a\sin(b-c)\sin(b+c-a)+$
$+\cos b\sin(c-a)\sin(c+a-b)+$
$$+\cos c\sin(a-b)\sin(a+b-c)=0.$$

3° $\sin a\sin(b-c)\sin(b+c-a)+$
$+\sin b\sin(c-a)\sin(c+a-b)+$
$+\sin c\sin(a-b)\sin(a+b-c)=$
$$=2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b).$$

4° $\cos a\sin(b-c)\cos(b+c-a)+$
$+\cos b\sin(c-a)\cos(c+a-b)+$
$+\cos c\sin(a-b)\cos(a+b-c)=$
$$=2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b).$$

54. Доказать, что

1° $\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)=$
$$=3\sin A\sin B\sin C.$$

2° $\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0,$

если
$$A+B+C=\pi.$$

55. Доказать тождества:

1° $\sin 3A\sin^3(B-C)+\sin 3B\sin^3(C-A)+\sin 3C\sin^3(A-B)=0.$

2° $\sin 3A\cos^3(B-C)+\sin 3B\cos^3(C-A)+\sin 3C\cos^3(A-B)=$
$$=\sin 3A\sin 3B\sin 3C,$$

если
$$A+B+C=\pi.$$

§ 3. РАДИКАЛЫ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМЫ

Отметим, что под символом $\sqrt[n]{A}$ мы будем понимать (если n — нечетное) то единственное вещественное число, n-я степень которого равна A. В этом случае A может быть как меньше, так и больше нуля. Если же n — четное, то под символом $\sqrt[n]{A}$ мы будем понимать то единственное положительное число, n-я степень которого равна A. Здесь обязательно $A \geqq 0$.

При этих условиях, например,

$$\sqrt{A^2}=A, \text{ если } A>0,$$
$$\sqrt{A^2}=-A, \text{ если } A<0.$$

В остальном мы считаем известными обычные законы операций с радикалами, дробными и отрицательными показателями. Напомним также две формулы, оказывающиеся иногда при преобразованиях весьма полезными, а именно:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$
$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Из вопросов, относящихся к тригонометрии, скажем прежде всего несколько слов о формулах приведения. Необходимо отметить следующее:

1° Функции $\sin x$ и $\cos x$ обладают периодом 2π, а функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — периодом π, так что можно записать следующие равенства:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x; \qquad \cos(x+2k\pi)=\cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg} x; \qquad \operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg} x,$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

2° Для функций $\sin x$ и $\cos x$ величина π является полупериодом, т. е. отбрасывание под знаком аргумента величины $\pm\pi$ влечет за собой изменение знака у функций. Следовательно:

$$\sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x; \qquad \cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x,$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

3° Функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ являются нечетными функциями, а функция $\cos x$ — четной функцией. Поэтому

$$\sin(-x)=-\sin x;$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x;$$
$$\cos(-x)=\cos x.$$

4° Если x и y — две величины, связанные соотношением

$$x+y=\frac{\pi}{2},$$

то

$$\cos x=\sin y; \qquad \sin x=\cos y;$$
$$\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} y; \qquad \operatorname{ctg} x=\operatorname{tg} y.$$

Пользуясь этими замечаниями, мы всегда можем синус или косинус любого аргумента привести к синусу или косинусу аргумента, лежащего в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$. То же самое мы можем сказать и относительно тангенса и котангенса.

В самом деле, любой аргумент α может быть представлен в следующем виде:

$$\alpha = s \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha_0,$$

где s — целое число, а $0 \leqq \alpha_0 \leqq \frac{\pi}{4}$. Отсюда и следует высказанное предложение. Отметим также следующие формулы (k — целое число):

$$\sin k\pi = 0; \qquad \operatorname{tg} k\pi = 0; \qquad \cos k\pi = (-1)^k;$$

$$\sin \frac{k\pi}{2} = 0, \quad \text{если } k \text{ четное;}$$

$$\sin \frac{k\pi}{2} = (-1)^{\frac{k-1}{2}}, \quad \text{если } k \text{ нечетное;}$$

$$\cos \frac{k\pi}{2} = (-1)^{\frac{k}{2}}, \quad \text{если } k \text{ четное;}$$

$$\cos \frac{k\pi}{2} = 0, \quad \text{если } k \text{ нечетное.}$$

Напомним далее, что символом $\arcsin x$ мы будем обозначать дугу, синус который равен x и которая заключена в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Таким образом всегда

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin x \leqq +\frac{\pi}{2}.$$

Равным образом

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < +\frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqq \arccos x \leqq \pi,$$

$$0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi.$$

В этом же параграфе мы помещаем несколько задач на преобразование выражений, содержащих логарифмы.

1. Доказать, что

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2 = 2.$$

2. Показать, что имеют место следующие соотношения:

1° $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

2° $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25})$.

3° $\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1)$.

4° $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$.

5° $\left(\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}$.

6° $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{5}}+\sqrt[5]{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt{8})^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\frac{16}{125}}+$

$$+\sqrt[5]{\frac{8}{125}}+\sqrt[5]{\frac{2}{125}}-\sqrt[5]{\frac{1}{125}}.$$

3. Пусть $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$.

Доказать, что

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}.$$

4. Показать, что

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c},$$

если

$$ax^3=by^3=cz^3 \text{ и } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

5. Положим:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

$$b_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Показать, что

$$a_{m+n}=a_m a_n-\frac{a_{m-n}}{2^n},$$

$$b_{m+n}=a_m b_n+\frac{b_{m-n}}{2^n}.$$

6. Пусть

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Доказать следующие соотношения:

1° $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$.

2° $u_{n-1}=u_k u_{n-k}+u_{k-1}u_{n-k-1}$.

3° $u_{2n-1}=u_n^2+u_{n-1}^2$.

4° $u_{3n}=u_n^3+u_{n+1}^3-u_{n-1}^3$.

5° $u_n^4-u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2}=1$.

6° $u_{n+1}u_{n+2}-u_n u_{n+3}=(-1)^n$.

7° $u_n u_{n+1}-u_{n-2}u_{n-1}=u_{2n-1}$.

7. Доказать следующие тождества:

1° $\left\{2\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

$$(a>0,\ b>0).$$

2° $\left\{3\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}-a\right]\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}-b\right]\right\}^{\frac{1}{3}}=(a+b)^{\frac{2}{3}}-(a^2-ab+b^2)^{\frac{1}{3}}$.

8. Найти, чему равно выражение

$$(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$$

при

$$x=a^{-1}\left(2\frac{a}{b}-1\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(0<a<b<2a).$$

9. Упростить выражение:

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

10. Упростить выражение:

$$\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right]\left[\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right]$$

$$(0<a<1).$$

11. Доказать, что при $x\geqq 1$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

равно 2, если $x\leqq 2$, и равно $2\sqrt{x-1}$, если $x>2$.

12. Вычислить:

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

$$(a\geqq 0,\quad b\geqq 0,\quad c\geqq 0).$$

13. Доказать, что трехчлен x^3+px+q обращается в нуль при

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

14. Выразить x через новую переменную так, чтобы $\sqrt{x+a}$ и $\sqrt{x+b}$ сделались рациональными.

15. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}}$$

при условии:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

16. Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ не может быть представлен в виде $p+\sqrt{q}$, где p и q рациональные ($q>0$ и не является полным квадратом).

17. Доказать следующие тождества:

$$1^\circ \quad \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi-\alpha)}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi-\alpha)+ \\ +\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$2^\circ \quad [1-\sin(3\pi-\alpha)+\cos(3\pi+\alpha)]\left[1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+ \right. \\ \left. +\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\right]+\sin 2\alpha=0.$$

$$3^\circ \quad [1-\sin(\pi+\alpha)+\cos(\pi+\alpha)]^2+\left[1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+ \right. \\ \left. +\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2=4-2\sin 2\alpha.$$

18. Пусть $\alpha=2k\pi+\alpha_0$, где $0\leqq\alpha_0<2\pi$.

Доказать, что имеет место равенство:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=(-1)^k\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Допустим далее, что $\alpha=2k\pi+\alpha_0$, где $-\pi\leqq\alpha_0<\pi$.

Показать, что тогда

$$\cos\frac{\alpha}{2}=(-1)^k\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

19. Если целое число a делится без остатка на n, то будем писать это следующим образом:

$$a\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$$

и говорить: a сравнимо с нулем по модулю n. Какие остатки может давать целое число при делении его на целое же число n?

Ясно, что при делении любого целого числа на n в остатке могут оказаться:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

Если при делении a на n в остатке будет получаться k, то мы будем писать так:

$$a \equiv k \pmod{n},$$

так как (что очевидно) в этом случае

$$a - k \equiv 0 \pmod{n}.$$

Так, при делении a на 2 могут представиться только два случая: либо a делится на 2, либо a при делении на 2 дает в остатке 1.

В первом случае пишем $a \equiv 0 \pmod 2$, во втором $a \equiv 1 \pmod 2$.

Точно так же при делении на 3 в остатке могут оказаться 0, 1, 2 и, следовательно, могут представиться только три случая:

$$a \equiv 0 \pmod 3, \quad a \equiv 1 \pmod 3, \quad a \equiv 2 \pmod 3$$

и т. д.

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть имеем:

$A_1 = 1.$

$A_2 = \cos n\pi.$

$A_3 = 2\cos\left(\frac{2}{3}n\pi - \frac{1}{18}\pi\right).$

$A_4 = 2\cos\left(\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{8}\pi\right).$

$A_5 = 2\cos\left(\frac{2}{5}n\pi - \frac{1}{5}\pi\right) + 2\cos\frac{4}{5}n\pi.$

$A_6 = 2\cos\left(\frac{1}{3}n\pi - \frac{5}{18}\pi\right).$

$$A_7 = 2\cos\left(\frac{2}{7}n\pi - \frac{5}{14}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{4}{7}n\pi - \frac{1}{14}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{6}{7}n\pi + \frac{1}{14}\pi\right).$$

$A_8 = 2\cos\left(\frac{1}{4}n\pi - \frac{7}{16}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{3}{4}n\pi - \frac{1}{16}\pi\right).$

$A_9 = 2\cos\left(\frac{2}{9}n\pi - \frac{14}{27}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{4}{9}n\pi - \frac{4}{27}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{8}{9}n\pi + \frac{4}{27}\pi\right).$

$A_{10} = 2\cos\left(\frac{1}{5}n\pi - \frac{3}{5}\pi\right) + 2\cos\frac{3}{5}n\pi.$

$$A_{11} = 2\cos\left(\frac{2}{11}n\pi - \frac{15}{22}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{4}{11}n\pi - \frac{5}{22}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{6}{11}n\pi - \frac{3}{22}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{8}{11}n\pi - \frac{3}{22}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{10}{11}n\pi + \frac{5}{22}\pi\right).$$

$A_{12} = 2\cos\left(\frac{1}{6}n\pi - \frac{55}{72}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{5}{6}n\pi + \frac{1}{72}\pi\right).$

$$A_{13}=2\cos\left(\frac{2}{13}n\pi-\frac{11}{13}\pi\right)+2\cos\left(\frac{4}{13}n\pi-\frac{4}{13}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{6}{13}n\pi-\frac{1}{13}\pi\right)+2\cos\left(\frac{8}{13}n\pi+\frac{1}{13}\pi\right)+$$
$$+2\cos\frac{10}{13}n\pi+2\cos\left(\frac{12}{13}n\pi+\frac{4}{13}\pi\right).$$

$$A_{14}=2\cos\left(\frac{1}{7}n\pi-\frac{13}{14}\pi\right)+2\cos\left(\frac{3}{7}n\pi-\frac{3}{14}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{5}{7}n\pi-\frac{3}{14}\pi\right).$$

$$A_{15}=2\cos\left(\frac{2}{15}n\pi-\frac{1}{90}\pi\right)+2\cos\left(\frac{4}{15}n\pi-\frac{7}{18}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{8}{15}n\pi-\frac{19}{90}\pi\right)+2\cos\left(\frac{14}{15}n\pi+\frac{7}{18}\pi\right).$$

$$A_{16}=2\cos\left(\frac{1}{8}n\pi+\frac{29}{32}\pi\right)+2\cos\left(\frac{3}{8}n\pi+\frac{27}{32}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{5}{8}n\pi+\frac{5}{32}\pi\right)+2\cos\left(\frac{7}{8}n\pi+\frac{3}{32}\pi\right).$$

$$A_{17}=2\cos\left(\frac{2}{17}n\pi+\frac{14}{17}\pi\right)+2\cos\left(\frac{4}{17}n\pi-\frac{8}{17}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{6}{17}n\pi-\frac{5}{17}\pi\right)+2\cos\frac{8}{17}n\pi+$$
$$+2\cos\left(\frac{10}{17}n\pi-\frac{1}{17}\pi\right)+2\cos\left(\frac{12}{17}n\pi-\frac{5}{17}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{14}{17}n\pi-\frac{1}{17}\pi\right)+2\cos\left(\frac{16}{17}n\pi+\frac{8}{17}\pi\right).$$

$$A_{18}=2\cos\left(\frac{1}{9}n\pi+\frac{20}{27}\pi\right)+2\cos\left(\frac{5}{9}n\pi-\frac{2}{27}\pi\right)+$$
$$+2\cos\left(\frac{7}{9}n\pi+\frac{2}{27}\pi\right).$$

Доказать, что

$A_5=0$, если $n\equiv 1,\ 2 \pmod 5$,
$A_7=0$, » $n\equiv 1,\ 3,\ 4 \pmod 7$,
$A_{10}=0$, » $n\equiv 1,\ 2 \pmod 5$,
$A_{11}=0$, » $n\equiv 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7 \pmod{11}$,
$A_{13}=0$, » $n\equiv 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10 \pmod{13}$,
$A_{14}=0$, » $n\equiv 1,\ 3,\ 4 \pmod 7$,
$A_{16}=0$, » $n\equiv 0 \pmod 2$,
$A_{17}=0$, » $n\equiv 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 13,\ 14 \pmod{17}$

и что A_2, A_3, A_4, A_6, A_8, A_9, A_{12}, A_{15} и A_{18} ни при каких целых значениях n в нуль не обращаются (S. Ramanujan. Asymptotic formulae in combinatory analysis).

20. Пусть

$$p(n)=A(n+3)^2+B+C(-1)^n+D\cos\frac{2\pi n}{3}\ (n\text{ — целое}).$$

Доказать, что имеет место следующее соотношение:

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-4)+p(n-5)-p(n-6)=0.$$

21. Показать, что

1° $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2° $\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos 18^\circ=\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

22. Показать, что

$$\sin 6^\circ=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{8},$$

$$\cos 6^\circ=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}.$$

23. Показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\cos(\operatorname{arc\,sin} x)=\sqrt{1-x^2};\quad \sin(\operatorname{arc\,cos} x)=\sqrt{1-x^2}.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{1}{x};\quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{x}.$$

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\quad \sin(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\cos(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\quad \sin(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

24. Доказать, что

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,sin} x+\operatorname{arc\,cos} x=\frac{\pi}{2}.$$

25. Доказать равенство:

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon=0$, если $xy<1$,

$\varepsilon=-1$, „ $xy>1$ и $x<0$,

$\varepsilon=+1$, „ $xy>1$ и $x>0$.

26. Показать, что

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

27. Показать, что

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

28. Показать, что

$$2\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2}=\pi \qquad (x>1)$$

29. Доказать:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \text{ если } x > 0,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \text{ „ } x < 0.$$

30. Доказать:

$$\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi,$$

где

$$\begin{aligned} &\eta = 1, && \varepsilon = 0, && \text{если} && xy < 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqq 1,\\ &\eta = -1, && \varepsilon = -1, && \text{„} && x^2+y^2 > 1,\ x<0,\ y<0,\\ &\eta = -1, && \varepsilon = +1, && \text{„} && x^2+y^2 > 1,\ x>0,\ y>0. \end{aligned}$$

31. Проверить равенство

$$\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

если

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1.$$

32. Если

$$A = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} \text{ и } B = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3},$$

то доказать, что

$$\cos 2A = \sin 4B.$$

33. Пусть

$$a^2 + b^2 = 7ab.$$

Доказать:

$$\lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$

34. Доказать, что

$$\frac{\lg_a n}{\lg_{am} n} = 1 + \lg_a m.$$

35. Доказать, что из равенств

$$\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(z+x-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z}$$

следует:

$$x^y \cdot y^x = z^y \cdot y^z = x^z \cdot z^x.$$

36. 1° Доказать, что

$$\lg_b a \cdot \lg_a b = 1.$$

2° Упростить выражение:

$$a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$$

(логарифмы берутся при одном и том же основании).

37. Дано:

$$y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}; \quad z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$$

(логарифмы взяты для основания 10).

Доказать:

$$x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}.$$

38. Дано:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Доказать:

$$\lg_{b+c} a + \lg_{c-b} a = 2 \lg_{c+b} a \lg_{c-b} a.$$

39. Пусть

$a > 0$, $c > 0$, $b = \sqrt{ac}$, a, c и ac не равны 1; $N > 0$.

Доказать:

$$\frac{\lg_a N}{\lg_c N} = \frac{\lg_a N - \lg_b N}{\lg_b N - \lg_c N}.$$

40. Доказать:

$$\lg_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\lg_{a_1} x} + \frac{1}{\lg_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\lg_{a_n} x}}.$$

41. Даны две прогрессии с положительными членами: геометрическая и арифметическая:

$$a,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots;$$
$$b,\ b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Знаменатель первой и разность второй положительны. Доказать, что всегда существует система логарифмов, для которой

$$\lg a_n - b_n = \lg a - b \text{ (при любом } n).$$

Найти основание β этой системы.

§ 4. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным будет:

$$Ax + B = 0;$$

где A и B не зависят от x. Решить уравнение первой степени собственно и значит привести его к этому виду, так как тогда выражение для корня становится очевидным:

$$x = -\frac{B}{A}.$$

Обычно поэтому задача решения уравнения первой степени есть задача преобразования данного выражения к виду $Ax+B=0$. При этом большое внимание должно быть обращено на эквивалентность (равносильность) уравнений, входящих в возникающую при этом цепь уравнений. Задача решения системы уравнений также в значительной мере состоит в преобразованиях одной системы в другую, ей эквивалентную.

Мы рассматриваем, однако, в этом параграфе не только уравнения собственно первой степени относительно неизвестного x, но также и такие уравнения, которые путем соответствующих преобразований могут быть к этим уравнениям приведены (таковы уравнения, содержащие радикалы, тригонометрические уравнения и уравнения, содержащие показательные и логарифмические функции). Как в этом параграфе, так и в следующем мы будем считать тригонометрическое уравнение решенным, если найдено значение одной из тригонометрических функций выражения, линейного относительно x.

В самом деле, если известно, что

$$\operatorname{tg}(mx+n)=A,$$

то отсюда находим:

$$mx+n=\operatorname{arc\,tg} A+k\pi,$$

где k — любое целое число.

Следовательно, все искомые значения x заключаются в формуле:

$$x=\frac{\operatorname{arc\,tg} A-n+k\pi}{m}.$$

Точно так же, если найдено, что

$$\operatorname{ctg}(mx+n)=A,$$

то

$$mx+n=\operatorname{arc\,ctg} A+k\pi \quad \text{и} \quad x=\frac{\operatorname{arc\,ctg} A-n+k\pi}{m}.$$

Если же известно, что

$$\sin(mx+n)=A,$$

то все значения x, удовлетворяющие последнему равенству, найдутся по формуле:

$$mx+n=(-1)^k \arcsin A+k\pi,$$

где k, как и прежде, любое целое число.

Аналогично из равенства

$$\cos(mx+n)=A$$

следует:

$$mx+n=\pm\arccos A+2k\pi.$$

При решении показательных уравнений не мешает вспомнить, что уравнение

$$a^x = 1 \qquad (a > 0 \text{ и не равно } 1)$$

имеет единственное решение $x = 0$.

1. Решить уравнение:

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a + b + c.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b-c} = \frac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}.$$

4. Решить уравнение:

$$\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1.$$

5. Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt[p]{b+x}}{b} + \frac{\sqrt[p]{b+x}}{x} = \frac{c\sqrt[p]{x}}{a}.$$

6. Решить уравнения:

1° $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 1.$

2° $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1.$

7. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}.$$

8. Решить уравнение:

$$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1.$$

9. Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

10. Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \sqrt{b} \qquad (a > 0).$$

11. Решить систему:

$$\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x+y+v&=b,\\ x+z+v&=c,\\ y+z+v&=d. \end{aligned}$$

12. Решить систему:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=2a_1,\\ x_1+x_2-x_3-x_4&=2a_2,\\ x_1-x_2+x_3-x_4&=2a_3,\\ x_1-x_2-x_3+x_4&=2a_4. \end{aligned}$$

13. Решить систему:

$$\begin{aligned} ax+m(y+z+v)&=k,\\ by+m(x+z+v)&=l,\\ cz+m(x+y+v)&=p,\\ dv+m(x+y+z)&=q. \end{aligned}$$

14. Решить систему:

$$\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_p-a_p}{m_p},$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_p=a.$$

15. Решить систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=a,\\ \frac{1}{v}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=b,\\ \frac{1}{v}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}&=c,\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}&=d. \end{aligned}$$

16. Решить систему:

$$\begin{aligned} ay+bx&=c,\\ cx+az&=b,\\ bz+cy&=a. \end{aligned}$$

17. Решить систему:

$$\begin{aligned} cy+bz&=2d\,yz,\\ az+cx&=2d'\,zx,\\ bx+ay&=2d''\,xy. \end{aligned}$$

18. Решить систему:

$$\frac{xy}{ay+bx}=c,\quad \frac{xz}{az+cx}=b,\quad \frac{yz}{bz+cy}=a.$$

19. Решить систему:

$$y+z-x=\frac{xyz}{a^2},$$
$$z+x-y=\frac{xyz}{b^2},$$
$$x+y-z=\frac{xyz}{c^2}.$$

20. Решить систему:

$$(b+c)(y+z)-ax=b-c,$$
$$(c+a)(x+z)-by=c-a,$$
$$(a+b)(x+y)-cz=a-b$$

при условии, что

$$a+b+c\neq 0.$$

21. Решить систему:

$$(c+a)y+(a+b)z-(b+c)x=2a^3,$$
$$(a+b)z+(b+c)x-(c+a)y=2b^3,$$
$$(b+c)x+(c+a)y-(a+b)z=2c^3$$

при условии

$$b+c\neq 0,\quad a+c\neq 0,\quad a+b\neq 0.$$

22. Решить систему:

$$\frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}=1,$$
$$\frac{x}{a+\mu}+\frac{y}{b+\mu}+\frac{z}{c+\mu}=1,$$
$$\frac{x}{a+\nu}+\frac{y}{b+\nu}+\frac{z}{c+\nu}=1.$$

23. Решить систему:

$$z+ay+a^2x+a^3=0,$$
$$z+by+b^2x+b^3=0,$$
$$z+cy+c^2x+c^3=0.$$

24. Решить систему:

$$z+ay+a^2x+a^3t+a^4=0,$$
$$z+by+b^2x+b^3t+b^4=0,$$
$$z+cy+c^2x+c^3t+c^4=0,$$
$$z+dy+d^2x+d^3t+d^4=0.$$

25. Решить систему:

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=m,\\ ax+by+cz+du&=n,\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=k,\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=l. \end{aligned}$$

26. Решить систему:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n\quad &=a_1,\\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots+nx_1\quad &=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ x_n+2x_1+3x_2+\ldots+nx_{n-1}&=a_n. \end{aligned}$$

27. Решить систему:

$$\begin{aligned} x_1-\ x_2-\ x_3-\ldots-x_n&=2a,\\ -x_1+3x_2-\ x_3-\ldots-x_n&=4a,\\ -x_1-\ x_2+7x_3-\ldots-x_n&=8a,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ -x_1-x_2-x_3-\ldots+(2^n-1)\,x_n&=2^na. \end{aligned}$$

28. Решить систему:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n&=1,\\ x_1+x_3+\ldots+x_n&=2,\\ x_1+x_2+x_4+\ldots+x_n&=3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}&=n. \end{aligned}$$

29. Показать, что для совместности уравнений:

$$ax+b=0; \qquad a'x+b'=0$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$ab'-a'b=0.$$

30. Показать, что системы:

$$ax+by+c=0; \qquad a'x+b'y+c'=0$$

и

$$\begin{aligned} l\,(ax+by+c)+l'\,(a'x+b'y+c')&=0,\\ m\,(ax+by+c)+m'\,(a'x+b'y+c')&=0 \end{aligned}$$

эквивалентны, если

$$lm'-l'm\neq 0.$$

31. Доказать, что система:

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0,\\ a'x+b'y+c'&=0 \end{aligned}$$

имеет одно и только одно решение, если

$$ab'-a'b\neq 0.$$

32. Доказать, что из равенств:

$$\begin{aligned} ax+by&=0,\\ a'x+b'y&=0, \end{aligned}$$

если $ab'-a'b\neq 0$, следует:

$$x=y=0.$$

33. Показать, что условием совместности трех уравнений:

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0,\\ a'x+b'y+c'&=0,\\ a''x+b''y+c''&=0 \end{aligned}$$

является равенство нулю следующего выражения:

$$a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b).$$

34. Пусть a, b, c не равны между собой. Доказать, что из равенств:

$$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=0,\\ x+by+b^2z&=0,\\ x+cy+c^2z&=0 \end{aligned}$$

следует:

$$x=y=z=0.$$

35. Доказать, что из равенств:

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz&=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z&=0 \end{aligned}$$

следует:

$$\frac{x}{C_1B-CB_1}=\frac{y}{CA_1-C_1A}=\frac{z}{AB_1-A_1B}$$

при условии, что не все знаменатели равны нулю.

36. Доказать, что результатом исключения x, y, z из равенств:

$$\begin{aligned} ax+cy+bz&=0,\\ cx+by+az&=0,\\ bx+ay+cz&=0 \end{aligned}$$

будет:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

37. Дана система:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Доказать, что уравнения совместны и определить x, y и z.

38. Определить, совместны ли уравнения системы:

$$(a+b)x+(ap+bq)y=ap^2+bq^2,$$
$$(ap+bq)x+(ap^2+bq^2)y=ap^3+bq^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(ap^{k-1}+bq^{k-1})x+(ap^k+bq^k)y=ap^{k+1}+bq^{k+1}.$$

39. Решить систему:

$$x_1+x_2=a_1,$$
$$x_2+x_3=a_2,$$
$$x_3+x_4=a_3,$$
$$\dots\dots$$
$$x_{n-1}+x_n=a_{n-1},$$
$$x_n+x_1=a_n.$$

40. Решить систему:

$$x+y+z=0,$$
$$\frac{a^2x}{a-d}+\frac{b^2y}{b-d}+\frac{c^2z}{c-d}=0,$$
$$\frac{ax}{a-d}+\frac{by}{b-d}+\frac{cz}{c-d}=d(a-b)(b-c)(c-a).$$

41. Решить систему:

$$(x+a)(y+l)=(a-n)(l-b),$$
$$(y+b)(z+m)=(b-l)(m-c),$$
$$(z+c)(x+n)=(c-m)(n-a).$$

42. Определить k так, чтобы система:

$$x+(1+k)y=0,$$
$$(1-k)x+ky=1+k,$$
$$(1+k)x+(12-k)y=-(1+k)$$

была совместна.

43. Решить систему:

$$x\sin a+y\sin 2a+z\sin 3a=\sin 4a,$$
$$x\sin b+y\sin 2b+z\sin 3b=\sin 4b,$$
$$x\sin c+y\sin 2c+z\sin 3c=\sin 4c.$$

44. Показать, что из равенств:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}; \quad A+B+C=\pi$$

следует:

$$\begin{aligned} a &= b\cos C+c\cos B,\\ b &= c\cos A+a\cos C,\\ c &= a\cos B+b\cos A. \end{aligned}$$

45. Показать, что из данных:

$$\begin{aligned} a &= b\cos C+c\cos B,\\ b &= c\cos A+a\cos C,\\ c &= a\cos B+b\cos A, \end{aligned}$$

$0<A<\pi, \quad 0<B<\pi, \quad 0<C<\pi; \quad a>0, \quad b>0, \quad c>0$ следует:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \text{и} \quad A+B+C=\pi.$$

46. Пусть даны две системы равенств:

$$\begin{aligned} a &= b\cos C+c\cos B,\\ b &= c\cos A+a\cos C, \quad (1)\\ c &= a\cos B+b\cos A. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B, \quad (2)\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C. \end{aligned}$$

Показать, что системы (1) и (2) эквивалентны, т. е. из существования равенств (1) вытекает существование равенств (2) и, обратно, из равенств (2) следуют равенства (1).

47. Пусть дано:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \cos b &= \cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B, \qquad (*)\\ \cos c &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \end{aligned}$$

и, кроме того, пусть величины a, b, c и A, B, C заключены между 0 и π.

Доказать:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

48. Доказать, что из условий предыдущей задачи следует:

1° $$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,\\ \cos B &= -\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b,\\ \cos C &= -\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c. \end{aligned}$$

2° $$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}},$$

если $\varepsilon=A+B+C-\pi$ и $2p=a+b+c$.

49. Решить уравнение:

$$(b-c)\operatorname{tg}(x+\alpha)+(c-a)\operatorname{tg}(x+\beta)+(a-b)\operatorname{tg}(x+\gamma)=0.$$

50. Доказать, что $\sin x$ и $\cos x$ рациональны тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационально.

51. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a.$$

52. Решить следующие уравнения:

1° $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

2° $\cos nx + \cos (n-2)x - \cos x = 0$.

53. Решить уравнение:

1° $m \sin (a - x) = n \sin (b - x)$.

2° $\sin (x + 3\alpha) = 3 \sin (\alpha - x)$.

54. Решить уравнение:

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x.$$

55. Решить уравнение:

$$\sin x + 2 \sin x \cos (a - x) = \sin a.$$

56. Решить уравнение:

$$\sin x \sin (\gamma - x) = a.$$

57. Решить уравнение:

$$\sin (\alpha + x) + \sin \alpha \sin x \operatorname{tg} (\alpha + x) = m \cos \alpha \cos x.$$

58. Решить уравнение:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 x + \cos^2 (\alpha + x) = 1 + 2 \cos \alpha \cos (\alpha + x).$$

59. Решить уравнение:

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

60. Показать, что если

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0,$$

то либо $5x = k\pi$, либо $8 \cos 2x = 1 \pm \sqrt{17}$.

61. Дано выражение:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Вводим подстановку:

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta,$$
$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta.$$

Требуется подобрать угол θ так, чтобы существовало тождество:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = AX^2 + BY^2.$$

62. Показать, что из равенств:

$$\frac{x}{\operatorname{tg}(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\operatorname{tg}(\theta+\beta)}=\frac{z}{\operatorname{tg}(\theta+\gamma)}$$

следует:

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$$

63. Решить системы:

1° $\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin y}{b}=\frac{\sin z}{c}, \quad x+y+z=\pi.$

2° $\frac{\operatorname{tg} x}{a}=\frac{\operatorname{tg} y}{b}=\frac{\operatorname{tg} z}{c}, \quad x+y+z=\pi.$

64. Решить систему:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=a; \quad x+y=2b.$$

65. Решить уравнение:

$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$$

66. Найти положительные решения уравнения:

$$x^{x+1}=1.$$

67. Решить систему:

$$a^x b^y=m; \quad x+y=n \quad (a>0,\ b>0).$$

68. Решить систему:

$$x^y=y^x; \quad a^x=b^y.$$

69. Решить систему:

$$(ax)^{\lg a}=(by)^{\lg b},$$
$$b^{\lg x}=a^{\lg y}.$$

70. Решить систему:

$$x^y=y^x,$$
$$x^m=y^n.$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Настоящий параграф содержит в основном задачи, связанные с решением квадратного уравнения и использованием свойств трехчлена второй степени.

Обратим внимание на то, что если корни трехчлена ax^2+bx+c *) мнимые, то этот трехчлен при любых вещественных значениях x со-

*) В этом параграфе буквы a, b, c, p, q и другие постоянные в уравнениях обозначают вещественные числа.

храняет свой знак. Легко видеть, что при этом знак трехчлена совпадает со знаком свободного члена (со знаком c). Таким образом, если $c>0$ и корни трехчлена ax^2+bx+c мнимые, то

$$ax^2+bx+c>0$$

при любом вещественном x.

При решении систем уравнений следует иметь в виду следующее предложение. Пусть рассматривается система m уравнений с m неизвестными. Пусть степени этих уравнений будут соответственно:

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m.$$

Тогда наша система, вообще говоря, допускает $k_1k_2\ \ldots\ k_m$ систем решений. Точнее, произведение степеней уравнений является верхним пределом числа решений. Иногда этот предел достигается (см. задачу 23), а иногда нет. Однако не мешает все-таки иметь в виду это предложение, так как оно предохраняет от потери решений.

1. Решить уравнение:

$$x^2\frac{(b+x)(x+c)}{(x-b)(x-c)}+b^2\frac{(b+c)(b+x)}{(b-c)(b-x)}+c^2\frac{(c+x)(c+b)}{(c-x)(c-b)}=(b+c)^2.$$

2. Решить уравнение

$$a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)(x-c)(x-a)+$$
$$+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0$$

и показать, что если это уравнение обладает равными корнями, то имеет место одно из равенств:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\pm\frac{1}{\sqrt{c}}=0.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{(a-x)\sqrt{a-x}-(b-x)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b.$$

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}-3\sqrt{a+b-2x}=0.$$

5. Доказать, что корни уравнения

$$(x-a)(x-c)+\lambda(x-b)(x-d)=0$$

вещественны при всяком λ, если $a<b<c<d$.

6. Показать, что корни уравнения

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

всегда вещественны.

7. Пусть

$$p_1p_2=2(q_1+q_2).$$

Доказать, что по крайней мере одно из уравнений:

$$x^2+px+q=0,$$
$$x^2+p_1x+q_1=0$$

имеет вещественные корни.

8. Доказать, что корни уравнения:

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$$

всегда вещественны.

9. Каковы должны быть p и q для того, чтобы корни уравнения:

$$x^2+px+q=0$$

были также p и q?

10. Доказать, что при любых вещественных x, y и z имеет место неравенство:

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqq 0.$$

11. Пусть

$$x+y+z=a.$$

Показать, что тогда

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{a^2}{3}.$$

12. Доказать неравенство:

$$x+y+z \leqq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}.$$

13. Пусть α и β являются корнями квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Обозначим $\alpha^k+\beta^k=s_k$.

Выразить s_k при $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ через p и q.

14. Пусть α и β корни квадратного уравнения:

$$x^2+px+q=0 \qquad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

Выразить $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$ через коэффициенты уравнения.

15. Показать, что если два уравнения

$$Ax^2+Bx+C=0,$$
$$A'x^2+B'x+C'=0$$

имеют общий корень, то

$$(AC'-CA')^2=(AB'-BA')(BC'-CB').$$

16. Решить систему:

$$x(x+y+z)=a^2,$$
$$y(x+y+z)=b^2,$$
$$z(x+y+z)=c^2.$$

17. Решить систему:

$$x(x+y+z)=a-yz,$$
$$y(x+y+z)=b-xz,$$
$$z(x+y+z)=c-xy.$$

18. Решить систему:

$$y+2x+z=a(y+x)(z+x),$$
$$z+2y+x=b(z+y)(x+y),$$
$$x+2z+y=c(y+z)(x+z).$$

19. Решить систему:

$$y+z+yz=a,$$
$$x+z+xz=b,$$
$$x+y+xy=c.$$

20. Решить систему:

$$yz=ax,$$
$$zx=by, \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$
$$xy=cz$$

21. Решить систему:

$$x^2+y^2=cxyz,$$
$$x^2+z^2=bxyz,$$
$$y^2+z^2=axyz.$$

22. Решить систему:

$$x(y+z)=a^2,$$
$$y(x+z)=b^2,$$
$$z(x+y)=c^2.$$

23. Решить систему:

$$x^3=ax+by,$$
$$y^3=bx+ay.$$

24. Решить систему:

$$x^2=a+(y-z)^2,$$
$$y^2=b+(x-z)^2,$$
$$z^2=c+(x-y)^2.$$

25. Решить систему:

$$\frac{b(x+y)}{x+y+cxy}+\frac{c(z+x)}{x+z+bxz}=a,$$
$$\frac{c(y+z)}{y+z+ayz}+\frac{a(x+y)}{x+y+cxy}=b,$$
$$\frac{a(x+z)}{x+z+bxz}+\frac{b(y+z)}{y+z+ayz}=c.$$

26. Решить систему:

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= a, \\ y^2 - xz &= b, \\ z^2 - xy &= c. \end{aligned}$$

27. Решить систему:

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - (y+z)x &= a, \\ x^2 + z^2 - (x+z)y &= b, \\ x^2 + y^2 - (x+y)z &= c. \end{aligned}$$

28. Решить систему:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= c^2, \\ z^2 + x^2 + xz &= b^2, \\ y^2 + z^2 + yz &= a^2. \end{aligned}$$

29. Решить систему:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= a^3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x + y + z &= a. \end{aligned}$$

30. Решить систему:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 + u^4 &= a^4, \\ x^2 + y^3 + z^3 + u^3 &= a^3, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= a^2, \\ x + y + z + u &= a. \end{aligned}$$

31. Доказать, что системы равенств (1) и (2) эквивалентны, т. е. из существования (1) вытекает существование (2) и обратно.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & aa'' + bb'' + cc'' &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

32. Из равенств:

$$x^2(y+z) = a^3; \quad y^2(x+z) = b^3; \quad z^2(x+y) = c^3; \quad xyz = abc$$

исключить x, y и z.

33. Дано:

$$\frac{y}{z} - \frac{z}{y} = a; \quad \frac{z}{x} - \frac{x}{z} = b; \quad \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = c.$$

Исключить x, y и z.

34. Исключить x, y, z из системы:

$$y^2+z^2-2ayz=0,$$
$$z^2+x^2-2bxz=0,$$
$$x^2+y^2-2cxy=0.$$

35. Показать, что результатом исключения x, y, z из системы:

$$y^2+yz+z^2=a^2,$$
$$z^2+xz+x^2=b^2,$$
$$x^2+xy+y^2=c^2,$$
$$xy+yz+xz=0$$

будет:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=0.$$

36. Исключить x и y из уравнений:

$$x+y=a; \quad x^2+y^2=b; \quad x^3+y^3=c.$$

37. Исключить a, b, c из системы:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}; \quad a^2+b^2+c^2=1; \quad a+b+c=1.$$

38. Дано:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\alpha,$$
$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=\beta,$$
$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)=\gamma.$$

Исключить x, y и z.

39. Доказать, что если

$$x+y+z+w=0,$$
$$ax+by+cz+dw=0,$$
$$(a-d)^2(b-c)^2(xw+yz)+(b-d)^2(c-a)^2(yw+zx)+$$
$$+(c-d)^2(a-b)^2(zw+xy)=0,$$

то

$$\frac{x}{(d-b)(d-c)(b-c)}=\frac{y}{(d-c)(d-a)(c-a)}=$$
$$=\frac{z}{(d-a)(d-b)(a-b)}=\frac{w}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

40. 1° Пусть

$$0<\alpha<\pi, \qquad 0<\beta<\pi$$

и

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}.$$

Доказать:

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

2° Пусть

$$0<\alpha<\pi, \qquad 0<\beta<\pi$$

и

$$\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{8}.$$

Доказать:

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

41. Пусть

$$\cos\theta+\cos\varphi=a; \qquad \sin\theta+\sin\varphi=b.$$

Вычислить

$$\cos(\theta+\varphi) \quad \text{и} \quad \sin(\theta+\varphi).$$

42. Дано, что α и β — различные решения уравнения:

$$a\cos x+b\sin x=c.$$

Доказать, что

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

43. Пусть

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}; \qquad \frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}.$$

Доказать, что

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}.$$

44. Дано:

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{1+2e\cos\beta+e^2}{e^2-1}.$$

Доказать:

1° $\dfrac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\dfrac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=\pm\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=-\dfrac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}.$

2° $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\pm\dfrac{1+e}{1-e}.$

45. Доказать, что если

$$\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha},$$

то одно из значений $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ есть $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

46. Пусть

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta; \quad \sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Доказать, что

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

47. Показать, что если

$$(x-a)\cos\theta + y\sin\theta = (x-a)\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = a$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} = 2l,$$

то

$$y^2 = 2ax - (1-l^2)x^2.$$

48. Доказать, что из равенств:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = x\cos\varphi + y\sin\varphi = 2a$$

и

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 1$$

следует:

$$y^2 = 4a(a-x).$$

49. Пусть

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta.$$

Доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{\theta+\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

50. Показать, что если

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\theta)}{b} = \frac{\cos(x+2\theta)}{c} = \frac{\cos(x+3\theta)}{d},$$

то

$$\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}.$$

51. Пусть

$$\cos^2\theta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}; \qquad \cos^2\varphi = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}; \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Доказать:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

52. Доказать, что если

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta; \qquad \cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\beta; \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

то

$$\sin^2\beta = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha_1} - 1\right).$$

53. Пусть

$$x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=x\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=$$
$$=x\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\gamma-\alpha).$$

Доказать:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

54. Доказать, что если

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\sin\alpha}=0$$

и

$$\frac{\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=0,$$

то

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha);\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta).$$

55. Дано:

$$n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta).$$

Доказать:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\operatorname{tg}\beta.$$

56. Исключить θ из уравнений:

$$\cos(\alpha-3\theta)=m\cos^3\theta,$$
$$\sin(\alpha-3\theta)=m\sin^3\theta.$$

57. Исключить θ из уравнений:

$$(a-b)\sin(\theta+\varphi)=(a+b)\sin(\theta-\varphi)$$
$$a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-b\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=c.$$

58. Показать, что результатом исключения θ и φ из уравнений:

$$\cos\theta=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha};\quad \cos\varphi=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha};\quad \cos(\theta-\varphi)=\sin\beta\sin\gamma$$

будет:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma.$$

59. Исключить θ и φ из уравнений:

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1;\quad a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi.$$

60. Доказать, что если

$$\cos(\theta-\alpha)=a;\quad \sin(\theta-\beta)=b,$$

то

$$a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta).$$

61. Решить уравнение:

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0.$$

62. Решить уравнение:

$$\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

63. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos x}{1-\sin x}.$$

64. Решить уравнение:

$$32 \cos^6 x - \cos 6x = 1.$$

65. Решить и исследовать уравнение:

$$\sin 3x + \sin 2x = m \sin x.$$

66. Решить уравнение:

$$(1+k)\frac{\cos x \cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)} = 1 + k \cos 2x.$$

67. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0.$$

68. Решить уравнение:

$$2 \lg_x a + \lg_{ax} a + 3 \lg_{a^2x} a = 0.$$

69. Найти положительные решения:

$$x^{x+y} = y^a; \quad y^{x+y} = x^{4a} \qquad (a > 0).$$

70. Найти положительные значения неизвестных x, y, u и v, удовлетворяющих системе:

$$u^p v^q = a^x, \quad u^q v^p = a^y, \quad u^x v^y = b, \quad u^y v^x = c$$

$$(a,\ b,\ c > 0 \text{ и } p^2 - q^2 \neq 0).$$

§ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОЛИНОМЫ

Мы предполагаем известными основные операции с комплексными числами (сложение, умножение, деление и извлечение корня из комплексного числа). Равным образом, мы считаем известными тригонометрическую форму комплексного числа и формулу Моавра. При разложении многочленов на множители и решении некоторых уравнений высшей степени важную роль играет так называемая теорема Безу, обычно приводимая в учебниках по элементарной алгебре. Напомним ее формулировку. Если $f(x)$ есть многочлен относительно x и если $f(a) = 0$, то $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка. Отсюда (допуская существование одного корня у многочлена) вытекает возможность разложения многочлена n-й степени на n линейных множителей, равных

или неравных. Отсюда же, равным образом, может быть получено и следующее предложение, которым мы в дальнейшем неоднократно пользуемся: если известно, что некоторый многочлен n-й степени относительно x обращается в нуль при $n+1$ различных значениях x, то такой многочлен тождественно равен нулю. Следовательно, если два многочлена n-й степени относительно x принимают равные значения при $n+1$ различных значениях x, то такие многочлены равны тождественно, то есть коэффициенты при одинаковых степенях x у этих многочленов совпадают. Наконец, упомянем еще о связи между корнями уравнения n-й степени и его коэффициентами. Пусть многочлен

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$$

имеет корни: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так что существует разложение:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n).$$

Тогда имеем соотношения:

$$\begin{gathered}
x_1+x_2+\ldots+x_n=-p_1\\
x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=p_2\\
x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-p_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1x_2\ \ldots\ x_n=\pm p_n.
\end{gathered}$$

1. Пусть x и y два комплексных числа.

Доказать:

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2\{|x|^2+|y|^2\}.$$

Символом $|\alpha|$ мы обозначаем модуль комплексного числа α.

2. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию:

1° $\bar{x}=x^2$.

2° $\bar{x}=x^3$.

Символом $\bar{x}$ обозначаем число, сопряженное с x.

3. Доказать, что

$$\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}\leqq\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\\+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

где a_i и b_i — любые вещественные числа ($i=1, 2, 3, \ldots, n$).

4. Показать, что

$$(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)=a^3+b^3+c^3-3abc,$$

если

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0.$$

5. Доказать, что

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=\\=X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ,$$

если

$$X = ax + cy + bz,$$
$$Y = cx + by + az,$$
$$Z = bx + ay + cz.$$

6. Дано:

$$x + y + z = A,$$
$$x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = B,$$
$$x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = C.$$

Отметим, что ε как в этой задаче, так и в следующей определяется равенством: $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

1° Выразить x, y, z через A, B и C.

2° Доказать:

$$|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3\{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\}.$$

7. Пусть

$$A = x + y + z, \qquad A' = x' + y' + z', \qquad AA' = x'' + y'' + z'';$$
$$B = x + y\varepsilon + z\varepsilon^2, \qquad B' = x' + y'\varepsilon + z'\varepsilon^2, \qquad BB' = x'' + y''\varepsilon + z''\varepsilon^2;$$
$$C = x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon, \qquad C' = x' + y'\varepsilon^2 + z'\varepsilon, \qquad CC' = x'' + y''\varepsilon^2 + z''\varepsilon.$$

Выразить x'', y'' и z'' через x, y, z и x', y', z'.

8. Доказать тождество:

$$(ax - by - cz - dt)^2 + (bx + ay - dz + ct)^2 + (cx + dy + az - bt)^2 +$$
$$+ (dx - cy + bz + at)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

9. Доказать следующие равенства:

1° $\dfrac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi} = 1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \varphi - \ldots + A,$

где

$$A = (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{tg}^n \varphi \qquad \text{при } n \text{ четном;}$$
$$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \varphi \qquad \text{при } n \text{ нечетном.}$$

2° $\dfrac{\sin n\varphi}{\cos^n \varphi} = \binom{n}{1} \operatorname{tg} \varphi - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \varphi + \ldots + A,$

где

$$A = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \varphi \qquad \text{при } n \text{ четиом;}$$
$$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}^n \varphi \qquad \text{при } n \text{ нечетном.}$$

Отметим, что в этой задаче, как и в последующих,

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

10. Доказать следующие равенства:

1° $$2^{2m}\cos^{2m}x=\sum_{k=0}^{k=m-1}2\binom{2m}{k}\cos 2(m-k)x+\binom{2m}{m}.$$

2° $$2^{2m}\sin^{2m}x=\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^{m+k}2\binom{2m}{k}\cos 2(m-k)x+\binom{2m}{m}.$$

3° $$2^{2m}\cos^{2m+1}x=\sum_{k=0}^{k=m}\binom{2m+1}{k}\cos(2m-2k+1)x.$$

4° $$2^{2m}\sin^{2m+1}x=\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^{m+k}\binom{2m+1}{k}\sin(2m-2k+1)x.$$

11. Пусть

$$u_n=\cos\alpha+r\cos(\alpha+\theta)+r^2\cos(\alpha+2\theta)+\ldots+r^n\cos(\alpha+n\theta),$$
$$v_n=\sin\alpha+r\sin(\alpha+\theta)+r^2\sin(\alpha+2\theta)+\ldots+r^n\sin(\alpha+n\theta).$$

Показать, что

$$u_n=\frac{\cos\alpha-r\cos(\alpha-\theta)-r^{n+1}\cos[(n+1)\theta+\alpha]+r^{n+2}\cos(n\theta+\alpha)}{1-2r\cos\theta+r^2},$$
$$v_n=\frac{\sin\alpha-r\sin(\alpha-\theta)-r^{n+1}\sin[(n+1)\theta+\alpha]+r^{n+2}\sin(n\theta+\alpha)}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

12. Упростить следующие суммы:

1° $$S=1+n\cos\theta+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos 2\theta+\ldots=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\cos k\theta\quad (C_n^0=1).$$

2° $$S'=n\sin\theta+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin 2\theta+\ldots=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\sin k\theta.$$

13. Доказать тождество:

$$\sin^{2p}\alpha+\sin^{2p}2\alpha+\sin^{2p}3\alpha+\ldots+\sin^{2p}n\alpha=\frac{1}{2}+n\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2p},$$

если $\alpha=\frac{\pi}{2n}$ и $p<2n$ (p — целое положительное).

14. Доказать:

1° Многочлен $x(x^{n-1}-na^{n-1})+a^n(n-1)$ делится на $(x-a)^2$.

2° Многочлен $(1-x^n)(1+x)-2nx^n(1-x)-n^2x^n(1-x)^2$ делится на $(1-x)^3$.

15. Доказать:

1° $(x+y)^n-x^n-y^n$ делится на $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$, если n нечетное число, не делящееся на 3.

2° $(x+y)^n-x^n-y^n$ делится на $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$, если n при делении на 6 дает в остатке единицу, т. е. если $n\equiv 1 \pmod 6$.

16. Показать справедливость следующих тождеств:

1° $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$.

2° $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

3° $(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

17. Показать, что выражение

$$(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m \qquad (m \text{ нечетное})$$

делится на

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

18. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы

$$x^3+y^3+z^3+kxyz$$

делилось бы на

$$x+y+z.$$

19. Вывести условие, при котором x^n-a^n делится на x^p-a^p (n и p — целые положительные числа).

20. Выяснить, делится ли многочлен:

$x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$ (a, b, c, d целые положительные) на

$$x^3+x^2+x+1.$$

21. Выяснить, при каком n многочлен $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}$ делится на многочлен $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$.

22. Доказать, что

1° Многочлен $(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi$ делится на x^2+1.

2° Многочлен $x^n\sin\varphi-\varrho^{n-1}x\sin n\varphi+\varrho^n\sin(n-1)\varphi$ делится на $x^2-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2$.

23. Выяснить, при каких значениях p и q двучлен x^4+1 делится на x^2+px+q.

24. Выделить вещественную и мнимую части в выражении $\sqrt{a+bi}$, т. е. представить это выражение в виде $x+yi$, где x и y вещественны.

25. Найти все корни уравнения

$$x^n=1.$$

26. Найти сумму p-х степеней корней уравнения

$$x^n=1 \qquad (p \text{ — целое положительное}).$$

27. Пусть

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n} \qquad (n \text{ — целое положительное})$$

и пусть

$$A_k = x + y\varepsilon^k + z\varepsilon^{2k} + \ldots + w\varepsilon^{(n-1)k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

где x, y, z, $\ldots$, u, w суть n произвольных комплексных чисел.

Доказать:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} |A_k|^2 = n\{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \ldots + |w|^2\} \qquad \text{(см. задачу 6).}$$

28. Доказать тождества:

$$1^\circ \quad x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

$$2^\circ \quad x^{2n+1} - 1 = (x - 1)\prod_{k=1}^{k=n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right).$$

$$3^\circ \quad x^{2n+1} - 1 = (x + 1)\prod_{k=1}^{k=n}\left(x^2 + 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right).$$

$$4^\circ \quad x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right).$$

29. Доказать тождества:

$$1^\circ \quad \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

$$2^\circ \quad \cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n},$$

если n четное.

30. Пусть корни уравнения

$$x^n = 1$$

будут 1, α, β, γ, $\ldots$, λ.

Показать, что

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots(1-\lambda) = n.$$

31. Пусть

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

корни уравнения

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Вычислить выражение:

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - 1}.$$

32. Не решая уравнений:

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1,$$

найти:

$$x^2+y^2+z^2.$$

33. Доказать, что если $\cos\alpha+i\sin\alpha$ есть решение уравнения

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0,$$

то

$p_1\sin\alpha+p_2\sin 2\alpha+\ldots+p_n\sin n\alpha=0$ ($p_1, p_2, \ldots, p_n$ вещественны).

34. Если a, b, c, ..., k суть корни уравнения

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

(p_1, p_2, ..., p_n вещественны), то доказать, что

$$(1+a^2)(1+b^2)\ldots(1+k^2)=(1-p_2+p_4-\ldots)^2+(p_1-p_3+p_5-\ldots)^2$$

35. Показать, что если уравнения:

$$x^3+px+q=0$$
$$x^3+p'x+q'=0$$

имеют общий корень, то

$$(pq'-qp')(p-p')^2=(q-q')^3.$$

36. Доказать следующие тождества:

$$1^\circ\quad \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(5-3\sqrt[3]{7})}.$$

$$2^\circ\quad \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3\sqrt[3]{9}-6)}.$$

37. Пусть $a+b+c=0$.

Обозначим:

$$a^k+b^k+c^k=s_k.$$

Доказать следующие соотношения (см. задачи 23, 24, 26 § 1):

$$2s_4=s_2^2;\qquad 6s_5=5s_2s_3;$$
$$6s_7=7s_3s_4;\qquad 10s_7=7s_2s_5;$$
$$25s_7s_3=21s_5^2;\qquad 50s_7^2=49s_4s_5^2;$$

$$s_{n+3}=abcs_n+\frac{1}{2}s_2s_{n+1}.$$

38. 1° Дано:

$$x+y=u+v,$$
$$x^2+y^2=u^2+v^2.$$

Доказать

$$x^n+y^n=u^n+v^n$$

при любом n.

2° Дано:

$$x+y+z=u+v+t,$$
$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+t^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+t^3.$$

Доказать

$$x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+t^n$$

при любом n.

39. Пусть

$$A=x_1+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^2,$$
$$B=x_1+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,$$

а x_1, x_2 и x_3 — корни кубического уравнения:

$$x^3+px+q=0.$$

Доказать, что A^3 и B^3 являются корнями квадратного уравнения:

$$z^2+27qz-27p^3=0.$$

40. Решить уравнение:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$$

при условии:

$$a+b=c+d.$$

41. Решить уравнение:

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c.$$

42. Решить уравнение:

$$(x+b+c)(x+a+c)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=0.$$

43. Решить уравнение:

$$x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

44. Решить уравнение:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

при условии:

$$a+b=b+c+d=d+e.$$

45. Решить уравнение:

$$(a+b+x)^3-4(a^3+b^3+x^3)-12abx=0.$$

46. Решить уравнение:

$$x^2+\frac{a^2x^2}{(a+x)^2}=m \qquad (a \text{ и } m>0).$$

Вывести условие, при котором все корни вещественны, и в этом случае определить число положительных и отрицательных корней.

47. Решить уравнение:

$$\frac{(5x^4+10x^2+1)(5a^4+10a^2+1)}{(x^4+10x^2+1)(a^4+10a^2+5)}=ax.$$

48. Решить уравнение:

$$1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_{2m}x^{2m-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}=\frac{2px^m-p^2}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}.$$

49. 1° Решить уравнение:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

при условии, что $x_1^2=x_2x_3$.

2° Решить уравнение:

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

если $x_1=x_2+x_3$.

50. 1° Решить систему:

$$y^3+z^3+a^3=3ayz,$$
$$z^3+x^3+b^3=3bzx,$$
$$x^3+y^3+c^3=3cxy.$$

2° Решить систему:

$$x^4-a=y^4-b=z^4-c=u^4-d=xyzu,$$

если $a+b+c+d=0$.

51. В разложении $1+(1+x)+\ldots+(1+x)^n$ по степеням x найти член, содержащий x^k.

52. Доказать, что коэффициент при x^s в разложении по степеням x выражения

$$\{(s-2)x^2+nx-s\}(x+1)^n$$

равен:

$$nC_n^{s-2}.$$

53. Доказать, что при $x>1$

$$px^q-qx^p-p+q>0$$

(p, q — целые положительные числа и $q>p$).

54. Пусть x и a — положительные числа. Определить наибольший член в разложении $(x+a)^n$.

55. Доказать:

$$1^\circ\quad i^m - i(i-1)^m + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}(i-2)^m + \ldots + (-1)^{i-1} i \cdot 1^m = 0,$$

если $i > m$.

$$2^\circ\quad m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^m + \ldots + (-1)^{m-1} m = m!$$

(i и m — целые положительные числа).

56. Доказать тождество:

$$(x^2+a^2)^n = \{x^n - C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^4 x^{n-4} a^4 \ldots\}^2 + \\ + \{C_n^1 x^{n-1} a - C_n^3 x^{n-3} a^3 + \ldots\}^2.$$

57. Определить коэффициент при x^l ($l = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n$) в следующих произведениях:

1° $\{1 + x + x^2 + \ldots + x^n\}\{1 + x + x^2 + \ldots + x^n\}$,

2° $\{1 + x + x^2 + \ldots + x^n\}\{1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n\}$,

3° $\{1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n\}\{1 + 2x + 3x^2 + \ldots$
$\ldots + (n+1)x^n\}$,

4° $\{1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n\}\{1 - 2x + 3x^2 - \ldots$
$\ldots + (-1)^n (n+1)x^n\}$.

58. Доказать:

1° $1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$.

2° $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{n-1} = 2^{2n-2}$, если n четное.

3° $1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{n-1} = 2^{2n-2}$, если n нечетное.

59. Доказать тождества:

$$1^\circ\quad C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

$$2^\circ\quad C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right).$$

$$3^\circ\quad C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right).$$

60. Доказать:

$$1^\circ\quad C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right).$$

$$2^\circ\quad C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

$$3^\circ\quad C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right).$$

$$4^\circ\quad C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

61. Доказать равенство:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=C_{n+1}^3+2(C_n^3+C_{n-1}^3+\ldots+C_2^3).$$

62. Если a_1, a_2, a_3 и a_4 — четыре последовательных коэффициента в разложении $(1+x)^n$ по степеням x, то

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

63. Доказать тождество:

$$\frac{1}{1!\,(n-1)!}+\frac{1}{3!\,(n-3)!}+\frac{1}{5!\,(n-5)!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!\,1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}\quad (n \text{ четное}).$$

64. Найти величину суммы:

$$s=C_n^1-3C_n^3+3^2C_n^5-3^3C_n^7+\ldots$$

65. Вычислить величины следующих сумм:

$$\sigma=1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots,$$
$$\sigma'=C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$$

66. Доказать тождества:

1° $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+4C_n^3+\ldots+(n+1)C_n^n=(n+2)\,2^{n-1}$.

2° $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3+\ldots+(-1)^{n-1}\,nC_n^n=0$.

67. Доказать, что

$$\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n=\frac{n}{n+1}.$$

68. Доказать:

1° $1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2° $2C_n^0+\frac{2^2C_n^1}{2}+\frac{2^3C_n^2}{3}+\frac{2^4C_n^3}{4}+\ldots+\frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

69. Доказать тождество:

$$C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

70. Доказать:

1° $C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\ldots+C_{n+k}^n=C_{n+k+1}^{n+1}$.

2° $C_n^0-C_n^1+C_n^2+\ldots+(-1)^hC_n^h=(-1)^hC_{n-1}^h$.

71. Показать, что имеют место равенства:

1° $C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \ldots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p$,

2° $C_n^0 C_n^r + C_n^1 C_n^{r+1} + \ldots + C_n^{n-r} C_n^n = \frac{2n!}{(n-r)!\,(n+r)!}$.

72. Доказать следующие тождества:

1° $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

2° $(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 + \ldots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n$.

3° $(C_{2n+1}^0)^2 - (C_{2n+1}^1)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 - \ldots - (C_{2n+1}^{2n+1})^2 = 0$.

4° $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$.

73. Пусть $f(x)$ есть многочлен, дающий при делении на $x-a$ остаток A, а при делении на $x-b$ $(a \neq b)$ остаток B. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-a)(x-b)$.

74. Пусть $f(x)$ есть многочлен, дающий при делении на $x-a$ остаток A, при делении на $x-b$ остаток B, а при делении на $x-c$ остаток C. Найти остаток от деления этого многочлена на

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

(a, b и c не равны между собою).

75. Найти многочлен относительно x степени $m-1$, который при m различных значениях x: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ принимает соответственно значения: $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

76. Пусть $f(x)$ есть многочлен, дающий при делении на $x-a$ остаток A_1, при делении на $x-a_2$ остаток A_2, ..., наконец при делении на $x-a_m$ остаток A_m. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$.

77. Доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ есть m произвольных различных величин, $f(x)$ есть многочлен степени меньше m, то существует тождество:

$$f(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} + \\ + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} + \ldots \\ \ldots + f(x_m)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}.$$

78. Доказать, что если $f(x)$ есть многочлен, степень которого меньше или равна $m-2$, и $x_1, x_2, \ldots, x_m$ есть m произвольных неравных величин, то имеет место тождество:

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} + \ldots \\ \ldots + \frac{f(x_m)}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})} = 0.$$

79. Положим:

$$s_n=\frac{x_1^n}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}+\frac{x_2^n}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}+\ldots+\frac{x_m^n}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}$$

($x_1, x_2, \ldots, x_m$ — m произвольных не равных между собою величин). Показать, что $s_n=0$, если $0 \leqq n < m-1$ и $s_{m-1}=1$, и вычислить s_n, если $n \geqq m$.

80. Вычислить:

$$s_{-n}=\frac{x_1^{-n}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}+\frac{x_2^{-n}}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}+\ldots+\frac{x_m^{-n}}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

81. Показать, что если $f(x)$ есть многочлен, степень которого меньше m, то дробь

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}$$

($x_1, x_2, \ldots, x_m$ — произвольные не равные между собою величины) может быть представлена в виде суммы m простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-x_m}$$

(где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ не зависят от x).

82. Решить систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{a_1-b_1}+\frac{x_2}{a_1-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_1-b_n}=1,\\
&\frac{x_1}{a_2-b_1}+\frac{x_2}{a_2-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_2-b_n}=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_1}{a_n-b_1}+\frac{x_2}{a_n-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n-b_n}=1.
\end{aligned}$$

83. Доказать, что имеет место тождество:

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}=\frac{C_n^1}{x+1}-\frac{2C_n^2}{x+2}+\frac{3C_n^3}{x+3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{nC_n^n}{x+n}.$$

В частности, например, справедливо тождество:

$$\frac{1}{n+1}=\frac{C_n^1}{2}-\frac{2}{3}C_n^2+\frac{3}{4}C_n^3-\frac{4}{5}C_n^4+\ldots$$

84. Доказать тождество:

$$(-1)^n\frac{a_1a_2\ldots a_n}{b_1b_2\ldots b_n}+\frac{(a_1-b_1)(a_2-b_1)\ldots(a_n-b_1)}{b_1(b_1-b_2)\ldots(b_1-b_n)}+$$
$$+\frac{(a_1-b_2)(a_2-b_2)\ldots(a_n-b_2)}{b_2(b_2-b_1)\ldots(b_2-b_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(a_1-b_n)\ldots(a_n-b_n)}{b_n(b_n-b_1)\ldots(b_n-b_{n-1})}=(-1)^n.$$

85. Доказать тождество:

$$\frac{(x+\beta)\ldots(x+n\beta)}{(x-\beta)\ldots(x-n\beta)}-1=$$
$$=\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{n-r}\frac{n(n+r)(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(r-1)^2)}{(r!)^2}\cdot\frac{r\beta}{x-r\beta}.$$

86. Пусть дан ряд чисел:

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ c_{k+1},\ \ldots$$

Положим:

$$\Delta c_k=c_{k+1}-c_k,$$

так что по данному ряду чисел можно построить второй ряд:

$$\Delta c_0,\ \Delta c_1,\ \Delta c_2,\ \ldots$$

Далее положим:

$$\Delta^2 c_k=\Delta c_{k+1}-\Delta c_k$$

и можно построить еще ряд чисел:

$$\Delta^2 c_0,\ \Delta^2 c_1,\ \Delta^2 c_2,\ \ldots$$

и т. д.

Доказать следующие формулы:

1° $$c_{k+n}=c_k+\frac{n}{1}\Delta c_k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 c_k+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 c_k+\ldots+\Delta^n c_k.$$

2° $$\Delta^n c_k=c_{k+n}-\frac{n}{1}c_{k+n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}c_{k+n-2}+\ldots+(-1)^n c_k.$$

87. Показать, что если $f(x)$ есть любой многочлен от x степени n, то имеет место тождество:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n f(0),$$

где $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(0)$, ..., $\Delta^n f(0)$ получаются, исходя из следующего основного ряда:

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ \ldots$$

88. Показать, что если

$$x^n = A_0 + \frac{A_1}{1}(x-1) + \frac{A_2}{2!}(x-1)(x-2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

то

$$A_s = (s+1)^n - C_s^1 s^n + C_s^2 (s-1)^n + \ldots + (-1)^s C_s^s \cdot 1^n.$$

89. Доказать тождество:

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n}\right\} = \frac{1}{x^2} - \frac{C_n^1}{(x+1)^2} +$$
$$+ \frac{C_n^2}{(x+2)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(x+n)^2}.$$

90. Пусть

$$\varphi_k(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1).$$

Доказать, что имеет место тождество:

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x) + C_n^1 \varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) + C_n^2 \varphi_{n-2}(x)\varphi_2(y) + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1}\varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y).$$

91. Доказать следующие тождества:

1° $$x^n + y^n = p^n - \frac{n}{1}p^{n-2}q + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}p^{n-4}q^2 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r \frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{r!}p^{n-2r}q^r + \ldots$$

2° $$\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} = p^n - C_{n-1}^1 p^{n-2}q + C_{n-2}^2 p^{n-4}q^2 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r C_{n-r}^r p^{n-2r}q^r + \ldots,$$

где

$$p = x + y,\quad q = xy.$$

92. Пусть $x + y = 1$.

Доказать:

$$x^m(1 + C_m^1 y + C_{m+1}^2 y^2 + \ldots + C_{2m-2}^{m-1} y^{m-1}) +$$
$$+ y^m(1 + C_m^1 x + \ldots + C_{2m-2}^{m-1} x^{m-1}) = 1.$$

93. Доказать справедливость тождества:

$$\frac{1}{(x-a)^m (x-b)^m} = \frac{1}{(a-b)^m}\left\{\frac{1}{(x-a)^m} + \frac{C_m^1}{(x-a)^{m-1}(b-a)} + \frac{C_{m+1}^2}{(x-a)^{m-2}(b-a)^2} + \ldots + \frac{C_{2m-2}^{m-1}}{(x-a)(b-a)^{m-1}}\right\} + \frac{1}{(b-a)^m}\left\{\frac{1}{(x-b)^m} + \frac{C_m^1}{(x-b)^{m-1}(a-b)} + \ldots + \frac{C_{2m-2}^{m-1}}{(x-b)(a-b)^{m-1}}\right\}.$$

94. Показать, что всегда можно подобрать постоянные A_1, A_2, A_3, ... так, чтобы имело место тождество:

$$(x+y)^n = x^n + y^n + A_1 xy(x^{n-2} + y^{n-2}) + A_2 x^2 y^2 (x^{n-4} + y^{n-4}) + \ldots$$

Определить эти постоянные.

95. Решить систему:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a_1, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 &= a_2, \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 &= a_3, \\ x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 &= a_4. \end{aligned}$$

Показать, как решается общая система:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= a_1, & (1)\\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n &= a_2, & (2)\\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + \ldots + x_n y_n^2 &= a_3, & (3)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ x_1 y_1^{2n-1} + x_2 y_2^{2n-1} + \ldots + x_n y_n^{2n-1} &= a_{2n}. & (2n) \end{aligned}$$

96. Решить систему:

$$\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 2, \\ px + qy + rz + su + tv &= 3, \\ p^2x + q^2y + r^2z + s^2u + t^2v &= 16, \\ p^3x + q^3y + r^3z + s^3u + t^3v &= 31, \\ p^4x + q^4y + r^4z + s^4u + t^4v &= 103, \\ p^5x + q^5y + r^5z + s^5u + t^5v &= 235, \\ p^6x + q^6y + r^6z + s^6u + t^6v &= 674, \\ p^7x + q^7y + r^7z + s^7u + t^7v &= 1669, \\ p^8x + q^8y + r^8z + s^8u + t^8v &= 4526, \\ p^9x + q^9y + r^9z + s^9u + t^9v &= 11595. \end{aligned}$$

97. Пусть m и μ — целые положительные числа ($\mu \leqq m$). Положим:

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)} = (m, \mu).$$

Доказать:

1° $(m, \mu)=(m, m-\mu)$.

2° $(m, \mu+1)=(m-1, \mu+1)+x^{n-\mu-1}(m-1, \mu)$.

3° $(m, \mu+1)=(\mu, \mu)+x(\mu+1, \mu)+x^2(\mu+2, \mu)+\ldots$
$$\ldots+x^{m-\mu-1}(m-1, \mu).$$

4° (m, μ) есть многочлен относительно x.

5° $1-(m, 1)+(m, 2)-(m, 3)+\ldots$ равно
$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-1})$, если m четное,
0, если m нечетное

(Gauss, Summatio quarumdam serierum singularium, Werke, Bd. II).

98. Доказать:

1° $(1+xz)(1+x^2z)\ldots(1+x^nz)=$
$$=1+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\ldots(1-x^{n-k+1})}{(1-x^1)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k.$$

2° $(1+xz)(1+x^3z)\ldots(1+x^{2n-1}z)=$
$$=1+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(1-x^{2n})(1-x^{2n-2})\ldots(1-x^{2n-2k+2})}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}x^{k^2}z^k.$$

99. Пусть
$$p_k=(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k).$$
Доказать, что
$$\frac{1}{p_n}-\frac{x}{p_1p_{n-1}}+\frac{x^3}{p_2p_{n-2}}-\ldots\pm\frac{x^{\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}}}{p_n}=1.$$

100. Определить коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ в следующем тождестве:
$$(1+xz)(1+xz^{-1})(1+x^3z)(1+x^3z^{-1})\ldots(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1}=$$
$$=C_0+C_1(z+z^{-1})+C_2(z^2+z^{-2})+\ldots+C_n(z^n+z^{-n}).$$

101. Пусть
$$u_k=\frac{\sin 2nx\sin(2n-1)x\ldots\sin(2n-k+1)x}{\sin x\sin 2x\ldots\sin kx}.$$
Доказать:

1° $1-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{2n}=$
$$=2^n\cdot(1-\cos x)(1-\cos 3x)\ldots[1-\cos(2n-1)x].$$

2° $1-u_1^2+u_2^2-u_3^2+\ldots+u_{2n}^2=$
$$=(-1)^n\frac{\sin(2n+2)x\sin(2n+4)x\ldots\sin 4nx}{\sin 2x\sin 4x\ldots\sin 2nx}.$$

§ 7. ПРОГРЕССИИ И СУММЫ

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии, рассматриваемые в настоящем параграфе, требуют для своего решения только обычных сведений, сообщаемых в курсах элементарной алгебры. Суммирование же конечных рядов обычно производится методом конечных разностей. Пусть требуется найти сумму

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n).$$

Ищем функцию $F(k)$, которая удовлетворяла бы соотношению:

$$F(k+1)-F(k)=f(k).$$

Тогда легко видеть, что

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=[F(2)-F(1)]+[F(3)-F(2)]+\ldots+$$
$$+[F(n+1)-F(n)]=F(n+1)-F(1).$$

1. Пусть a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что величины:

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}$$

образуют точно также арифметическую прогрессию.

2. Доказать, что если a, b и c — соответственно p-й, q-й и r-й члены арифметической прогрессии, то

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0.$$

3. Пусть в арифметической прогрессии $a_p=q$; $a_q=p$ (a_n—n-й член прогрессии). Найти a_m.

4. В арифметической прогрессии $S_p=q$; $S_q=p$ (S_n—есть сумма n первых членов прогрессии). Найти S_{p+q}.

5. Пусть в арифметической прогрессии $S_p=S_q$. Доказать, что $S_{p+q}=0$.

6. Дано, что в арифметической прогрессии $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$.

Доказать: $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

7. Показать, что всякая степень n^k ($k\geqq 2$ целое) может быть представлена в виде суммы n последовательных нечетных чисел.

8. Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образует арифметическую прогрессию, причем $a_1=0$. Упростить выражение:

$$S=\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n-1}}-a_2\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}}\right).$$

9. Доказать, что во всякой арифметической прогрессии:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

имеем:

$$S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

10. Показать, что во всякой арифметической прогрессии:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

имеем:

$$S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2 = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2).$$

11. Пусть $S(n)$ — сумма n первых членов арифметической прогрессии.

Доказать:

1° $S(n+3) - 3S(n+2) + 3S(n+1) - S(n) = 0.$

2° $S(3n) = 3\{S(2n) - S(n)\}.$

12. Пусть последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$ является арифметической прогрессией.

Доказать, что последовательность $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$, где

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$
$$S_2 = a_{n+1} + \ldots + a_{2n};\quad S_3 = a_{2n+1} + \ldots + a_{3n};\ \ldots,$$

представляет также арифметическую прогрессию, разность которой в n^2 раз больше разности данной прогрессии.

13. Доказать, что если a, b, c — соответственно p-й, q-й и r-й члены одновременно как арифметической, так и геометрической прогрессий, то

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1.$$

14. Доказать:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n =$$
$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1}).$$

15. Пусть S_n есть сумма n первых членов геометрической прогрессии.

Доказать:

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

16. Пусть числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ составляют геометрическую прогрессию.

Зная суммы:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$
$$S' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

найти произведение

$$P = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

17. Если $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ вещественны, то равенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2$$

возможно только тогда, когда $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — составляют геометрическую прогрессию. Доказать это.

18. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — геометрическая прогрессия со знаменателем q и пусть $S_m = a_1 + \ldots + a_m$.

Найти более простые выражения для следующих сумм:

1° $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

2° $\dfrac{1}{a_1^2 - a_2^2} + \dfrac{1}{a_2^2 - a_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^2 - a_n^2}$.

3° $\dfrac{1}{a_1^k + a_2^k} + \dfrac{1}{a_2^k + a_3^k} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^k + a_n^k}$.

19. Доказать, что во всякой арифметической прогрессии, разность которой не равна нулю, произведение двух членов, равноотстоящих от крайних членов, возрастает по мере удаления от концов ее к середине.

20. Арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами имеют одинаковое число членов и одинаковые крайние члены. Для какой из них сумма членов будет больше?

21. Арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами имеют первые два члена одинаковыми.

Доказать, что все прочие члены арифметической прогрессии не больше соответствующих членов геометрической.

22. Найти сумму n членов ряда:

$$S_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n.$$

23. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию, а $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют геометрическую прогрессию. Найти выражение для суммы:

$$s = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n.$$

24. Найти сумму:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2.$$

25. Пусть

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Доказать:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}; \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

26. Доказать следующую общую формулу:

$$(k+1) S_k + \frac{(k+1)k}{1 \cdot 2} S_{k-1} + \frac{(k+1)k(k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} S_{k-2} + \ldots$$
$$\ldots + (k+1) S_1 + S_0 = (n+1)^{k+1} - 1.$$

27. Введем обозначение:

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k = S_k(n),$$

Доказать формулу:

$$nS_k(n) = S_{k+1}(n) + S_k(n-1) + S_k(n-2) + \ldots + S_k(2) + S_k(1).$$

28. 1° Доказать, что

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = An^{k+1} + Bn^k + Cn^{k-1} + \ldots + Ln,$$

т. е. что сумма $S_k(n)$ может быть представлена как многочлен степени $k+1$ относительно n, с коэффициентами, не зависящими от n, и без свободного члена.

2° Показать, что

$$A = \frac{1}{k+1}, \quad \text{а} \quad B = \frac{1}{2}.$$

29. Показать, что имеют место следующие формулы:

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_6 = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42} = \frac{n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-(3n^2+3n-1)]}{42},$$

$$S_7 = \frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24} = \frac{n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2-2(2n^2+2n-1)]}{24}.$$

30. Доказать, что имеют место следующие соотношения:

$$S_3 = S_1^2; \quad 4S_1^3 = S_3 + 3S_5; \quad 2S_5 + S_3 = 3S_2^2; \quad S_5 + S_7 = 2S_3^2.$$

31. Рассмотрим числа:

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ \ldots,$$

определяемые символическим равенством:

$$(B+1)^{k+1} - B^{k+1} = k+1 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и начальным значением $B_0 = 1$. Символ состоит в том, что, развернув левую часть этого равенства по формуле бинома Ньютона, надо везде степени заменить через индексы. Таким образом, приведенное символическое равенство тождественно со следующим обыкновенным:

$$B_{k+1} + C_{k+1}^1 B_k + C_{k+1}^2 B_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k B_1 + B_0 - B_{k+1} = k+1.$$

1° Вычислить при помощи этого равенства $B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{10}$.

2° Показать, что имеет место следующая формула:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \frac{1}{k+1}\left\{n^{k+1} + C_{k+1}^1 B_1 n^k + C_{k+1}^2 B_2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k B_k n\right\}.$$

32. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = b^2.$$

Определить эту прогрессию.

33. Определить суммы следующих рядов:

1° $1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$.

2° $1^3 + 2^3x + 3^3x^2 + \ldots + n^3x^{n-1}$.

34. Определить суммы следующих рядов:

1° $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

2° $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

35. Определить суммы следующих рядов:

1° $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}n$.

2° $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2$.

3° $1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \ldots - (4n-1)^2$.

4° $2\cdot1^2 + 3\cdot2^2 + \ldots + (n+1)\,n^2$.

36. Найти сумму n чисел вида:

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots$$

37. Доказать тождество:

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = \{x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \ldots + (-1)^n 2xy^{2n}\}^2 + \\ + \{y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \ldots + (-1)^n 2yx^{2n}\}^2.$$

38. Найти сумму произведений чисел: $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$, взятых по два.

39. Доказать тождество:

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + 2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots + (n-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \\ + n = \frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{x^n - 1}{x-1}\right)^2.$$

40. Доказать тождество:

1° $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2° $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

3° $\frac{1}{1\cdot3\cdot5} - \frac{2}{3\cdot5\cdot7} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

41. Вычислить сумму:

$$S=\frac{1^4}{1\cdot 3}+\frac{2^4}{3\cdot 5}+\frac{3^4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}.$$

42. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Доказать тождество:

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

43. Доказать, что

1° $\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{n+1}{(n+2)!}+\ldots+\dfrac{n+p}{(n+p+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+p+1)!}$.

2° $\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+2)!}+\ldots+\dfrac{1}{(n+p+1)!}<\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+p+1)!}\right]$

(n и p — любые целые положительные числа).

44. Упростить следующее выражение:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\ldots+\frac{2^n}{x^{2^n}+1}.$$

45. Пусть

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Доказать:

$$\frac{n+p+1}{n-p+1}\left\{\frac{n-p}{n(p+1)}+\frac{n-p-1}{(n-1)(p+2)}+\ldots+\frac{1}{n(p+1)}\right\}=S_n-S_p.$$

46. Пусть

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

$$S_n'=\frac{n+1}{2}-\left\{\frac{1}{n(n-1)}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}+\ldots+\frac{n-2}{2\cdot 3}\right\}.$$

Доказать, что $S_n'=S_n$.

47. Пусть S_k есть сумма первых k членов арифметической прогрессии. Какова должна быть эта прогрессия для того, чтобы отношение $\dfrac{S_{kx}}{S_x}$ не зависело от x?

48. Дано, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию. Найти следующую сумму:

$$S=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i+a_{i+2}}.$$

49. Найти сумму:

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}+\ldots+\frac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}.$$

50. Показать, что

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

51. Доказать следующие формулы:

1° $$\sin a+\sin(a+h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

2° $$\cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

52. Найти величины следующих сумм:

$$S=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$
$$S'=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

53. Показать, что

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha}=\operatorname{tg}n\alpha.$$

54. Вычислить суммы:

$$S_n'=\cos^2x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 2nx,$$
$$S_n''=\sin^2x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 2nx.$$

55. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sin\frac{m\pi i}{p+1}\sin\frac{n\pi i}{p+1}=\begin{cases}-\dfrac{p+1}{2}, & \text{если } m+n \text{ делится на } 2(p+1);\\ \dfrac{p+1}{2}, & \text{если } m-n \text{ делится на } 2(p+1);\\ 0, & \text{если } m\neq n \text{ и если } m+n \text{ и}\\ & m-n \text{ не делятся на } 2(p+1).\end{cases}$$

56. Найти сумму:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+1\cdot2x^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+2\cdot3x^2}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+n(n+1)x^2}\quad(x>0).$$

57. Найти сумму:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{1+a_1a_2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{1+a_2a_3}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{1+a_na_{n+1}},$$

если a_1, a_2, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью r ($a_1>0$, $r>0$).

58. Вычислить сумму:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \operatorname{arc\,tg} \frac{2k}{2+k^2+k^4}.$$

59. Решить систему:

$$x_1 \sin\frac{\pi}{n} + x_2 \sin 2\frac{\pi}{n} + x_3 \sin 3\frac{\pi}{n} + \ldots + x_{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{n} = a_1,$$
$$x_1 \sin\frac{2\pi}{n} + x_2 \sin 2\frac{2\pi}{n} + x_3 \sin 3\frac{2\pi}{n} + \ldots + x_{n-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n} = a_2,$$
$$x_1 \sin\frac{3\pi}{n} + x_2 \sin 2\frac{3\pi}{n} + x_3 \sin 3\frac{3\pi}{n} + \ldots + x_{n-1}\sin(n-1)\frac{3\pi}{n} = a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + x_2 \sin 2\frac{(n-1)\pi}{n} + x_3 \sin 3\frac{(n-1)\pi}{n} + \ldots$$
$$\ldots + x_{n-1}\sin(n-1)\frac{(n-1)\pi}{n} = a_{n-1}.$$

§ 8. НЕРАВЕНСТВА

Предполагаем известными основные свойства неравенств. Напомним их вкратце.

1° Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2° Если $a > b$, то $a + m > b + m$.

3° Если $a > b$, то $am > bm$ при $m > 0$ и $am < bm$ при $m < 0$, т. е. при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на обратный.

4° Если $a > b > 0$, то $a^x > b^x$, если $x > 0$.

Это последнее неравенство легко доказывается для рационального x. В самом деле, допустим сначала, что $x = m$ есть целое положительное число. Тогда:

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1}).$$

Но обе скобки, стоящие справа, больше нуля, поэтому $a^m - b^m > 0$ и $a^m > b^m$. Положим теперь $x = \frac{1}{m}$. Тогда $a^x - b^x = \sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}$. Имеем:

$$(a-b) = (\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}} + \ldots + \sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Отсюда, действительно, следует, что

$$\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b} > 0, \text{ т. е. } \sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}.$$

Пусть, наконец, $x=\frac{p}{q}$. Имеем:

$$a^x-b^x=a^{\frac{p}{q}}-b^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}-\sqrt[q]{b^p}.$$

Но $a^p>b^q$ (по доказанному), следовательно, и $\sqrt[q]{a^p}>\sqrt[q]{b^p}$. Для доказательства же этого неравенства, при иррациональном x можно рассматривать x как предел последовательности рациональных чисел и прибегнуть к предельному переходу.

5° Если $a>1$ и $x>y>0$, то $a^x>b^y$, если же $0<a<1$ и $x>y>0$, то $a^x<a^y$. Доказательство сводится в основном к тому, что $a^\alpha>1$, если $\alpha>0$ и $a>1$ и может быть получено из 4°.

6° $\operatorname{Log}_a x>\operatorname{Log}_a y$, если $x>y$ и $a>1$ и $\operatorname{Log}_a x<\operatorname{Log}_a y$, если $x>y$ и $0<a<1$.

Из задач, рассматриваемых в этом параграфе, несомненно наибольший интерес представляет задача 30 как по данным методам ее решения, так и по количеству следствий. Отметим также задачу 50, дающую неравенства, полезные во многих случаях.

1. Показать, что

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2} \qquad (n \text{ — целое положительное}).$$

2. Пусть n и p — целые положительные числа и $n\geqq 1$, $p\geqq 1$. Доказать:

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}.$$

3. Доказать, что сумма любого числа дробей, взятых из совокупности

$$\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2},\ \ldots,$$

всегда меньше единицы.

4. Доказать, что

$$\sqrt[n]{n!}\geqq\sqrt{n}.$$

5. Показать, что если a есть недостаточное значение $\sqrt{A}$ с точностью до 1 $(a<\sqrt{A}<a+1)$, то

$$a+\frac{A-a^2}{2a+1}<\sqrt{A}<a+\frac{A-a^2}{2a+1}+\frac{1}{4(2a+1)}.$$

6. Доказать:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2.$$

7. Доказать:

$$\frac{1}{2\sqrt{s}}<\frac{1}{4^s}C_{2s}^s<\frac{1}{\sqrt{2s+1}}.$$

8. Доказать:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \geqq 1+\operatorname{ctg}\theta \qquad (0<\theta<\pi).$$

9. Показать, что если $A+B+C=\pi$ (A, B, $C>0$) и угол C тупой, то

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B<1.$$

10. Пусть $\operatorname{tg}\theta=n\operatorname{tg}\varphi$ ($n>0$).
Доказать:

$$\operatorname{tg}^2(\theta-\varphi) \leqq \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

11. Показать, что если

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma, \text{ то } \cos 2\gamma \leqq 0.$$

12. Пусть имеем n дробей:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \quad b_i>0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что дробь

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

содержится между наибольшей и наименьшей из этих дробей.

13. Доказать, что

$$\sqrt[m+n+\ldots+p]{ab\ldots l}$$

заключается между наибольшей и наименьшей из величин:

$$\sqrt[m]{a}, \quad \sqrt[n]{b}, \ldots, \sqrt[p]{l}.$$

14. Допустим:

$$0<\alpha<\beta<\gamma<\ldots<\lambda<\frac{\pi}{2}.$$

Доказать:

$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\ldots+\sin\lambda}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\ldots+\cos\lambda}<\operatorname{tg}\lambda.$$

15. Пусть

$$x^2=y^2+z^2 \qquad (x, y, z>0).$$

Доказать, что

$$x^\lambda>y^\lambda+z^\lambda, \quad \text{если } \lambda>2,$$
$$x^\lambda<y^\lambda+z^\lambda, \quad \text{если } \lambda<2.$$

16. Доказать, что если

$$a^2+b^2=1, \qquad m^2+n^2=1,$$

то

$$|am+bn| \leqq 1.$$

17. Пусть

a, b, c и $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ положительны.

Доказать:

$$abc \geqq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

18. Пусть

$$A+B+C=\pi.$$

Доказать:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqq 1.$$

19. Пусть

$$A+B+C=\pi \quad (A,\ B,\ C>0).$$

Доказать:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

20. Дано:

$$A+B+C=\pi \quad (A,\ B,\ C>0).$$

Доказать:

1° $\cos A+\cos B+\cos C \leqq \frac{3}{2}$.

2° $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

21. Доказать, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \qquad (a,\ b,\ c \text{ и } d>0).$$

22. Доказать, что

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \qquad (a>0,\ b>0).$$

23. Доказать, что

1° $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad (a,\ b>0)$,

2° $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqq \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leqq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$,

если $a \geqq b$.

24. Доказать:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \qquad (a,\ b,\ c>0).$$

25. Доказать:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leqq \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

$$(a_i>0;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

26. Пусть

$$a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ и } a_1 a_2 \ldots a_n = 1.$$

Доказать:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqq 2^n.$$

27. Доказать:

1° $(a+b)(a+c)(b+c) \geqq 8abc \qquad (a, b, c > 0).$

2° $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{3}{2}.$

28. Доказать:

$$\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)} \geqq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{klm} \qquad (a, b, c, k, l, m > 0).$$

29. Доказать:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c} \qquad (a, b, c > 0).$$

30. Доказать:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \qquad (x_i > 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

причем знак равенства достигается лишь в случае:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

31. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию $(a_i > 0)$.

Доказать:

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

В частности:

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

32. Пусть a, b и c — целые и положительные.

Доказать:

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geqq \frac{1}{3}(a+b+c).$$

33. Доказать, что если a, b, c положительные, рациональные и такие, что сумма каждых двух больше третьего, то

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leqq 1.$$

34. Пусть даны n положительных чисел $a, b, c, \ldots, l$ и пусть

$$s = a + b + c + \ldots + l.$$

Доказать:

$$\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \ldots + \frac{s}{s-l} \geqq \frac{n^2}{n-1}.$$

35. Доказать неравенство:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

36. Доказать неравенство:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqq \sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}.$$

37. Доказать, что

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2.$$

38. Пусть

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=p,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=q.$$

Доказать, что

$$\frac{p}{n}+\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q} \geqq x_i \geqq \frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}.$$

39. Пусть $a, b, c, \ldots, l$ есть n вещественных положительных чисел и пусть p и q также два вещественных числа. Доказать, что если p и q одного знака, то

$$n(a^{p+q}+b^{p+q}+\ldots+l^{p+q}) \geqq (a^p+b^p+\ldots+l^p)(a^q+b^q+\ldots+l^q).$$

Если же p и q разных знаков, то

$$n(a^{p+q}+b^{p+q}+\ldots+l^{p+q}) \leqq (a^p+b^p+\ldots+l^p)(a^q+b^q+\ldots+l^q).$$

40. Доказать, что

1° $(1+\alpha)^\lambda > 1+\alpha\lambda$ (α — любое положительное число и $\lambda > 1$ и рациональное).

2° $(1+\alpha)^\lambda < \dfrac{1}{1-\alpha\lambda}$ ($\alpha > 0$ вещественное; λ — рациональное положительное, $\alpha\lambda < 1$).

41. Пусть $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, n — целое положительное число.

1° Доказать, что

$$u_{n+1} > u_n.$$

2° Доказать, что u_n есть величина ограниченная, т. е. существует постоянное число (не зависящее от n) такое, что u_n меньше этого постоянного числа при любом n.

42. Доказать:

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \ldots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} > \ldots$$

43. Доказать:

$$2>\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\ldots>\sqrt[n-1]{n}>\sqrt[n]{n+1}>\ldots$$

44. Пусть имеем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=y_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=y_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=y_n, \end{aligned}$$

где $a_{ij}>0$ и рациональны, $x_{ij}>0$.

Кроме того, дано:

$$\begin{aligned} a_{k1}+a_{k2}+\ldots+a_{kn}&=1,\\ a_{1k}+a_{2k}+\ldots+a_{nk}&=1 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}$$

Доказать:

$$y_1y_2\ldots y_n \geqq x_1x_2\ldots x_n.$$

45. Пусть

$$a_i>0, \qquad b_i>0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Доказать:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}.$$

46. Доказать:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k \leqq \frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n};$$

n и k — целые положительные; $x_i>0$.

47. Пусть функция $\varphi(t)$, заданная в некотором промежутке, обладает следующим свойством:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}$$

для любых двух t_1 и t_2, не равных между собой.

Тогда

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(t_n)}{n},$$

где $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ — n произвольных величин из данного промежутка, не равных между собой.

48. Найти наибольшее значение суммы:

$$S=\sin a_1+\sin a_2+\ldots+\sin a_n,$$

если

$$a_i>0 \quad \text{и} \quad a_1+a_2+\ldots+a_n=\pi.$$

49. Пусть x, p и q положительны, причем p и q целые. Доказать:

$$\frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q},$$

если $p > q$ $(x \neq 1)$.

50. Пусть $x > 0$ и не равно 1, m рациональное. Доказать:

$$mx^{m-1}(x-1) > x^m - 1 > m(x-1),$$

если m не лежит между 0 и 1.

Если же $0 < m < 1$, то

$$mx^{m-1}(x-1) < x^m - 1 < m(x-1).$$

51. Доказать:

$$(1+x)^m \geqq 1 + mx,$$

если m не лежит в промежутке от 0 до 1;

$$(1+x)^m \leqq 1 + mx,$$

если $0 \leqq m \leqq 1$ (m — рациональное, $x > -1$).

52. Доказать:

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}};$$

$q \geqq p$, причем q и p оба целые положительные.

53. Найти, при каком значении x выражение

$$(x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \ldots + (x-x_n)^2$$

принимает наименьшее значение.

54. Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$ (C — постоянная). При каких значениях x_1, x_2, ..., x_n выражение $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ принимает наименьшее значение?

55. Пусть $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$. При каких значениях переменных x_1, x_2, ..., x_n выражение

$$x_1^\lambda + x_2^\lambda + \ldots + x_n^\lambda$$

(λ — рационально) принимает наименьшее значение.

56. Дано, что $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$ постоянна. Доказать, что произведение $x_1 x_2 \ldots x_n$ достигает наибольшего значения тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{C}{n}$.

57. Дано, что $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ постоянно, т. е. $x_1 x_2 \ldots x_n = C$.

Доказать, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ принимает наименьшее значение тогда, когда

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt[n]{C}.$$

58. Пусть $x_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n=C$ (постоянна).

Показать, что

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}$$

принимает наибольшее значение, когда

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\ldots=\frac{x_n}{\mu_n}=\frac{C}{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n},$$

$\mu_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и рациональны.

59. Пусть

$$a_i>0,\ x_i>0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

и

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=C.$$

Доказать, что произведение $x_1x_2\ldots x_n$ примет наибольшее значение, когда

$$a_1x_1=a_2x_2=\ldots=a_nx_n=\frac{C}{n}.$$

60. Дано:

$$a_i>0,\ x_i>0 \text{ и } a_1x_1^{\lambda_1}+a_2x_2^{\lambda_2}+\ldots+a_nx_n^{\lambda_n}=C$$

($\lambda_i>0$ и рациональные).

Доказать, что

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}$$

принимает наибольшее значение, когда

$$\frac{\lambda_1a_1x_1^{\lambda_1}}{\mu_1}=\frac{\lambda_2a_2x_2^{\lambda_2}}{\mu_2}=\ldots=\frac{\lambda_na_nx_n^{\lambda_n}}{\mu_n}.$$

61. Пусть $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}=C$ (постоянно).

Показать, что

$$a_1x_1^{\mu_1}+a_2x_2^{\mu_2}+\ldots+a_nx_n^{\mu_n}$$

принимает наименьшее значение при условии

$$\frac{x_1^{\mu_1}}{\dfrac{\lambda_1}{a_1\mu_1}}=\frac{x_2^{\mu_2}}{\dfrac{\lambda_2}{a_2\mu_2}}=\ldots=\frac{x_n^{\mu_n}}{\dfrac{\lambda_n}{a_n\mu_n}}$$

(a_i, $x_i>0$; λ_i и $\mu_i>0$ рациональны).

62. Найти, при каких значениях $x, y, z, \ldots, t$ сумма:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2$$

принимает наименьшее значение, если

$$ax+by+\ldots+kt=A \qquad (a,\ b,\ \ldots,\ k \text{ и } A \text{ постоянны}).$$

63. При каких значениях x, y выражение

$$u=(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2+\ldots+(a_nx+b_ny+c_n)^2$$

принимает наименьшее значение?

64. Пусть x_0, x_1, ..., x_n целые числа и допустим

$$x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n.$$

Любой многочлен n-й степени вида

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

принимает в точках x_0, x_1, ..., x_n значения, из которых одно по крайней мере больше или равно

$$\frac{n!}{2^n}.$$

65. Пусть $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$. При каком значении x произведение $\sin x\cos x$ достигает наибольшего значения?

66. Пусть

$$x+y+z=\frac{\pi}{2};\ 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq z\leqq\frac{\pi}{2}.$$

При каких значениях x, y и z произведение $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$ принимает наибольшее значение?

67. Доказать, что

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$$

(n — целое положительное число).

68. Пусть $a>1$ и n — целое положительное число.

Доказать:

$$a^n-1\geqq n\left(a^{\frac{n+1}{2}}-a^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

69. Доказать, что

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$$

(n — целое положительное число).

70. Доказать, что

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leqq\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}} \qquad (a,\ b,\ c,\ d>0).$$

§ 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Задачи настоящего параграфа, в основном, решаются методом математической индукции. Часть задач относится к вопросам комбинаторного характера.

1. Дано, что

$$v_{n+1}=3v_n-2v_{n-1}$$

и

$$v_0=2,\ v_1=3.$$

Доказать, что

$$v_n=2^n+1.$$

2. Пусть

$$u_{n+1}=3u_n-2u_{n-1}$$

и

$$u_0=0,\ u_1=1.$$

Доказать, что

$$u_n=2^n-1.$$

3. Пусть a и $A>0$ — произвольные данные числа и пусть

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right),\ a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{A}{a_1}\right),\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{A}{a_{n-1}}\right).$$

Доказать:

$$\frac{a_n-\sqrt{A}}{a_n+\sqrt{A}}=\left(\frac{a_1-\sqrt{A}}{a_1+\sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}},$$

при любом целом n.

4. Ряд чисел

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

составляется по следующему закону. Первые два числа a_0 и a_1 даны, каждое же следующее равняется полусумме двух предыдущих. Выразить a_n через a_0, a_1 и n.

5. Числа ряда

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

определены следующими данными:

$$a_1=2 \text{ и } a_n=3a_{n-1}+1.$$

Найти сумму

$$a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

6. Числа ряда

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

связаны зависимостью:

$$a_n=ka_{n-1}+l \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Выразить a_n через a_1, k, l и n.

7. Последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

удовлетворяет соотношению

$$a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=1.$$

Выразить a_n через a_1, a_2 и n.

8. Числа ряда:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

связаны зависимостью

$$a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=1.$$

Выразить a_n через a_1, a_2, a_3 и n.

9. Пусть пары чисел

$$(a,\ b)(a_1,\ b_1)(a_2,\ b_2)\ldots$$

образуются по следующему закону

$$a_1=\frac{a+b}{2};\quad b_1=\frac{a_1+b}{2};\quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2};\quad b_2=\frac{a_2+b_1}{2};\ \ldots$$

Доказать:

$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right),$$

$$b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

10. Числа ряда

$$x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots$$

определены зависимостями

$$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\sin^2\alpha,$$

$$y_n=y_{n-1}+2x_{n-1}\cos^2\alpha.$$

Кроме того, известно, что $x_0=0$; $y_0=\cos\alpha$.

Найти выражение для x_n и y_n через α.

11. Числа

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,$$

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots$$

связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_n&=\alpha x_{n-1}+\beta y_{n-1},\\ y_n&=\gamma x_{n-1}+\delta y_{n-1} \end{aligned}\qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0).$$

Найти выражение для x_n и y_n через x_0, y_0 и n.

12. Числа ряда

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots$$

определены зависимостью

$$x_n=\alpha x_{n-1}+\beta x_{n-2}.$$

Выразить x_n через x_0, x_1 и n.

13. Числа ряда $x_0, x_1, \ldots$ связаны соотношением

$$x_n = \frac{px_{n-1} + qx_{n-2}}{p+q}.$$

Выразить x_n через x_0, x_1 и n.

14. Числа $x_0, x_1, x_2, \ldots$ определяются с помощью равенства

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1} + \beta}{\gamma x_{n-1} + \delta}.$$

Выразить x_n через x_0 и n.

Рассмотреть частные случаи:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2x_{n-1}+1}; \quad x_n = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+3}.$$

15. Числа:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

определяются по следующему закону:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

a_0 и b_0 даны, причем $a_0 > b_0 > 0$. Выразить a_n и b_n через a_0, b_0 и n.

16. Доказать тождество:

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{2^3-2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^3-2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

17. Упростить выражение

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n) + x(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n) + \\ + x^2(1-x^3)\ldots(1-x^n) + \ldots \\ \ldots + x^k(1-x^{k+1})\ldots(1-x^n) + \ldots + x^{n-1}(1-x^n) + x^n.$$

18. Доказать тождество:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \ldots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

19. Проверить тождество:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2^n-1}.$$

20. Доказать справедливость тождества:

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{a+1}{ab} + \frac{(a+1)(b+1)}{abc} + \ldots \\ \ldots + \frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(k+1)}{abc\ldots skl} = \\ = \frac{(a+1)(b+1)\ldots(k+1)(l+1)}{abc\ldots kl}.$$

21. Доказать тождество:

$$\frac{b+c+d+\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots+k+l)}=\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}.$$

22. Пусть

$$\frac{q}{1-q}(1-z)+\frac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\ldots(1-q^{n-1}z)=F_n(z).$$

Доказать тождество:

$$1+F_n(z)-F_n(qz)=(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^nz).$$

23. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-k+1})}{1-a^k}=n.$$

24. Вычислить сумму:

$$S_n=\frac{a}{b}+\frac{a(a-1)}{(b-1)}+\frac{a(a-1)(a-2)}{b(b-1)(b-2)}+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{b(b-1)\ldots(b-n+1)}$$

(b не равно ни одному из чисел: $0, 1, 2, \ldots, n-1$).

25. Пусть

$$S_n=a_1+(a_1+1)a_2+(a_1+1)(a_2+1)a_3+\ldots$$
$$\ldots+(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n-1}+1)a_n.$$

Доказать, что

$$S_n=(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)-1.$$

26. Доказать следующие тождества:

1° $$\sum_{x=1}^{x=n}x(x+1)\ldots(x+q)=\frac{1}{q+2}n(n+1)\ldots(n+q+1).$$

2° $$\sum_{x=1}^{x=n}\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+q)}=\frac{1}{q}\left\{\frac{1}{q!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}\right\}.$$

27. Доказать тождество:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

28. Пусть имеем последовательность чисел (ряд Fibonacci):

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ldots$$

Последовательность эта определяется следующими условиями:

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$$

и $u_0=0$, $u_1=1$.

Показать, что имеют место соотношения:

1° $u_{n+2}=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n+1}$.
2° $u_{2n+2}=u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n+1}$.
3° $u_{2n+1}=1+u_2+u_4+\ldots+u_{2n}$.
4° $-u_{2n-1}+1=u_1-u_2+u_3+\ldots+u_{2n-1}-u_{2n}$.
5° $u_{2n-2}+1=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2n-1}$.
6° $u_nu_{n+1}=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2$.
7° $u_{2n}^2=u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}$.
8° $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$.
9° $u_n^2-u_{n+1}u_{n-1}=(-1)^{n+1}$.
10° $u_n^4-u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2}=1$.

29. Вычислить сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}u_{n+3}}.$$

30. Доказать соотношения:

1° $u_{n+p-1}=u_{n-1}u_{p-1}+u_nu_p$.
2° $u_{2n-1}=u_n^2+u_{n-1}^2$.
3° $u_{2n-1}=u_nu_{n+1}-u_{n-2}u_{n-1}$.

31. Доказать, что

$$u_n^3+u_{n+1}^3-u_{n-1}^3=u_{3n}.$$

32. Доказать, что

$$u_n=\sum_{k=0}^{k=\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^k.$$

33. Найти число целых положительных решений уравнения:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=m$$

(m — целое положительное).

34. Доказать, что общее число целых неотрицательных решений уравнений:

$$x+2y=n;\quad 2x+3y=n-1;\ \ldots;\ nx+(n+1)y=1;$$
$$(n+1)x+(n+2)y=0$$

равно $n+1$.

35. Показать, что общее число целых неотрицательных решений уравнений:

$$x+4y=3n-1,\quad 4x+9y=5n-4,\quad 9x+16y=7n-9,\ \ldots$$
$$\ldots,\ n^2x+(n+1)^2y=n(n+1)$$

равно n.

36. Имеется n белых и n черных шаров, помеченных номерами $1, 2, 3, \ldots, n$. Сколькими способами можно расположить эти шары в ряд так, чтобы два шара одинакового цвета не лежали рядом?

37. Сколькими способами можно распределить kn различных предметов на k групп по n предметов в каждой?

38. Сколько можно сделать из n элементов перестановок, в которых два элемента a и b не стоят рядом?

39. Найти число таких перестановок из n элементов, при которых ни один из элементов не занимает первоначального положения.

40. Сколькими способами n различных букв могут быть размещены в r клетках (первая, вторая, ..., r-я клетка) так, чтобы в каждую клетку попала по крайней мере одна буква (порядок букв внутри клетки в расчет не принимается).

§ 10. ПРЕДЕЛ

Понятие о переменной величине и ее пределе предполагается известным. Равным образом, мы считаем известными и основные теоремы о пределах, которые обычно излагаются в элементарных учебниках алгебры (предел суммы, произведения и частного). Напомним один из признаков существования предела: если переменная величина возрастает, но остается меньше некоторой постоянной величины, то такая переменная величина имеет предел (равным образом, имеет предел и такая переменная величина, которая, убывая, остается больше некоторой постоянной величины). При рассмотрении вопросов, связанных с бесконечно убывающей геометрической прогрессией и вообще с простейшими бесконечными рядами, следует иметь в виду, что символ:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

обозначает не что иное, как $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\ldots+u_n)$, если этот предел существует. Если же этого предела не существует, то говорят, что ряд:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

расходится, и о численном значении символа говорить не приходится.

1. Пусть $x_n = a^n$ и $|a| < 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

(при любом вещественном a).

3. Найти:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^h + b_1 n^{h-1} + \ldots + b_h}$$

$$(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0).$$

4. Пусть

$$P_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{2}{3}.$$

5. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

(k — целое, положительное).

6. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right\} = \frac{1}{2}$$

(k — целое, положительное).

7. Пусть имеем последовательность чисел x_n, определяемую равенством

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{3}$$

и начальными значениями x_0 и x_1.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{x_0 + 2x_1}{3}.$$

8. Пусть $N > 0$. Возьмем произвольное положительное число x_0 и составим следующую последовательность:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_p = \frac{1}{2}\left(x_{p-1} + \frac{N}{x_{p-1}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{N}.$$

9. Обобщить результат предыдущей задачи на случай извлечения корня любой степени из положительного числа.

Доказать, что если

$$x_1 = \frac{m-1}{m} x_0 + \frac{N}{m x_0^{m-1}},$$

$$x_2 = \frac{m-1}{m} x_1 + \frac{N}{m x_1^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_p = \frac{m-1}{m} x_{p-1} + \frac{N}{m x_{p-1}^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[m]{N}.$$

10. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

11. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

12. Пусть переменное x_n определяется следующим законом образования:

$$x_0 = \sqrt{a},$$

$$x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}},$$

$$x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}},$$

$$x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

13. Доказать, что переменная

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

имеет предел при $n \to \infty$.

14. Пусть даны две последовательности:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots \qquad (x_0 > y_0 > 0);$$

каждый последующий член образуется из предыдущих следующим образом:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}; \qquad y_n = \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}.$$

Доказать, что пределы x_n и y_n существуют и равны между собой.

15. Пусть

$$S_1 = 1 + q + q^2 + \ldots \qquad |q| < 1,$$
$$S = 1 + Q + Q^2 + \ldots \qquad |Q| < 1.$$

Найти

$$1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots$$

16. Пусть s есть сумма членов бесконечной геометрической прогрессии, σ^2 — сумма квадратов этих членов. Показать, что сумма n членов этой прогрессии равна:

$$s\left\{1 - \left[\frac{s^2 - \sigma^2}{s^2 + \sigma^2}\right]^n\right\}.$$

17. Доказать:

1° $\lim\limits_{n \to \infty} n^k x^n = 0$,

если $|x| < 1$ и k — целое положительное число.

2° $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

18. Найти суммы следующих рядов:

1° $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

2° $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$

19. Доказать, что ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

есть ряд расходящийся.

20. Доказать, что ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha>1$.

21. Найти суммы следующих рядов:

1° $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$

2° $1+4x+9x^2+\ldots+4^2x^{n-1}+\ldots$

3° $1+2^3x+3^3x^2+\ldots+n^3x^{n-1}+\ldots$ $\quad (|x|<1)$.

22. 1° Доказать, что переменная $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ имеет предел.

2° Обозначив предел u_n через e, так что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, доказать, что

$$e=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}+\frac{\theta}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot k}$$

$$(0<\theta<1).$$

23. Пусть

$$0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Зная, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, доказать:

$$x-\sin x\leqq\frac{1}{6}x^3.$$

24. 1° Доказать, что ряд

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots \qquad (0\leqq a_i\leqq 9)$$

есть ряд сходящийся.

2° Доказать, что, каково бы ни было вещественное число ω, заключенное в промежутке от нуля до единицы $(0<\omega<1)$, всегда можно найти и притом единственным способом такие a_i $(0\leqq a_i\leqq 9$ — целые), что

$$\omega=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$$

(разложить вещественное число в десятичную дробь).

3° Показать, что если десятичная дробь:

$$\omega=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$$

будет конечна или периодична (т. е., например, $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2, \ldots, a_{2n}=a_n, \ldots$, так что период содержит n цифр: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то представляемое ею число ω будет числом рациональным.

25. Доказать, что числа, определяемые следующими рядами, есть числа иррациональные:

$$1^\circ \quad \omega = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^4} + \frac{1}{l^9} + \frac{1}{l^{16}} + \ldots + \frac{1}{l^{n^2}} + \ldots,$$

где l — любое целое положительное число.

$$2^\circ \quad \omega = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1\cdot 2}} + \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3}} + \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{l^{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}} + \ldots,$$

l — любое целое положительное число.

26. Доказать, что e есть число иррациональное (см. задачу 22).

27. Пусть

$$\omega = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_1 l_2} + \frac{1}{l_1 l_2 l_3} + \ldots + \frac{1}{l_1 l_2 \ldots l_n} + \ldots,$$

где $1 < l_1 \leqq l_2 \leqq l_3 \ldots$ и l_i — целые числа. Доказать, что ω рационально только тогда, когда l_k (начиная с некоторого k) все равны между собою.

28. Доказать, что переменная:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n$$

имеет предел.

29. Доказать следующую формулу:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots}.$$

РЕШЕНИЯ

§ 1. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Доказывается непосредственно проверкой.

2. Если раскрыть скобки, стоящие в правой части, и воспользоваться формулой квадрата многочлена, то легко видеть, что все удвоенные произведения взаимно уничтожатся, и мы получим искомое тождество.

3. Если воспользоваться тождеством предыдущей задачи, то из данных нашей задачи следует:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=0,$$

откуда либо $a^2+b^2+c^2+d^2=0$, либо $x^2+y^2+z^2+t^2=0$.

Но сумма квадратов вещественных чисел только тогда может равняться нулю, когда каждое из этих чисел в отдельности равно нулю. Поэтому из равенства $a^2+b^2+c^2+d^2=0$ получаем: $a=b=c=d=0$, а из равенства $x^2+y^2+z^2+t^2=0$ имеем: $x=y=z=t=0$.

Отсюда и следует искомый результат.

4. Это тождество может быть проверено непосредственно, а может быть получено также из тождества (2), если положить в нем $d=t=0$ и заменить y через $-y$, а z через $-z$.

5. Если развернуть правую часть равенства, то все удвоенные произведения взаимно уничтожатся и справедливость тождества сделается очевидной.

6. Положим в тождестве (5) $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=1$; $b_1=a$; $b_2=b$, ..., $b_{n-1}=k$, $b_n=l$.

Тогда получим:

$$n(a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2)=(a+b+\ldots+l)^2+(b-a)^2+$$
$$+(c-a)^2+\ldots+(k-l)^2.$$

Но так как по условию задачи

$$n(a^2+b^2+\ldots+k^2+l^2)=(a+b+\ldots+k+l)^2,$$

то

$$(b-a)^2+(c-a)^2+\ldots+(k-l)^2=0.$$

Отсюда следует:

$$a=b=c=\ldots=k=l.$$

7. Воспользуемся тождеством (5). По условиям задачи

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1;\quad b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1.$$

Поэтому имеем:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=$$
$$=1-(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_1b_3-a_3b_1)^2-\ldots-(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2.$$

Отсюда

$$0 \leqq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqq 1;$$

следовательно,

$$-1 \leqq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqq +1.$$

8. Имеем:

$$(y+z-2x)^2-(y-z)^2+(z+x-2y)^2-(z-x)^2+(x+y-2z)^2-(x-y)^2=0.$$

Но

$$(y+z-2x)^2-(y-z)^2=4(y-x)(z-x)$$

(пользуясь формулой разности квадратов).

Аналогично найдем:

$$(z+x-2y)^2-(z-x)^2=4(z-y)(x-y),$$
$$(x+y-2z)^2-(x-y)^2=4(x-z)(y-z).$$

Следовательно,

$$4(y-x)(z-x)+4(z-y)(x-y)+4(x-z)(y-z)=0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xz-2yz-2xy=0,$$

или

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0,$$

откуда и следует, что

$$x=y=z=0.$$

9. Первое из тождеств непосредственно очевидно. Второе перепишем так:

$$(6a^2-4ab+4b^2)^3-(4a^2-4ab+6b^2)^3=(3a^2+5ab-5b^2)^3+(5a^2-5ab-3b^2)^3.$$

Применяя слева формулу разности кубов, а справа формулу суммы кубов, найдем, что достаточно доказать следующее тождество:

$$(3a^2-2ab+2b^2)^2+(3a^2-2ab+2b^2)(2a^2-2ab+3b^2)+(2a^2-2ab+3b^2)^2=$$
$$=(5a^2-5ab-3b^2)^2-(5a^2-5ab-3b^2)(3a^2+5ab-5b^2)+(3a^2+5ab-5b^2)^2.$$

Это тождество доказываем непосредственным раскрытием скобок.

10. Чтобы установить справедливость рассматриваемого тождества, можно переписать его так:

$$(p^2-q^2)^4=(p^2+pq+q^2)^4-(2pq+q^2)^4+(p^2+pq+q^2)^4-(2pq+p^2)^4.$$

Остается упростить правую часть и показать, что она равна левой.

Пользуясь формулой $A^4-B^4=(A+B)(A-B)(A^2+B^2)$, получим для правой части следующее выражение:

$$(p^2+3pq+2q^2)(p^2-pq)[(p^2+pq+q^2)^2+(2pq+q^2)^2]+$$
$$+(2p^2+3pq+q^2)(q^2-pq)[(p^2+pq+q^2)^2+(2pq+p^2)^2]=$$
$$=(p+2q)\,p\,(p^2-q^2)[(p^2+pq+q^2)^2+(2pq+q^2)^2]+$$
$$+(2p+q)\,q\,(q^2-p^2)[(p^2+pq+q^2)^2+(2pq+p^2)^2]=$$
$$=(p^2-q^2)\{(p^2+pq+q^2)^2[p^2+2pq-2pq-q^2]+$$
$$+(p^2+2pq)(q^2+2pq)[2pq+q^2-2pq-p^2]\}=$$
$$=(p^2-q^2)^2\{(p^2+pq+q^2)^2-(p^2+2pq)(q^2+2pq)\}=(p^2-q^2)^4.$$

11. Проверить непосредственной подстановкой.

12. Проверить подстановкой.

13. 1° Случаи $n=0$, 1, 2 легко проверяются непосредственно. При $n=4$, перепишем тождество следующим образом:

$$(ix-ky)^4-(ix-kz)^4+(iy-kz)^4-(iy-kx)^4+(iz-kx)^4-(iz-ky)^4=0.$$

Преобразуем первые два члена:

$$(ix-ky)^4-(ix-kz)^4=[(ix-ky)^2+(ix-kz)^2]\,(2ix-ky-kz)\,k\,(z-y). \qquad (1)$$

В силу равенства $x+y+z=0$, получим:

$$2ix-ky-kz=(2i+k)\,x.$$

Квадратную же скобку можно переписать следующим образом:

$$(2i^2+2ik)\,x^2+k^2\,(y^2+z^2).$$

Итак, имеем:

$$(ix-ky)^4-(ix-kz)^4=k\,(2i+k)\,(y^2-z^2)\,[(2i^2+2ik)\,x^2+k^2\,(y^2+z^2)]. \qquad (1')$$

Остается преобразовать следующие выражения:

$$(iy-kz)^4-(iy-kx)^4, \qquad (2)$$
$$(iz-kx)^4-(iz-ky)^4. \qquad (3)$$

Но легко видеть, что выражение (2) получается из первого, уже рассмотренного, путем круговой перестановки букв x, y и z, т. е. такой перестановки, при которой x переходит в y, y в z, а z переходит в x. Путем такой же перестановки выражение (3) получается из (2). Поэтому нет необходимости вторично производить вычисления для упрощения выражений (2) и (3), а достаточно к полученному результату применить соответствующие перестановки. Тогда будем иметь:

$$(iy-kz)^4-(iy-kx)^4=k\,(2i+k)\,(z^2-x^2)\,[(2i^2+2ik)\,y^2+k^2\,(z^2+x^2)], \qquad (2')$$
$$(iz-kx)^4-(iz-ky)^4=k\,(2i+k)\,(x^2-y^2)\,[(2i^2+2ik)\,z^2+k^2\,(x^2+y^2)]. \qquad (3')$$

Складывая же выражения (1′), (2′) и (3′), получим:

$$k\,(2i+k)\,\{(2i^2+2ik)\,[(y^2-z^2)\,x^2+(z^2-x^2)\,y^2+(x^2-y^2)\,z^2]+ \\ +k^2\,(y^4-z^4+z^4-x^4+x^4-y^4)\}=0.$$

2° При $n=0$ соотношение очевидно. Обозначим для краткости сумму, стоящую в левой части равенства, символом:

$$\sum (x+k)^n,$$

а сумму, стоящую в правой части, обозначим так:

$$\sum (x+l)^n.$$

При $n=1$ нужно доказать:

$$8x+\sum k=8x+\sum l,$$

т. е. нужно доказать, что

$$\sum k=\sum l.$$

Остается только проверить, что

$$\sum k=\sum l.$$

Но

$$\sum k=3+5+6+9+10+12+15=60,$$
$$\sum l=1+2+4+7+8+11+13+14=60.$$

При $n=2$ следует доказать, что

$$\sum (x+k)^2=\sum (x+l)^2,$$

т. е. что

$$8x^2+2x\sum k+\sum k^2=8x^2+2x\sum l+\sum l^2.$$

Итак, остается доказать, что

$$\sum k^2=\sum l^2,$$

что легко проверяется непосредственно.

Совершенно так же получаем, что для доказательства последнего случая $n=3$ надо только показать, что

$$\sum k^3=\sum l^3.$$

14. Первое тождество устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2=\\ &=[(a+b)+(c+d)]^2+[(a+b)-(c+d)]^2+[(a-b)+(c-d)]^2+\\ &+[(a-b)-(c-d)]^2=2(a+b)^2+2(c+d)^2+2(a-b)^2+2(c-d)^2=\\ &=2[(a+b)^2+(a-b)^2]+2[(c+d)^2+(c-d)^2]=4(a^2+b^2+c^2+d^2).\end{aligned}$$

Второе и третье тождества доказываются также непосредственной проверкой с некоторыми предварительными преобразованиями.

15. Перепишем наше равенство следующим образом:

$$\begin{aligned}&[(a+b+c)^4-(a^4+b^4+c^4)]+[(b+c-a)^4-(a^4+b^4+c^4)]+\\ &+[(c+a-b)^4-(a^4+b^4+c^4)]+[(a+b-c)^4-(a^4+b^4+c^4)]=\\ &=24(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).\end{aligned}$$

Рассмотрим первый член.

Имеем:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)^2-a^4-b^4-c^4=6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+\\ +4ac(a^2+c^2)+4ab(a^2+b^2)+4bc(b^2+c^2)+12a^2bc+12b^2ac+12c^2ab.\end{aligned}$$

Остальные члены получаются из первого путем последовательной замены, a через $-a$, b через $-b$, c через $-c$. Произведя сложение, убеждаемся в справедливости нашего тождества.

16. Имеем:

$$\begin{aligned}s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b)=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+\\ +2a(s-2b)(s-2c)+s(s-2a)(2s-2c-2b)=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+\\ +2a(s-2b)(s-2c)+s(s-2a)2a.\end{aligned}$$

Преобразуем сумму:

$$\begin{aligned}2a(s-2b)(s-2c)+s(s-2a)2a=2a[(s-2b)(s-2c)+s(s-2a)]=\\ =2a[(s-2b)(s-2c)+(s-2a)(s-2b)+2b(s-2a)]=2a[(s-2b)(2s-2c-2a)+\\ +2b(s-2a)]=2a[(s-2b)2b+2b(s-2a)]=2a\cdot 2b[s-2b-2a]=\\ =4ab\cdot 2c=8abc.\end{aligned}$$

17. Развернем выражение, стоящее в левой части, по степеням s, получим:

$$(a+b+c)s^2-2s(a^2+b^2+c^2)+a^3+b^3+c^3+$$
$$+2s^3-2s^2(a+b+c)+2s(ab+ac+bc)-2abc.$$

Так как $a+b+c=2s$, то имеем:

$$2s^3-2s(a^2+b^2+c^2)+a^3+b^3+c^3+2s^3-4s^3+2s(ab+ac+bc)-2abc=$$
$$=-2s(a^2+b^2+c^2)+a^3+b^3+c^3+2s(ab+ac+bc)-2abc=a^3+b^3+c^3+$$
$$+(a+b+c)(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2)-2abc.,$$

Непосредственным преобразованием этого последнего выражения убеждаемся, что оно равно abc (см. также задачу 20).

18. Имеем:

$$(2\sigma^2-2a^2)(2\sigma^2-2b^2)=(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)=c^4-(a^2-b^2)^2.$$

Применяя круговую перестановку, получим:

$$(2\sigma^2-2b^2)(2\sigma^2-2c^2)=a^4-(b^2-c^2)^2,$$
$$(2\sigma^2-2c^2)(2\sigma^2-2a^2)=b^4-(c^2-a^2)^2.$$

Отсюда

$$4[(\sigma^2-a^2)(\sigma^2-b^2)+(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)+(\sigma^2-c^2)(\sigma^2-a^2)]=$$
$$=a^4+b^4+c^4-(a^2-b^2)^2-(b^2-c^2)^2-(c^2-a^2)^2=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+$$
$$+2a^2c^2+2b^2c^2=-[a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2]=-[a^4-2(b^2-c^2)a^2+$$
$$+(b^2-c^2)^2-4a^2c^2]=4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2=$$
$$=(2ac+a^2-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)=$$
$$=(a+b+c)(a+c-b)(b-a+c)(b+a-c).$$

Но

$$a+b+c=2s;$$
$$a+b-c=2(s-c);$$
$$a+c-b=2(s-b);$$
$$b+c-a=2(s-a),$$

и мы получаем справедливость тождества.

19. Имеем:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz.$$

Следовательно:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3\{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz\}=$$
$$=3\{z(x^2+y^2+2xy)+z^2(x+y)+xy(x+y)\}=$$
$$=3(x+y)\{z(x+y)+z^2+xy\}=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Итак:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

20. Имеем:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+$$
$$+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz.$$

Следовательно:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

21. Положим: $a+b-c=x$; $b+c-a=y$; $c+a-b=z$.

Легко видеть, что $x+y+z=a+b+c$ и, следовательно, нужно упростить следующее выражение:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

На основании задачи 19 имеем:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Но

$$x+y=2b;\quad x+z=2a;\quad y+z=2c.$$

Поэтому

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3=24abc.$$

22. На основании задачи 19 имеем:

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Положим здесь $x=b-c$; $y=c-a$; $z=a-b$, найдем

$$x+y+z=0;\quad x+y=b-a;\quad x+z=a-c;\quad y+z=c-b.$$

Следовательно:

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(a-c)(c-b).$$

23. Легко получается из задачи 20. Но можно и следующим образом:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=0,$$

так как

$$a+b+c=0.$$

Следовательно,

$$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)=0.$$

Но

$$a+b=-c,\quad a+c=-b,\quad b+c=-a.$$

Теперь искомое тождество очевидно.

24. Имеем:

$$(a+b+c)^2=0,$$
$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc).$$

Возводя обе части этого последнего равенства в квадрат, получим:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab]=$$
$$=4[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)]=4[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2].$$

С другой стороны:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

Отсюда

$$4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=2(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4).$$

Сопоставляя это с равенством

$$4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=(a^2+b^2+c^2)^2,$$

получаем искомый результат.

25. Так как

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0,$$

то результат следует непосредственно из задачи 24.

26. 1° Имеем (см. задачу 23):

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Отсюда

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=3abc(a^2+b^2+c^2).$$

Далее, преобразуя левую часть, получим:

$$a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+b^2c^2(b+c)=3abc(a^2+b^2+c^2),$$

или

$$a^5+b^5+c^5-a^2b^2c-a^2c^2b-b^2c^2a=3abc(a^2+b^2+c^2).$$

Отсюда

$$a^5+b^5+c^5-abc(ab+ac+bc)=3abc(a^2+b^2+c^2).$$

Но

$$-2(ab+ac+bc)=a^2+b^2+c^2.$$

Отсюда и следует окончательный результат.

2° Непосредственно следует из задачи 23 и 1°.

3° Припомним соотношения:

$$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2 \quad \text{(задача 24)},$$
$$a^3+b^3+c^3=3abc \quad \text{(задача 23)}.$$

Перемножая эти равенства почлеино, найдем:

$$2[a^7+b^7+c^7+a^3b^3(a+b)+a^3c^3(a+c)+b^3c^3(b+c)]=3abc(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Отсюда

$$2[a^7+b^7+c^7-a^3b^3c-a^3c^3b-b^3c^3a]=3abc(a^2+b^2+c^2)^2,$$

или

$$2(a^7+b^7+c^7)-2abc(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=3abc(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Но

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2 \quad \text{(задача 24)}.$$

Поэтому

$$2(a^7+b^7+c^7)=\frac{7}{2}abc(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Пользуясь результатом 1°, получаем, наконец, искомое соотношение.

27. Для удобства вычислений введем в рассмотрение символ суммирования. Будем полагать:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k.$$

Пользуясь этнм символом, мы можем теперь написать:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{k=n}a_kb_k=a_1b_1+\sum_{k=2}^{k=n}a_kb_k.$$

Но легко видеть, что

$$b_k=(b_1+b_2+\ldots+b_k)-(b_1+b_2+\ldots+b_{k-1})=s_k-s_{k-1},$$

поэтому наша сумма примет следующий вид:

$$a_1b_1+\sum_{k=2}^{k=n} a_k(s_k-s_{k-1})=a_1b_1+\sum_{k=2}^{k=n-1} a_ks_k-\sum_{k=3}^{k=n} a_ks_{k-1}+$$

$$+a_ns_n-a_2s_1=(a_1-a_2)s_1+a_ns_n+\sum_{k=2}^{k=n-1} a_ks_k-\sum_{k=2}^{k=n-1} a_{k+1}s_k=$$

$$=(a_1-a_2)s_1+\sum_{k=2}^{k=n-1}(a_k-a_{k+1})s_k+a_ns_n=(a_1-a_2)s_1+$$

$$+(a_2-a_3)s_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)s_{n-1}+a_ns_n.$$

28. Легко доказывается, если раскрыть скобки в левой части и воспользоваться соотношением:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}\cdot s.$$

29. Подставляя в данное выражение вместо x и y их выражения через x' и y', найдем, что

$$A'=A\alpha^2+2B\alpha\gamma+C\gamma^2,$$
$$C'=A\beta^2+2B\beta\delta+C\delta^2,$$
$$B'=A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta.$$

Составляя выражение $B'^2-A'C'$, легко проверяем требуемое тождество.

30. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_iq_i=\sum_{i=1}^{i=n} p_i(1-p_i)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i-\sum_{i=1}^{i=n} p_i^2=np-\sum_{i=1}^{i=n} p_i^2,$$

так как

$$np=p_1+p_2+\ldots+p_n.$$

Далее:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_iq_i=np-\sum_{i=1}^{i=n}(p_i-p+p)^2=$$

$$=pn-\sum_{i=1}^{i=n}[(p_i-p)^2+2pp_i-p^2]=np-\sum_{i=1}^{i=n}(p_i-p)^2-$$

$$-2p\sum_{i=1}^{i=n} p_i+np^2=np-\sum_{i=1}^{i=n}(p_i-p)^2-np^2.$$

Но

$$np-np^2=np(1-p)=npq.$$

Таким образом, получаем:

$$p_1q_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n=npq-(p_1-p)^2-(p_2-p)^2-\ldots-(p_n-p)^2.$$

31. Действительно:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=$$
$$=\frac{1}{2n}\left\{\frac{(2n-1)+1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{(2n-3)+3}{3\,(2n-3)}+\ldots+\frac{1+(2n-1)}{(2n-1)\cdot 1}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right\}=$$
$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

32. 1° Легко видеть, что

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=n+$$
$$+\left[(1-1)+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-1\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-1\right)\right]=$$
$$=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right).$$

2°

$$s_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k};\quad ns_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n-k+k}{k}=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n-k}{k}+1\right).$$

Следовательно:

$$ns_n=n+\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right).$$

33. Прибавим и вычтем из левой части следующее выражение:

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Получим:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

34. Имеем:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2\alpha-1}\right)\left(1+\frac{1}{3\alpha-1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1+\frac{1}{(2n-1)\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n\alpha-1}\right)=$$

$$=\frac{\alpha(2\alpha-2)\cdot 3\alpha\ldots(2n-1)\alpha(2n\alpha-2)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)\ldots(2n\alpha-1)}=$$

$$=\frac{1\cdot\alpha\cdot 3\cdot\alpha\cdot 5\cdot\alpha\ldots(2n-1)\cdot\alpha\cdot(2\alpha-2)(4\alpha-2)\ldots(2n\alpha-2)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)\ldots(n\alpha-1)[(n+1)\alpha-1][(n+2)\alpha-1]\ldots[(n+n)\alpha-1]}=$$

$$=\frac{1\cdot\alpha\cdot 3\cdot\alpha\cdot 5\cdot\alpha\ldots(2n-1)\alpha\cdot(\alpha-1)(2\alpha-1)\ldots(n\alpha-1)}{[(n+1)\alpha-1]\ldots[(n+n)\alpha-1](\alpha-1)(2\alpha-1)\ldots(n\alpha-1)}\cdot 2^n=$$

$$=\frac{1\cdot\alpha\cdot 3\cdot\alpha\cdot 5\cdot\alpha\ldots(2n-1)\cdot\alpha}{[(n+1)\alpha-1]\ldots[(n+n)\alpha-1]}\cdot 2^n.$$

Но

$$1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 2^n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot 2^n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=$$

$$=(n+1)(n+2)\ldots 2n.$$

Отсюда и получаем искомое тождество.

35. Пусть $a\leqq x<a+1$, где a — целое число. Разделим промежуток между a и $a+1$ на n частей. Тогда x будет лежать в одном из этих промежутков, т. е. найдется такое целое $p(0\leqq p<n-1)$, что

$$a+\frac{p}{n}\leqq x<a+\frac{p+1}{n}.$$

Поэтому

$$a+\frac{p+1}{n}\leqq x+\frac{1}{n}<a+\frac{p+2}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a+1-\frac{1}{n}\leqq x+\frac{n-p-1}{n}<a+1,$$

$$a+1\leqq x+\frac{n-p}{n}<a+1+\frac{1}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a+\frac{p+n-1}{n}\leqq x+\frac{n-1}{n}<a+\frac{p+n}{n}.$$

Отсюда

$$[x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-p-1}{n}\right]=a,$$

$$\left[x+\frac{n-p}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=a+1.$$

Следовательно:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=(n-p)a+p(a+1)=an+p.$$

С другой стороны, из неравенства

$$a+\frac{p}{n}\leqq x<a+\frac{p+1}{n}$$

получаем

$$an+p\leqq nx<an+p+1,$$

следовательно,

$$[nx]=an+p,$$

и формула доказана.

36. Имеем:

$$\cos(a+b)\cos(a-b)=[\cos a\cos b-\sin a\sin b][\cos a\cos b+\sin a\sin b]=$$
$$=\cos^2 a\cos^2 b-\sin^2 a\sin^2 b=\cos^2 a(1-\sin^2 b)-(1-\cos^2 a)\sin^2 b=\cos^2 a-\sin^2 b.$$

37. Развернув скобки в левых частях равенств, легко их доказываем.

38. Имеем:

$$(1-\sin a)(1-\sin b)(1-\sin c)=\frac{(1-\sin^2 a)(1-\sin^2 b)(1-\sin^2 c)}{(1+\sin a)(1+\sin b)(1+\sin c)}=$$
$$=\frac{\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c}{\cos a\cos b\cos c}=\cos a\cos b\cos c.$$

39. Умножив обе части данного равенства на

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma),$$

получим:

$$[(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)]^2=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

40. Пользуясь формулой

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)],$$

получим:

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha-\sin 2\beta,$$
$$2\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=\sin 2\beta-\sin 2\gamma$$

и т. д. Отсюда и следует тождество.

41. Пользуясь формулой

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],$$

придем к тождеству:

$$(\cos 2b-\cos 2a)(\cos 2d-\cos 2c)+(\cos 2b-\cos 2c)(\cos 2a-\cos 2d)+$$
$$+(\cos 2b-\cos 2d)(\cos 2c-\cos 2a)=0.$$

Пусть $\cos 2b=\alpha$; $\cos 2a=\beta$; $\cos 2d=\gamma$; $\cos 2c=\delta$; тогда

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=$$
$$=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma+\gamma-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=$$
$$=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\gamma-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=0.$$

Но $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\gamma-\delta)(\beta-\gamma)=(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)$ и $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)=(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)$; отсюда искомая сумма равна $(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)=0$.

42. 1° Суммируя первые два косинуса, получим: $2\cos\gamma\cos(\beta-\alpha)$; сумма же вторых двух косинусов даст: $2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$. Дальнейшее очевидно.

2° Аналогично 1°.

43. Имеем:

$$\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\cos\left(A+\frac{B}{4}\right)=\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-A-\frac{B}{4}\right)=$$
$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-A-\frac{B}{4}\right).$$

При помощи круговой перестановки получаем (обозначая преобразуемую сумму через S):

$$\frac{S}{\sqrt{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-A-\frac{B}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-B-\frac{C}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-C-\frac{A}{4}\right)=$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}-\frac{B+C}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}+\frac{B-C}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+C+\frac{A}{4}\right).$$

Воспользовавшись зависимостью $A+B+C=\pi$, можно показать, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}-\frac{B+C}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right).$$

Поэтому имеем:

$$\frac{S}{\sqrt{2}}=2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}+\frac{B-C}{8}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\times$$
$$\times\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}+\frac{B-C}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\right]=$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}+\frac{B}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{B}{2}+\frac{C}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right).$$

44. Употребляя преобразования, аналогичные предыдущим, приходим к результату:

$$\sin\frac{A}{4}+\sin\frac{B}{4}+\sin\frac{C}{4}+\cos\frac{A}{4}+\cos\frac{B}{4}+\cos\frac{C}{4}=$$
$$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{B}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{8}\right).$$

45. Имеем:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a,$$
$$\sin 4a=2\sin 2a\cos 2a,$$
$$\sin 8a=2\sin 4a\cos 4a,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin 2^n a=2\sin 2^{n-1}a\cos 2^{n-1}a.$$

Перемножая почленно и сокращая правую и левую части на произведение

$$\sin 2a\sin 4a\ldots\sin 2^{n-1}a,$$

получим:

$$\sin 2^n a=2^n\sin a\cos a\cos 2a\ldots\cos 2^{n-1}a,$$

откуда

$$\cos a\cos 2a\ldots\cos 2^{n-1}a=\frac{\sin 2^n a}{2^n\sin a}.$$

46. Имеем:

$$\sin\frac{2\pi}{15}=2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15},$$
$$\sin\frac{4\pi}{15}=2\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15},$$
$$\sin\frac{8\pi}{15}=2\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15},$$
$$\sin\frac{16\pi}{15}=2\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}.$$

Перемножая эти равенства и замечая, что $\sin\frac{16\pi}{15}=-\sin\frac{\pi}{15}$; $\cos\frac{8\pi}{15}=-\cos\frac{7\pi}{15}$, найдем:

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^4}.$$

Далее:

$$\cos\frac{5\pi}{15}=\frac{1}{2}$$

и

$$\sin\frac{6\pi}{15}=2\sin\frac{3\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15},$$
$$\sin\frac{12\pi}{15}=2\sin\frac{6\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}.$$

Отсюда

$$\cos\frac{3\pi}{15}\cdot\cos\frac{6\pi}{15}=\frac{1}{2^2}.$$

Остальное ясно.

47. Имеем:

$$\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg}A}=\frac{\sin(A+B)\cos A}{\cos(A+B)\sin A}=\frac{\sin(2A+B)+\sin B}{\sin(2A+B)-\sin B}=\frac{3}{2}.$$

48. Из данных соотношений получаем:

$$\sin 2B=\frac{3}{2}\sin 2A,$$
$$3\sin^2 A=1-2\sin^2 B=\cos 2B,$$

следовательно,

$$\cos(A+2B)=\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B=\cos A\cdot 3\sin^2 A-\sin\frac{3}{2}A\sin 2A=0.$$

49. Имеем:

$$2\cos a\cos\varphi=\cos(a+\varphi)+\cos(a-\varphi).$$

Следовательно, рассматриваемое выражение равно

$$\cos^2\varphi+\cos^2(a+\varphi)-[\cos^2(a+\varphi)+\cos(a+\varphi)\cos(a-\varphi)]=$$
$$=\cos^2\varphi-\cos^2 a\cos^2\varphi+\sin^2 a\sin^2\varphi=\sin^2 a.$$

50. Имеем, например:

$$a^2+a'^2+a''^2=\cos^2\varphi\cos^2\psi+\sin^2\varphi\sin^2\psi\cos^2\delta+\cos^2\varphi\sin^2\psi+$$
$$+\sin^2\varphi\cos^2\psi\cos^2\delta+\sin^2\varphi\sin^2\delta$$

(удвоенные произведения в первых двух квадратах взаимно уничтожаются). Отсюда

$$a^2+a'^2+a''^2=(\cos^2\varphi\cos^2\psi+\cos^2\varphi\sin^2\psi)+(\sin^2\varphi\sin^2\psi\cos^2\delta+$$
$$+\sin^2\varphi\cos^2\psi\cos^2\delta)+\sin^2\varphi\sin^2\delta=\cos^2\varphi+(\sin^2\varphi\cos^2\delta+\sin^2\varphi\sin^2\delta)=1.$$

Остальные аналогичны.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

1. Перепишем тождество следующим образом:

$$q^3+q^3\frac{(2p^3-q^3)^3}{(p^3+q^3)^3}=p^3-p^3\frac{(p^3-2q^3)^3}{(p^3+q^3)^3}.$$

Легко видеть, что правая часть возникает из левой путем перестановки p и q. Приведем левую часть к такому виду, из которого бы усматривалось, что при подобной перестановке величина ее не меняется. Тогда и справедливость тождества будет ясна.

Имеем:

$$\frac{q^3}{(p^3+q^3)^3}\left\{(p^3+q^3)^3+(2p^3-q^3)^3\right\}=\frac{9p^3q^3}{(p^3+q^3)^3}(p^6+q^6-p^3q^3).$$

2. Имеем:

$$\frac{p^3+q^3}{(p+q)^3\,p^3q^3}+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6(p+q)}{(p+q)^5\,pq}=$$
$$=\frac{p^2-pq-q^2}{(p+q)^2\,p^3q^3}+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{2}{pq}\right)=\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)^2\,p^3q^3}+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2=$$
$$=\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)^2\,p^3q^3}+\frac{3}{(p+q)^2\,p^2q^2}=\frac{1}{(p+q)^2\,p^3q^3}\left\{p^2-pq+q^2+3pq\right\}=\frac{1}{p^3q^3}.$$

3. Группируя два последних члена суммы, получим:

$$\frac{2}{(p+q)^4}\,\frac{q^3-p^3}{p^3q^3}+\frac{2}{(p+q)^4}\,\frac{q-p}{p^2q^2}=\frac{2(q-p)}{(p+q)^4\,p^3q^3}(p^2+q^2+2pq)=\frac{2(q-p)}{(p+q)^2\,p^3q^3}.$$

Присоединяя теперь первый член, найдем:

$$\frac{1}{(p+q)^3}\,\frac{q^4-p^4}{p^4q^4}+\frac{2(q-p)}{(p+q)^2\,p^3q^3}=\frac{q-p}{p^4q^4}.$$

4. Нужно доказать, что

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=1.$$

Подставляя вместо x его выражение, найдем:

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}.$$

Так как y и z возникают из x путем круговой перестановки букв a, b, c, то имеем:

$$\frac{1+y}{1-y}=\frac{b}{c},$$

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{c}{a}.$$

Отсюда искомое тождество очевидно.

5. Имеем:

$$\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}.$$

Но если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, то $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$, и обратно: если существует второе из этих равенств, то существует и первое. Применяя эти соображения к нашему случаю (полагая $A=a+b+c+d$; $B=a+b-c-d$; $C=a-b+c-d$; $D=a-b-c+d$), найдем:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d} \text{ или } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ или } \frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

6. Знаменатель имеет вид:

$$bcy^2+bcz^2-2bcyz+acz^2+acx^2-2acxz+abx^2+aby^2-2abxy=c(ax^2+by^2)+$$
$$+b(ax^2+cz^2)+a(cz^2+by^2)-2bcyz-2acxz-2abxy=$$
$$=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)-c^2z^2-b^2y^2-a^2x^2-2bcyz-2acxz-2abxy=$$
$$=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)-(ax+by+cz)^2.$$

Но так как по условию $ax+by+cz=0$, то знаменатель оказывается равным

$$(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2),$$

и наша дробь равна

$$\frac{1}{a+b+c}.$$

7. Приведем к общему знаменателю выражение, стоящее в левой части. Числитель получающейся дроби будет равен:

$$x^2y^2z^2(a^2-b^2)+b^2(x^2-a^2)(y^2-a^2)(z^2-a^2)-a^2(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2).$$

Легко видеть, что

$$(a^2-x^2)(a^2-y^2)(a^2-z^2)=a^6-(x^2+y^2+z^2)a^4+(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)a^2-x^2y^2z^2.$$

Отсюда

$$(b^2-x^2)(b^2-y^2)(b^2-z^2)=b^6-(x^2+y^2+z^2)b^4+(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)b^2-x^2y^2z^2.$$

Подставляя эти выражения в числитель и производя необходимые преобразования, получим искомую величину дроби.

8. $$S_0=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Имеем далее (приводя дроби к одному знаменателю):

$$S_0=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\{(b-c)-(a-c)+(a-b)\}=0,$$

$$S_1=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)\}=0,$$

$$S_2=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)\}.$$

Рассмотрим отдельно числитель.

Имеем:

$$a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)=ab(a-b)-c(a^2+b^2)+c^2(a-b)=$$
$$=(a-b)(ab-ca-cb+c^2)=(a-b)[a(b-c)-c(b-c)]=(a-b)(b-c)(a-c).$$

Отсюда следует, что

$$S_2=1.$$

Аналогично можно поступать и для вычисления S_3, S_4 и S_5, однако мы поступим здесь несколько иначе.

Легко видеть, что имеет место следующее тождество:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc.$$

Положим, в этом тождестве последовательно $x=a$, $x=b$ и $x=c$, получим:

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+ac+bc)a-abc=0,$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+ac+bc)b-abc=0,$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+ac+bc)c-abc=0.$$

Далее, разделим первое из этих равенств на $(a-b)(a-c)$, второе на $(b-c)(b-a)$ и третье на $(c-a)(c-b)$ и сложим почленно. Тогда:

$$S_3-(a+b+c)S_2+(ab+ac+bc)S_1-abcS_0=0.$$

Но так как известно, что $S_0=S_1=0$, а $S_2=1$, то имеем:

$$S_3=a+b+c.$$

Для вычисления S_4 возьмем предыдущее тождество и умножим обе части его на x, получим:

$$x(x-a)(x-b)(x-c)=x^4-(a+b+c)x^3+(ab+ac+bc)x^2-abcx.$$

Поступая аналогично, найдем:

$$S_4-(a+b+c)S_3+(ab+ac+bc)S_2-abcS_1=0.$$

Отсюда

$$S_4=(a+b+c)S_3-(ab+ac+bc)S_2=(a+b+c)^2-ab-ac-bc=a^2+b^2+c^2+$$
$$+ab+ac+bc.$$

Аналогично для вычисления S_5 (путем умножения исходного тождества на x^2) найдем:

$$S_5-(a+b+c)S_4+(ab+ac+bc)S_3-abcS_2=0.$$

Следовательно:

$$S_5=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)-(ab+ac+bc)(a+b+c)+abc=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+abc=a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+$$
$$+b^2c+c^2a+c^2b+abc.$$

9. Эта задача решается аналогично предыдущей. Именно равенства

$$S_0=S_1=S_2=0;\quad S_3=1,$$

устанавливаются путем непосредственной проверки, для вычисления же S_4 можно прибегнуть к следующему тождеству:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+$$
$$+dc)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

Отсюда получаем:

$$S_4=(a+b+c+d)S_3=a+b+c+d.$$

10. Положим, как и прежде:

$$S_m=\frac{a^m}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^m}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^m}{(c-a)(c-b)}.$$

Возьмем первый член нашей суммы σ_m и преобразуем его:

$$a^m\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a+b+c)a^{m+1}+a^{m-1}\cdot abc}{(a-b)(a-c)}.$$

Применяя круговую подстановку, получим аналогичные выражения для второго и третьего членов σ_m. Складывая же все эти члены, найдем:

$$\sigma_m=(a+b+c)S_{m+1}+abcS_{m-1}.$$

Отсюда находим:

$$\sigma_1=(a+b+c)S_2+abc\,S_0=a+b+c \qquad (S_2=1,\quad S_0=0),$$
$$\sigma_2=(a+b+c)S_3+abc\,S_1=(a+b+c)^2,$$

так как $S_3=a+b+c,\quad S_1=0,$

$$\sigma_3=(a+b+c)S_4+abc\,S_2=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)+abc,$$
$$\sigma_4=(a+b+c)S_5+abcS_3=(a+b+c)[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+2abc]$$

(после небольших преобразований).

11. Преобразуем левую часть нашего тождества следующим образом:

$$abc\left\{\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}{(a-0)(a-b)(a-c)}+\frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)}{(b-0)(b-a)(b-c)}+\frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)}{(c-0)(c-a)(c-b)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(0-\alpha)(0-\beta)(0-\gamma)}{(0-c)(0-a)(c-b)}-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right\}.$$

Рассмотрим первые четыре члена суммы, стоящей внутри фигурной скобки. Если развернуть числитель первого члена по степеням a, то получим:

$$a^3-(\alpha+\beta+\gamma)a^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)a-\alpha\beta\gamma.$$

Проделав аналогичную операцию с остальными тремя членами и суммируя, найдем, что сумма первых четырех членов будет равна

$$S_3-(\alpha+\beta+\gamma)S_2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)S_1-\alpha\beta\gamma S_0,$$

где S_k есть известная нам сумма (см. задачу 9, где нужно положить $d=0$). На основании результатов этой задачи, сумма рассматриваемых нами первых четырех членов будет равна 1 и, следовательно, искомое выражение

примет вид:

$$abc\left\{1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right\}=abc-\alpha\beta\gamma.$$

12. Рассмотрим следующую сумму:

$$S_4=\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{\beta^4}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{\gamma^4}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+$$
$$+\frac{\delta^4}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

На основании результатов задачи 9

$$S_4=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Положим в этой сумме:

$$\alpha=abc;\quad \beta=abd;\quad \gamma=acd;\quad \delta=bcd.$$

Тогда:

$$\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}=\frac{a^4b^4c^4}{(abc-abd)(abc-acd)(abc-bcd)}=$$
$$=\frac{a^2b^2c^2}{(c-d)(b-d)(a-d)}.$$

Круговой перестановкой получаем аналогичные выражения для остальных трех слагаемых, и предлагаемое тождество доказано.

13. 1° Преобразуем одно из слагаемых следующим способом:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a}\,\frac{\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{ac}}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{1}{abc}\,\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}.$$

Тогда искомая сумма будет равна:

$$\frac{1}{abc}\left\{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)}\right\}=abc\,S_2.$$

Но (см. задачу 8) $S_2=1$ и, следовательно, получаем:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}.$$

Впрочем, этот результат можно получить и несколько иначе. Рассмотрим четыре величины a, b, c и 0 и образуем для них S_0.

Тогда имеем:

$$S_0=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}+$$
$$+\frac{1}{(0-a)(0-b)(0-c)}=0,$$

так как $S_0=0$. Отсюда и получаем предыдущий результат.

2° Аналогично предыдущему, сумма может быть преобразована так:

$$\frac{1}{abc}\left\{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^3}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^3}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)}\right\}=\frac{1}{abc}S_3=\frac{1}{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Итак:

$$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}=\frac{ab+ac+bc}{a^2b^2c^2}.$$

Подобным же способом можно вычислять другие суммы вида:

$$\frac{1}{a^k(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^k(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c^k(c-a)(c-b)}.$$

14. Имеем:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-x)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-x)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-x)}+$$

$$+\frac{x^k}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0,$$

при $k=1$ и при $k=2$ (задача 9).

Отсюда и получаем:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(x-c)}=$$

$$=\frac{x^k}{(x-a)(x-b)(x-c)}; \quad (k=1,\ 2).$$

15. Имеем:

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}=\frac{(a+b+c+d-x)+(x-a)}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}=$$

$$=(a+b+c+d-x)\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

Применяя круговую перестановку к буквам a, b, c, d и складывая полученные выражения, найдем, что величина суммы, стоящей в левой части, равна:

$$(a+b+c+d-x)\left\{\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)}+\right.$$

$$+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)}+$$

$$\left.+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x)}\right\},$$

так как вторая сумма равна нулю.

Остается только убедиться, что

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)}+$$
$$+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)}+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x)}+$$
$$+\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}=0.$$

Можно привести эти дроби к общему знаменателю и, произведя в числителе необходимые преобразования, получить нуль. Однако, можно поступить иначе.

Умножив левую часть равенства на $(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)$, получим:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}(b-x)(c-x)(d-x)+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}\times$$
$$\times(a-x)(c-x)(d-x)+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}(a-x)(b-x)(d-x)+$$
$$+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}(a-x)(b-x)(c-x)+1.$$

Легко видеть, что мы имеем дело с многочленом третьей степени относительно x. Нужно доказать, что он равен нулю тождественно. Для этого достаточно показать (см. начало параграфа), что он обращается в нуль при четырех различных частных значениях x. Подставив вместо x последовательно a, b, c, d, убеждаемся, что наш многочлен при этих четырех значениях обращается в нуль, а следовательно, он равен нулю тождественно.

16. Если перенести x^2 налево, то там образуется трехчлен второй степени относительно x. Чтобы доказать, что он тождественно равен нулю, достаточно показать, что он обращается в нуль при трех различных значениях x. Полагая $x=a$, b, c, убеждаемся в справедливости тождества

17. Эта задача решается аналогично предыдущей задаче. Впрочем, как задачу 16, так и эту задачу можно решить, пользуясь величинами S_k (см. задачу 8 и дальнейшие).

18. Положим:

$$\frac{a-b}{c}=x;\quad \frac{b-c}{a}=y;\quad \frac{c-a}{b}=z.$$

Левая часть нашего равенства примет вид:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\,.$$

Рассмотрим подробнее дробь $\frac{y+z}{x}$. Имеем:

$$\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=$$
$$=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-a^2-c(b-a)}{ab}=\frac{c}{ab}(-a-b+c)=\frac{c}{ab}(-a-b-c+2c)=\frac{2c^2}{ab}\,,$$

так как $a+b+c=0$.

Применяя круговую подстановку, найдем:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3).$$

Но если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$ (см. задачу 23, § 1). Следовательно:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=6,$$

и равенство доказано.

19. Умножая рассматриваемое выражение на $(a+b)(b+c)(c+a)$, получим:

$$(a-b)(a+c)(b+c)+(a+c)(a+b)(b-c)+(a+b)(c-a)(b+c)+$$
$$+(a-b)(c-a)(b-c).$$

Это выражение является трехчленом второй степени относительно a, который обращается в нуль при $a=b$, $a=c$ и $a=0$, и следовательно равен нулю тождественно, т. е.

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0.$$

Мы предполагали при этом, что $b\neq c$. Если $b=c$, то в справедливости тождества легко убедиться непосредственно.

20. Имеем:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(b-a)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}.$$

Разбиваем аналогично два остальных члена левой части и приходим к предлагаемому тождеству.

21. Ответ: 0. Эта задача решается аналогично задаче 19.

22. Нужно доказать:

$$\frac{d^m(a-b)(b-c)+b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d)+a^m(b-c)(c-d)}-\frac{b-d}{a-c}=0.$$

Приведя к общему знаменателю, докажем, что числитель равен нулю. Однако, если разделить числитель на произведение:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

то получим следующее выражение:

$$\frac{a^m}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^m}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{c^m}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^m}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

При $m=1$, 2 это выражение равно 0 (см. задачу 9).

23. Докажем сначала, что

$$1-\frac{x}{\alpha_1}+\frac{x(x-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}-\frac{x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=$$
$$=(-1)^n\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}.\quad(*)$$

Точно так же легко видеть, что вторая фигурная скобка равна

$$\frac{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n)}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}.$$

Произведение же фигурных скобок равно

$$(-1)^n \frac{(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2)\ \dots\ (x^2-\alpha_n^2)}{\alpha_1^2\cdot\alpha_2^2\ \dots\ \alpha_n^2}.$$

Заменив в нем x через x^2, а a_i через a_i^2 и применяя равенство (*) в обратном порядке, получаем требуемое тождество.

24. Дано:

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=0.$$

Первая скобка равна:

$$\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}.$$

Вторая равна следующему выражению:

$$\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}.$$

Равным образом третья примет вид:

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}.$$

Рассмотрим сумму этих выражений:

$$-\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}-\frac{(a+b-c)(c+b-a)}{2ac}+$$

$$+\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}=\frac{a+b-c}{2abc}\{c(a+b+c)-b(c+b-a)-a(a+c-b)\}=$$

$$=\frac{(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{2abc}.$$

Таким образом, нам дано, что

$$\frac{(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}{2abc}=0.$$

Отсюда следует, что по крайней мере один из множителей, стоящий в числителе, равен нулю. Допустим, например, $a+b-c=0$. Тогда все три скобки равны нулю и, следовательно, две из данных дробей равны 1, а третья -1. Тот же результат дадут и две остальные возможности.

25. Приведя исходное равенство к общему знаменателю и отбросив его, после преобразований получим:

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0. \qquad (1)$$

Но второе равенство (которое требуется доказать) точно так же можно привести к виду:

$$(a^n+b^n)(a^n+c^n)(b^n+c^n)=0. \qquad (2)$$

Совершенно очевидно, что при n нечетном (2) следует из (1), так как если, например, $a+b=0$, то $a=-b$ и $a^n+b^n=a^n+(-a)^n=a^n-a^n=0$.

26. Перепишем данную пропорцию следующим образом:

$$\frac{(bz+cy)\,yz}{-ax+by+cz}=\frac{(cx+az)\,xz}{ax-by+cz}=\frac{(ay+bx)\,xy}{ax+by-cz}.$$

Но из пропорции: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ следует:

$$\frac{A+C}{B+D}=\frac{C+E}{D+F}=\frac{A+E}{B+F}$$

(легко проверить, положив $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\lambda$ и выразив A, C и E через λ, B, D, F).

Поэтому имеем:

$$\frac{c(x^2+y^2)+z(ax+by)}{c}=\frac{a(z^2+y^2)+x(by+cz)}{a}=\frac{b(x^2+z^2)+y(cz+ax)}{b}.$$

Вычтем из каждого члена этого равенства $x^2+y^2+z^2$. Получим:

$$\frac{z(ax+by-cz)}{c}=\frac{x(by+cz-ax)}{a}=\frac{y(cz+ax-by)}{b}.$$

Присоединим исходные равенства:

$$\frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}=\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)}=\frac{cx+az}{y(ax-by+cz)}.$$

Перемножая эти равенства почленно, найдем:

$$\frac{ay+bx}{c}=\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}.$$

Отсюда

$$c=(ay+bx)\mu,$$
$$b=(cx+az)\mu,$$
$$a=(bz+cy)\mu.$$

Умножая первое из этих равенств на c, второе на b и третье на a и составляя выражение $b^2+c^2-a^2$, найдем $b^2+c^2-a^2=2\mu bcx$.

Аналогично получим:

$$c^2+a^2-b^2=2\mu cay,$$
$$a^2+b^2-c^2=2\mu abz.$$

Отсюда, окончательно:

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}.$$

27. Так как $a+b+c=0$, то можем написать:

$$(a+b+c)(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0.$$

Развернем выражение, стоящее в левой части, и найдем:

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+ab(\alpha+\beta)+ac(\alpha+\gamma)+cb(\beta+\gamma)=0.$$

Но

$$\alpha+\beta=-\gamma;\ \alpha+\gamma=-\beta;\ \beta+\gamma=-\alpha,$$

поэтому

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-ab\gamma-ac\beta-cb\alpha=0,$$

или

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-abc\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)=0,$$

и так как $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0$ (по условию), то имеем:

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma=0.$$

28. Из равенств

$$(b^2+c^2-a^2)\,x=(c^2+a^2-b^2)\,y=(a^2+b^2-c^2)\,z$$

следует:

$$\frac{x}{\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}}=\frac{y}{\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}}=\frac{z}{\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}}.$$

Положим, для краткости:

$$b^2+c^2-a^2=A;\ c^2+a^2-b^2=B;\ a^2+b^2-c^2=C.$$

Легко видеть, что наша задача эквивалентна следующей. Если уравнение $x^3+y^3+z^3=(x+y)(x+z)(y+z)$ имеет решение

$$x=a,\ y=b,\ z=c,$$

то оно имеет и следующее решение:

$$x=\frac{1}{A};\ y=\frac{1}{B};\ z=\frac{1}{C}.$$

Известно следующее тождество (см. задачу 19, § 1):

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Пользуясь этим тождеством, легко доказать, что равенства

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(x+z)(y+z), \tag{1}$$

$$(x+y+z)^3=4(x^3+y^3+z^3)=4(x+y)(x+z)(y+z), \tag{2}$$

$$(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=-4xyz \tag{3}$$

эквивалентны, и существование любого из них влечет за собой существование остальных. Таким образом, достаточно доказать, что

$$\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)^3=4\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right),$$

т. е. что

$$(AB+AC+BC)^3=4(A+B)(A+C)(B+C)\cdot ABC.$$

Но

$$A+B=2c^2;\ A+C=2b^2;\ B+C=2a^2.$$

Поэтому нужно доказать:

$$(AB+AC+BC)^3=32a^2b^2c^2\cdot ABC.$$

Займемся сначала вычислением $AB+AC+BC$, а затем вычислением ABC. Имеем:

$$\begin{aligned}AB+AC+BC&=A(B+C)+BC=(b^2+c^2-a^2)\cdot 2a^2+\\&+[a^2+(b^2-c^2)][a^2-(b^2-c^2)]=2a^2b^2+2a^2c^2-2a^4+a^4-b^4-c^4+2b^2c^2=\\&=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=\\&=(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

В силу равенства (3)

$$(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)=-4abc.$$

Поэтому

$$AB+AC+BC=-4abc(a+b+c).$$

Обратимся к вычислению ABC. Положим:

$$a^2+b^2+c^2=s.$$

Тогда:

$$ABC=(s-2a^2)(s-2b^2)(s-2c^2)=s^3-2(a^2+b^2+c^2)s^2+$$
$$+4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)s-8a^2b^2c^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)s-s^3-8a^2b^2c^2=$$
$$=s\{4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2-(a^2+b^2+c^2)^2\}-8a^2b^2c^2=$$
$$=-s\{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2\}-8a^2b^2c^2=$$
$$=s(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)(a+b+c)-8a^2b^2c^2=$$
$$=-4abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-8a^2b^2c^2=-4abc\{a^3+b^3+c^3+$$
$$+a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc\}.$$

Но

$$(a+b)(a+c)(b+c)=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc.$$

Поэтому, в силу равенства (1), выражение, стоящее внутри фигурной скобки, равно $2(a^3+b^3+c^3)$.

Но в силу равенства (2):

$$2(a^3+b^3+c^3)=\frac{1}{2}(a+b+c)^3.$$

Поэтому

$$ABC=-2abc(a+b+c)^3.$$

Но, как было выведено:

$$AB+AC+BC=-4abc(a+b+c).$$

Поэтому, действительно:

$$(AB+AC+BC)^3=32a^2b^2c^2\cdot ABC.$$

29. 1° Имеем:

$$P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2};\quad P_n-P_{n-2}=a_nP_{n-1};$$
$$Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2};\quad Q_n-Q_{n-2}=a_nQ_{n-1}.$$

Левая часть предполагаемого равенства преобразуется следующим способом:

$$\frac{P_{n+2}-P_n}{P_n}\cdot\frac{P_{n+1}-P_{n-1}}{P_{n+1}}=a_{n+2}\frac{P_{n+1}}{P_n}\cdot a_{n+1}\frac{P_n}{P_{n+1}}=a_{n+2}\cdot a_{n+1}.$$

Совершенно аналогично получаем, что и правая часть равенства дает $a_{n+1}\cdot a_{n+2}$, и тождество доказано.

2° Имеем:

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}}{Q_kQ_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k-1}}.$$

Полагая в этом равенстве $k=1, 2, \ldots n$ и складывая почленно, получим искомый результат.

3° Имеем:

$$P_{n+2}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n+2}=(a_{n+2}P_{n+1}+P_n)Q_{n-2}-P_{n-2}(Q_{n+1}a_{n+2}+Q_n)=$$
$$=a_{n+2}(P_{n+1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n+1})+P_nQ_{n-2}-P_{n-2}Q_n=$$
$$=a_{n+2}\{(a_{n+1}P_n+P_{n-1})Q_{n-2}-P_{n-2}(a_{n+1}Q_n+Q_{n-1})\}+$$
$$+(a_nP_{n-1}+P_{n-2})Q_{n-2}-P_{n-2}(a_nQ_{n-1}+Q_{n-2})=$$
$$=a_{n+1}a_{n+2}(P_nQ_{n-2}-P_{n-2}Q_n)+a_{n+2}(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1})+$$
$$+a_n(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1})=a_{n+1}a_{n+2}\{(a_nP_{n-1}+P_{n-2})Q_{n-2}-$$
$$-P_{n-2}(a_nQ_{n-1}+Q_{n-2})\}+a_{n+2}(-1)^n+a_n(-1)^n=$$
$$=(a_{n+2}a_{n+1}a_n+a_{n+2}+a_n)(-1)^n.$$

4° Известно, что $P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}$. Поэтому

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{\cfrac{P_{n-1}}{P_{n-2}}} = a_n + \cfrac{1}{\cfrac{a_{n-1}P_{n-2} + P_{n-3}}{P_{n-2}}} =$$

$$= a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{P_{n-3}}{P_{n-2}}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{P_0}{P_1}}} =$$

$$= a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}.$$

Аналогично найдем соответствующее выражение и для $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$.

30. На основании результатов предыдущей задачи имеем:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) = (a_0, a_2, \ldots, a_n) = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Следовательио, действительно $P_{n-1} = Q_n$.

31. Нужно доказать, что

$$P_{n+1}^2 - P_{n-1}P_{n+1} = P_n P_{n+2} - P_n^2,$$

или

$$P_{n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}) = P_n(P_{n+2} - P_n).$$

Но

$$P_{n+1} = aP_n + P_{n-1};$$
$$P_{n+2} = aP_{n+1} + P_n.$$

Следовательно:

$$P_{n+1} - P_{n-1} = aP_n; \quad P_{n+2} - P_n = aP_{n+1}.$$

Отсюда и следует справедливость нашего тождества.

32. По условию:

$$x = \frac{1}{(a, b, \ldots, l, a, b, \ldots, l)}.$$
$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{(a, b, \ldots, l)}.$$

Иначе

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{l + \cfrac{P_n}{Q_n}}}}.$$

Таким образом x получается из $\frac{P_n}{Q_n}$, если в этой дроби заменить l через $l+\frac{P_n}{Q_n}$.

Но

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{lP_{n-1}+P_{n-2}}{lQ_{n-1}+Q_{n-2}}.$$

Поэтому

$$x=\frac{\left(l+\frac{P_n}{Q_n}\right)P_{n-1}+P_{n-2}}{\left(l+\frac{P_n}{Q_n}\right)Q_{n-1}+Q_{n-2}}=\frac{P_nQ_n+P_nP_{n-1}}{Q_n^2+P_nQ_{n-1}}.$$

33. Легко видеть, что при $k=0$, 1 наша формула справедлива.

Допуская справедливость ее при $k=n-1$, докажем, что она имеет место и при $k=n$.

Итак допускаем:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+\cdots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Но на основании закона составления P_k и Q_k имеем:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{b_{n-1}P_{n-2}+a_{n-1}P_{n-3}}{b_{n-1}Q_{n-2}+a_{n-1}Q_{n-3}},$$

где P_{n-2}, P_{n-3}, Q_{n-2}, Q_{n-3} не зависят от a_{n-1} и b_{n-1}.

С другой стороны ясно, что дробь:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+\cdots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}}}$$

получается из дроби

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+\cdots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}$$

путем замены b_{n-1} через $b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}$.

Поэтому

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cdots+\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\cfrac{a_n}{b_n}}}=\frac{\left(b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}\right)P_{n-2}+a_{n-1}P_{n-3}}{\left(b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}\right)Q_{n-2}+a_{n-1}Q_{n-3}}=$$

$$=\frac{b_{n-1}P_{n-2}+a_{n-1}P_{n-3}+\frac{a_n}{b_n}P_{n-2}}{b_{n-1}Q_{n-2}+a_{n-1}Q_{n-3}+\frac{a_n}{b_n}Q_{n-2}}=\frac{P_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}P_{n-2}}{Q_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}Q_{n-2}}=\frac{b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2}}{b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}}=\frac{P_n}{Q_n}.$$

34. Обозначим значение нашей дроби через $\frac{P_n}{Q_n}$. Имеем:

$$P_1=r; \qquad Q_1=r+1;$$
$$P_2=r(r+1); \qquad Q_2=r^2+r+1;$$

докажем методом индукции, что

$$P_n=r\frac{r^n-1}{r-1}; \qquad Q_n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

При $n=1$ эти формулы справедливы. Предполагая справедливость их при $n=m$, докажем, что они имеют место и при $n=m+1$.

Имеем:

$$P_{m+1}=b_{m+1}P_m+a_{m+1}P_{m-1}.$$

В нашем случае находим:

$$P_{m+1}=(r+1)r\frac{r^m-1}{r-1}-r^2\frac{r^{m-1}-1}{r-1}=r\frac{r^{m+1}-1}{r-1}.$$

Аналогично получим, что

$$Q_{m+1}=\frac{r^{m+2}-1}{r-1}.$$

35. Положим:

$$\frac{1}{u_r}+\frac{1}{u_{r+1}}=\frac{1}{u_r+x_r}.$$

Тогда найдем:

$$x_r=-\frac{u_r^2}{u_r+u_{r+1}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=\cfrac{1}{u_1-\cfrac{u_1^2}{u_1+u_2}}.$$

Далее:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2+x_2}=\frac{1}{u_1+x_2'},$$

где

$$x_2' = -\frac{u_1^2}{u_1 + u_2 + x_2}.$$

Итак:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{u_1^2}{u_1 + u_2 + x_2}} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{u_1^2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_2^2}{u_2 + u_3}}}.$$

Методом индукции получим и общую формулу.

36. Обозначим дробь:

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

через $\frac{P_n}{Q_n}$, а дробь:

$$\cfrac{c_1a_1}{c_1b_1 + \cfrac{c_1c_2a_2}{c_2b_2 + \cdots + \cfrac{c_{n-1}c_na_n}{c_nb_n}}}$$

положим равною $\frac{P'_n}{Q'_n}$. Нужно доказать, что $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n}{Q'_n}$ при любом целом положительном n.

Имеем:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_1b_2}{b_1b_2 + a_2}; \ \ldots$$

$$\frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{c_1a_1}{c_1b_1}; \quad \frac{P'_2}{Q'_2} = \frac{c_1c_2a_1b_2}{c_1c_2(b_1b_2 + a_2)}; \ \ldots$$

Можно принять: $P_1 = a_1$; $Q_1 = b_1$; $P_2 = a_1b_2$, $Q_2 = b_1b_2 + a_2$, и тогда будут иметь место соотношения (см. задачу 33):

$$P_{n+1} = b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1}.$$

Положим:

$$P'_1 = c_1a_1; \quad P'_2 = c_1c_2a_1b_2;$$
$$Q'_1 = c_1b_1; \quad Q'_2 = c_1c_2(b_1b_2 + a_2).$$

Докажем, что тогда будем иметь при любом n:

$$P'_n=c_1c_2\ \dots\ c_nP_n;\ Q'_n=c_1c_2\ \dots\ c_nQ'_n.$$

Докажем это утверждение методом индукции, т. е., предполагая справедливость его при зиачке, меньшем или равном n, докажем справедливость и при значке, равном $n+1$.

Имеем:

$$P'_{n+1}=c_{n+1}b_{n+1}P'_n+c_nc_{n+1}a_{n+1}P'_{n-1},$$
$$Q'_{n+1}=c_{n+1}b_{n+1}Q'_n+c_nc_{n+1}a_{n+1}Q'_{n-1}.$$

Отсюда (в силу предположения)

$$P'_{n+1}=c_{n+1}b_{n+1}c_1c_2\ \dots\ c_nP_n+c_nc_{n+1}a_{n+1}c_1c_2\ \dots\ c_{n-1}P_{n-1}=$$
$$=c_1c_2\ \dots\ c_{n+1}(b_{n+1}P_n+a_{n+1}P_{n-1})=c_1c_2\ \dots\ c_{n+1}P_{n+1}.$$

Совершенно так же докажем:

$$Q'_{n+1}=c_1c_2\ \dots\ c_{n+1}Q_{n+1}.$$

Теперь уже легко найдем, что

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P'_n}{Q'_n}.$$

37. 1° Положим

$$2\cos x-\cfrac{1}{2\cos x-\cfrac{1}{2\cos x-\dots\cdot\cfrac{}{\cdot-\cfrac{1}{2\cos x}}}}=\frac{P_n}{Q_n}.$$

Имеем:

$$\frac{P_1}{Q_1}=2\cos x.$$

Поэтому можно положить:

$$P_1=\frac{\sin 2x}{\sin x};\qquad Q_1=\frac{\sin x}{\sin x}.$$

Далее:

$$\frac{P_2}{Q_2}=2\cos x-\frac{1}{2\cos x}=\frac{4\cos^2 x-1}{2\cos x}.$$

Следовательно, можно приинять:

$$P_2=\frac{\sin 3x}{\sin x};\qquad Q_2=\frac{\sin 2x}{\sin x}.$$

Докажем, что тогда

$$P_n=\frac{\sin (n+1)x}{\sin x};\qquad Q_n=\frac{\sin nx}{\sin x}$$

при любом n.

Предполагая, что эти формулы справедливы при значениях, не превосходящих n, докажем, что они имеют место и при $n+1$. Имеем (см. задачу 33):

$$P_{n+1}=2\cos x\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}-\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}\sin(n+2)x.$$

Совершенно так же найдем, что

$$Q_{n+1}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x},$$

а потому действительно:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}$$

при любом целом положительном n.

2° Обозначим непрерывную дробь, стоящую в правой части, через $\frac{P_n}{Q_n}$. Нужно доказать:

$$\frac{P_n}{Q_n}=1+b_2+b_2b_3+\ldots+b_2b_3\ \ldots\ b_n.$$

Имеем:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{1};\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{b_2+1}{1}.$$

Поэтому можно принять:

$$P_1=1;\ Q_1=1;\ P_2=b_2+1;\ Q_2=1.$$

Тогда индукцией легко доказать, что

$$P_n=1+b_2+b_2b_3+\ldots+b_2b_3\ \ldots\ b_n,$$
$$Q_n=1,$$

а следовательно, справедливо и наше равенство.

38. 1° Имеем:

$$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=$$
$$=(\sin a+\sin b)+[\sin c-\sin(a+b+c)]=$$
$$=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b+2c}{2}=$$
$$=2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b+2c}{2}\right)=$$
$$=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}.$$

2° аналогично предыдущему.

39. Рассмотрим сумму:

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c.$$

Имеем:

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}+\frac{\sin c}{\cos c}=$$

$$=\frac{\sin(a+b)\cos c+\sin c\cos a\cos b}{\cos a\cos b\cos c}=$$

$$=\frac{\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c-\cos(a+b)\sin c+\sin c\cos a\cos b}{\cos a\cos b\cos c}=$$

$$=\frac{\sin(a+b+c)+\sin c\,[\cos a\cos b-\cos(a+b)]}{\cos a\cos b\cos c}=$$

$$=\frac{\sin(a+b+c)+\sin a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c}.$$

Отсюда и следует искомое равенство.

40. Равенства 1°, 2° и 3° легко получаются из задачи 38 (1°, 2°) и из задачи 39°, полагая $a=A$, $b=B$, $c=C$ и $a+b+c=A+B+C=\pi$.

Переходим к доказательству 4°. Перепишем левую часть следующим образом:

$$S=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right).$$

Но так как

$$A+B+C=\pi,$$

то

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}.$$

Отсюда получаем:

$$S=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}=1,$$

так как

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

5° В самом деле:

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin 2A+2\sin(B+C)\cos(B-C)=$$

$$=2\sin A\cos A+2\sin A\cos(B-C)=$$

$$=2\sin A\,[\cos A+\cos(B-C)]=4\sin A\sin B\sin C.$$

41. 1° Нужно найти, какое алгебраическое соотношение имеет место между a, b и c, если

$$\cos a+\cos b+\cos c-1-4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=0.$$

Для этого приведем левую часть равенства к «логарифмическому виду», т. е. постараемся представить ее в виде произведения тригонометрических функций величин a, b и c.

Имеем:

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=2\left(\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\right),$$

$$\cos c-1=-2\sin^2\frac{c}{2}.$$

Поэтому левая часть примет вид:

$$2\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-2\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}-2\sin^2\frac{c}{2}-4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=$$

$$=2\left[\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-\left(\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin^2\frac{c}{2}\right)\right]=$$

$$=2\left[\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\right)^2\right]=$$

$$=2\left[\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)+\sin\frac{c}{2}\right]\times$$

$$\times\left[\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)-\sin\frac{c}{2}\right]=$$

$$=2\left(\cos\frac{a-b}{2}+\sin\frac{c}{2}\right)\left(\cos\frac{a+b}{2}-\sin\frac{c}{2}\right)=$$

$$=2\left[\cos\frac{a-b}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)\right]\left[\cos\frac{a+b}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)\right]=$$

$$=-8\sin\frac{\pi+b+c-a}{4}\sin\frac{\pi+a+c-b}{4}\sin\frac{\pi+a+b-c}{4}\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}.$$

Но это выражение по условию должно равияться нулю и, следовательно, по крайней мере один из множителей должен равняться нулю. Но из равенства $\sin\alpha=0$ следует $\alpha=k\pi$ (где k — любое целое число). Поэтому между a, b и c, удовлетворяющими исходному соотношению, существует по крайней мере одна из четырех зависимостей:

$$a+b+c=(4k+1)\pi,$$
$$a+b-c=(4k-1)\pi,$$
$$a+c-b=(4k-1)\pi,$$
$$b+c-a=(4k-1)\pi.$$

2° Имеем (см. задачу 30):

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c=\frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c}.$$

В силу наших условий

$$\sin(a+b+c)=0 \text{ и } a+b+c=k\pi.$$

3° Преобразуем исходное выражение. Имеем:

$$1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c=1-\cos^2a-\cos^2b-$$
$$-(\cos^2c-2\cos a\cos b\cos c+\cos^2a\cos^2b)+\cos^2a\cos^2b=1-\cos^2a-\cos^2b-$$
$$-(\cos c-\cos a\cos b)^2+\cos^2a\cos^2b=(1-\cos^2a)(1-\cos^2b)-$$
$$-(\cos c-\cos a\cos b)^2=(\sin a\sin b-\cos c+\cos a\cos b)(\sin a\sin b+$$
$$+\cos c-\cos a\cos b)=[\cos c-\cos(a+b)][\cos(a-b)-\cos c]=$$
$$=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{c+b-a}{2}.$$

Следовательно, существует по крайней мере одно из соотношений:

$$a+b+c=2k\pi, \quad a+b-c=2k\pi, \quad a+c-b=2k\pi,$$
$$b+c-a=2k\pi.$$

42. Положим:

$$x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \qquad y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}; \quad z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Тогда

$$\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{2y}{1-y^2}=\operatorname{tg}\beta; \quad \frac{2z}{1-z^2}=\operatorname{tg}\gamma,$$

и наша задача примет следующую форму. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

если

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1.$$

Последнее равенство перепишем так:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)-\left(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=0.$$

Деля обе части на $1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}-1=0; \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

Следовательно:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}=k\pi$$

(так как если тангенсы равны, то углы отличаются на кратное π) и

$$\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi.$$

Но тогда предложение доказано (см. задачу 40, 3°).

43. Положим: $b=\operatorname{tg}\beta$; $c=\operatorname{tg}\gamma$; $a=\operatorname{tg}\alpha$. Тогда

$$\frac{b-c}{1+bc}=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\operatorname{tg}(\beta-\gamma),$$

и, следовательно, наше равенство эквивалентно следующему:

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

Положим:

$$\beta-\gamma=x; \quad \gamma-\alpha=y; \quad \alpha-\beta=z.$$

Остается доказать, что

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z,$$

если

$$x+y+z=0.$$

Но тогда имеем:

$$\operatorname{tg}(x+y)=-\operatorname{tg}z; \qquad \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=-\operatorname{tg}z.$$

Отсюда и следует искомое равенство.

Ясно, что обе последние задачи можно решить и путем непосредственных преобразований рассматриваемых алгебраических выражений.

44. Имеем:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{\sin\alpha\,(3-4\sin^2\alpha)}{\cos\alpha\,(1-4\sin^2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{3-4\sin^2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}.$$

Делим числитель и знаменатель этой дроби на $\cos^2\alpha$ и заменяем $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ через $1+\operatorname{tg}^2\alpha$.

Получаем:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

45. Умножая на $a+b$ обе части равенства и заменяя в правой единицу через $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$, получим:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\frac{b}{a}\sin^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha = \sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

откуда

$$\frac{b}{a}\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha=0$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\alpha-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=0$$

$$\frac{b}{a}\sin^4\alpha=\frac{a}{b}\cos^4\alpha,$$

или

$$\frac{\sin^4\alpha}{a^2}=\frac{\cos^4\alpha}{b^2}=\lambda.$$

Подставляя в исходное равенство, найдем:

$$\lambda=\frac{1}{(a+b)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

46. Из второго равенства имеем:

$$(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos\theta-$$
$$-(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots+a_n\sin\alpha_n)\sin\theta=0.$$

На основании первого равенства и так как $\sin\theta\neq 0$, получаем:

$$a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots+a_n\sin\alpha_n=0. \qquad (*)$$

Умножая первое равенство на $\cos\lambda$, а равенство (*) на $\sin\lambda$ и вычитая из первого результата второй, будем иметь:

$$a_1\cos(\alpha_1+\lambda)+a_2\cos(\alpha_2+\lambda)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+\lambda)=0.$$

47. Легко видеть, что левая часть приводится к следующему выражению:

$$(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)+(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha)+(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=0.$$

48. 1° Имеем:

$$r_a-r=\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p}=\frac{sa}{p(p-a)}.$$

Следовательно:

$$\frac{a^2}{r_a-r}=\frac{ap(p-a)}{s}.$$

Поэтому

$$\omega=\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r}=\frac{p}{s}\left\{a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)\right\}.$$

Но

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Отсюда

$$\omega=s\left\{\frac{a}{(p-b)(p-c)}+\frac{b}{(p-a)(p-c)}+\frac{c}{(p-a)(p-b)}\right\}=$$

$$=s\left\{\frac{(p-b)+(p-c)}{(p-b)(p-c)}+\frac{(p-a)+(p-c)}{(p-a)(p-c)}+\frac{(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)}\right\}=2(r_a+r_b+r_c).$$

2° Имеем:

$$\sigma=\frac{a^2r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2r_c}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=s\left\{\frac{a^2}{(p-a)(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(p-b)(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(p-c)(c-a)(c-b)}\right\}.$$

Но (см. задачу 9)

$$\frac{a^2}{(p-a)(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(p-b)(b-c)(b-a)}+$$

$$+\frac{c^2}{(p-c)(c-a)(c-b)}=\frac{p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Поэтому

$$\sigma=\frac{sp^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{sp^3}{s^2}=\frac{p^3}{s}=\frac{p^2}{r}.$$

3° Получаем:

$$r_a+r_b+r_c=s\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=\frac{s(ab+ac+bc-p^2)}{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Далее:

$$\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}=\frac{1}{s}\left\{a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)\right\}=$$

$$=\frac{1}{s}(2p^2-a^2-b^2-c^2)=\frac{2}{s}(-p^2+ab+ac+bc).$$

Остальное очевидно.

4° Рассмотрим сначала первую из сумм:

$$\sigma=\frac{1}{s^2}\left\{\frac{bc\,(p-a)^2}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{ac\,(p-b)^2}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{ab\,(p-c)^2}{(c-a)\,(c-b)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{s^2}\left\{p^2\left[\frac{bc}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)\,(c-b)}\right]-\right.$$

$$-2pabc\left[\frac{1}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{1}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{1}{(c-a)\,(c-b)}\right]+$$

$$\left.+abc\left[\frac{a}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{b}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{c}{(c-a)\,(c-b)}\right]\right\}.$$

Но (см. задачу 8)

$$\frac{1}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{1}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{1}{(c-a)\,(c-b)}=0,$$

$$\frac{a}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{b}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{c}{(c-a)\,(c-b)}=0.$$

Поэтому

$$\sigma=\frac{p^2}{s^2}\left[\frac{bc}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)\,(c-b)}\right];$$

далее:

$$\frac{bc}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)\,(c-b)}=abc\left\{\left[\frac{1}{a\,(a-b)\,(a-c)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{b\,(b-c)\,(b-a)}+\frac{1}{c\,(c-a)\,(c-b)}+\frac{1}{(0-a)\,(0-b)\,(0-c)}\right]+\frac{1}{abc}\right\}=1.$$

Итак,

$$\sigma=\frac{p^2}{s^2}=\frac{1}{r^2}.$$

Перейдем ко второй сумме. Имеем:

$$\sigma=\frac{1}{r_ar_br_c}\left\{\frac{a^2r_a}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{b^2r_b}{(b-c)\,(b-a)}+\frac{c^2r_c}{(c-a)\,(c-b)}\right\}=$$

$$=\frac{s}{r_ar_br_c}\left\{\frac{a^2}{(a-b)\,(a-c)\,(p-a)}+\frac{b^2}{(b-c)\,(b-a)\,(p-b)}+\frac{c^2}{(c-a)\,(c-b)\,(p-c)}\right\}.$$

Но

$$\frac{a^2}{(a-b)\,(a-c)\,(a-p)}+\frac{b^2}{(b-c)\,(b-a)\,(b-p)}+\frac{c^2}{(c-a)\,(c-b)\,(c-p)}+$$

$$+\frac{p^2}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=0.$$

Поэтому

$$\sigma=\frac{s\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{s^3}\cdot\frac{p^2}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=\frac{p^2}{s^2}=\frac{1}{r^2}.$$

5° Имеем:

$$\sigma=\frac{ar_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{br_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{cr_c}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=s\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)(p-a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(p-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\}=$$

$$=-s\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-p)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(b-p)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(c-p)}+\right.$$

$$\left.+\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}-\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right\}=$$

$$=\frac{sp}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2}{s}=\frac{p}{r}.$$

Далее:

$$\sigma=\frac{(b+c)r_a}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)r_b}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)r_c}{(c-a)(c-b)}=s\left\{\frac{(b+c)}{(a-b)(a-c)(p-a)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(c+a)}{(b+c)(b-a)(p-b)}+\frac{(a+b)}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\}=s(a+b+c)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(a-b)(a-c)(p-a)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(p-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\}-$$

$$-s\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)(p-a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(p-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(p-c)}\right\}.$$

Но

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-p)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(b-p)}+$$

$$+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-p)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}=0.$$

Поэтому первая фигурная скобка равна:

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Вторая же фигурная скобка равняется $\frac{p^2}{s^2}$. Следовательно:

$$\sigma=\frac{s(a+b+c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}-\frac{p^2}{s}=\frac{2p^2}{s}-\frac{p^2}{s}=\frac{p^2}{s}=\frac{p}{r}.$$

49. Перепишем предполагаемое тождество следующим образом:

$$\sin(a+b-c-d)\sin(a-b)=\sin(a-c)\sin(a-d)-\sin(b-c)\sin(b-d).$$

Применяя формулу

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\},$$

найдем:

$$\sin(a+b-c-d)\sin(a-b)=\frac{1}{2}\{\cos(2b-c-d)-\cos(2a-c-d)\},$$

$$\sin(a-c)\sin(a-d)=\frac{1}{2}\{\cos(c-d)-\cos(2a-c-d)\},$$

$$\sin(b-c)\sin(b-d)=\frac{1}{2}\{\cos(c-d)-\cos(2b-c-d)\}.$$

Остальное очевидно.

50. 1° Имеем:

$$1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{1+\cos\theta}=\frac{b+c}{p},$$

где

$$a+b+c=2p.$$

Отсюда

$$1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}=\frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{p}=4,$$

и следовательно:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}=1.$$

2°

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{b+c}{p}-1=\frac{p-a}{p}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}.$$

Но известно, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

51. Левая часть нашего равенства может быть переписана так:

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}\left\{\sin(b-c)-\sin(a-c)+\sin(a-b)\right\}.$$

Но имеем:

$$\sin(b-c)-\sin(a-c)=2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{b+a-2c}{2}.$$

Поэтому выражение, стоящее внутри фигурной скобки, равно:

$$2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{b+a-2c}{2}-2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{b-a}{2}=4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}.$$

Но

$$\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)=$$
$$=8\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}.$$

Остальное очевидно.

52. 1° Дробь, стоящая в левой части, имеет вид:

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}\left\{\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\right.$$
$$\left.+\sin c\sin(a-b)\right\}=\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}\cdot\sum\sin a\sin(b-c),$$

где суммироваиие распространяется иа все выражения, получающиеся из стоящего под знаком суммы путем круговой перестановки. Но

$$\sin a \sin (b-c)=\frac{1}{2}[\cos (a-b+c)-\cos (a+b-c)].$$

Поэтому имеем:

$$\sum \sin a \sin (b-c)=\frac{1}{2}\{\cos (a+c-b)-\cos (a+b-c)+\cos (b+a-c)-$$
$$-\cos (b+c-a)+\cos (c+b-a)-\cos (c+a-b)\}=0,$$

и наше тождество справедливо.

2° Для доказательства данного тождества можно поступить аналогично тому, что мы имеем в случае 1°. Но можно получить эту же формулу непосредственно из формулы 1°, заменив a через $\frac{\pi}{2}-a$, b через $\frac{\pi}{2}-b$ и, наконец c через $\frac{\pi}{2}-c$.

53. 1° Нужно доказать, что

$$\sum \sin a \sin (b-c) \cos (b+c-a)=0.$$

Суммирование распространяется иа выражения, возникающие из исходного путем круговой перестановки.

Но

$$\sin a \sin (b-c)=\frac{1}{2}\{\cos (a-b+c)-\cos (a+b-c)\}.$$

Поэтому

$$\sum \sin a \sin (b-c) \cos (b+c-a)=\frac{1}{2}\sum \cos (b+c-a) \cos (a-b+c)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum \cos (a+b-c) \cos (b+c-a)=\frac{1}{4}\sum [\cos 2c+\cos (2b-2a)-\cos 2b-$$
$$-\cos (2c-2a)]=\frac{1}{4}\{\cos 2c-\cos 2b+\cos 2a-\cos 2c+\cos 2b-\cos 2a+$$
$$+\cos (2b-2a)-\cos (2c-2a)+\cos (2c-2b)-\cos (2a-2b)+\cos (2a-2c)-$$
$$-\cos (2b-2c)\}=0.$$

2° Можно получить из 1° путем замены a через $\frac{\pi}{2}-a$, b через $\frac{\pi}{2}-b$ и c через $\frac{\pi}{2}-c$.

3° Совершенно аналогично предыдущему найдем:

$$\sum \sin a \sin (b-c) \sin (b+c-a)=\frac{1}{2}\{\sin 2(b-a)+\sin 2(c-b)+\sin 2(a-c)\}.$$

Остается только показать, что

$$\frac{1}{2}\{\sin 2(b-a)+\sin 2(c-b)+\sin 2(a-c)\}=2 \sin (b-c) \sin (c-a) \sin (a-b).$$

4° Доказывается аналогично 3° или путем замены a через $\frac{\pi}{2}-a$, b через $\frac{\pi}{2}-b$ и c через $\frac{\pi}{2}-c$.

54. 1° Имеем:

$$\sum \sin^3 A \cos (B-C)=\sum \sin^2 A \sin A \cos (B-C)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum \sin^2 A \left\{\sin (A+B-C)+\sin (A-B+C)\right\}.$$

Но так как

$$A+B+C=\pi,$$

то

$$\sum \sin^2 A \cos (B-C)=\frac{1}{2}\sum \sin^2 A (\sin 2C+\sin 2B)=$$
$$=\sum \sin^2 A (\sin B \cos B+\sin C \cos C)=\sin^2 A \sin B \cos B+\sin^2 A \sin C \cos C+$$
$$+\sin^2 B \sin C \cos C+\sin^2 B \sin A \cos A+\sin^2 C \sin A \cos A+$$
$$+\sin^2 C\sin B\cos B=\sin A \sin B (\sin A \cos B+\cos A \sin B)+\sin A \sin C (\sin A \cos C+$$
$$+\cos A \sin C)+\sin B \sin C (\sin B \cos C+\cos C \sin C)=\sin A \sin B \sin (A+B)+$$
$$+\sin A \sin C \sin (A+C)+\sin B \sin C \sin (B+C)=3 \sin A \sin B \sin C.$$

2° Имеем:

$$\sum \sin^3 A \sin (B-C)=\sum \sin^2 A \sin A \sin (B-C)=$$
$$=\sum \sin^2 A \sin (B+C) \sin (B-C)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum \sin^2 A \left\{\cos 2C-\cos 2B\right\}=\sum \sin^2 A (\sin^2 B-\sin^2 C)=$$
$$=\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \sum \left(\frac{1}{\sin^2 C}-\frac{1}{\sin^2 B}\right)=\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \left\{\frac{1}{\sin^2 C}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 A}-\frac{1}{\sin^2 C}+\frac{1}{\sin^2 B}-\frac{1}{\sin^2 A}\right\}=0.$$

55. 1° Имеем:

$$\sin 3x=3 \sin x-4 \sin^3 x.$$

Поэтому

$$\sum \sin 3A \sin^3 (B-C)=\frac{1}{4}\sum \sin 3A \left\{3 \sin (B-C)-\sin 3 (B-C)\right\}=$$
$$=\frac{3}{4}\sum \sin 3 (B+C) \sin (B-C)-\frac{1}{4}\sum \sin 3 (B+C) \sin 3 (B-C)=$$
$$=\frac{3}{8}\sum \left\{\cos (2B+4C)-\cos (4B+2C)\right\}-\frac{1}{8}\sum (\cos 6C-\cos 6B)=$$
$$=\frac{3}{8}\left\{\cos 2 (B+2C)-\cos 2 (C+2B)+\cos 2 (C+2A)-\right.$$
$$\left.-\cos 2 (A+2C)+\cos 2 (A+2B)-\cos 2 (B+2A)\right\}-$$
$$-\frac{1}{8}\left\{\cos 6C-\cos 6B+\cos 6A-\cos 6C+\cos 6B-\cos 6A\right\}\cdot$$

Но

$$\cos (2B+4C)=\cos (2B+4A),$$
$$\cos (2C+4B)=\cos (2C+4A),$$
$$\cos (2A+4C)=\cos (2A+4B).$$

Итак, окончательно:

$$\sum \sin 3A \sin^3 (B-C) = 0.$$

2° Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то

$$\sum \sin 3A \cos^3 (B-C) =$$
$$= \frac{1}{4} \sum \sin 3(B+C) \{\cos 3(B-C) + 3\cos(B-C)\} =$$
$$= \frac{1}{4} \sum \sin 3(B+C) \cos 3(B-C) + \frac{3}{4} \sum \sin 3(B+C) \cos(B-C) =$$
$$= \frac{1}{8} \sum (\sin 6B + \sin 6C) + \frac{3}{8} \sum \{\sin(4B+2C) + \sin(2B+4C)\} =$$
$$= \frac{1}{4}(\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C) = \sin 3A \sin 3B \sin 3C.$$

§ 3. РАДИКАЛЫ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМЫ

1. Справедливость данного тождества можно проверить, например, следующим способом. Из формул (*) (см. начало параграфа — Задачи) получаем:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}},$$
$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3})^2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}.$$

Аналогично получаем:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно:

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 = 2.$$

2. Докажем предлагаемые тождества путем непосредственной проверки.

1° Положим: $\sqrt[3]{2}=\alpha$, т. е. $\alpha^3=2$. Требуется доказать:

$$(1-\alpha+\alpha^2)^3=9(\alpha-1).$$

Имеем:

$$(1-\alpha+\alpha^2)^2=1+\alpha^2+\alpha^4+2\alpha^2-2\alpha^3-2\alpha=3(\alpha^2-1),$$

так как

$$\alpha^3=2, \qquad \alpha^4=2\alpha.$$

Следовательно:

$$(1-\alpha+\alpha^2)^3=3(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha^2-1)=3(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)=$$
$$=3(\alpha^3+1)(\alpha-1)=9(\alpha-1).$$

2° Нужно доказать:

$$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\right)^2=9\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right).$$

Возводя в квадрат левую часть, находим:

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{400}+\sqrt[3]{625}+2\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{50}-2\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{50}+$$
$$+5\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{50}-10\sqrt[3]{4}=9\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right).$$

3° Получается аналогично предыдущему.

4° Нужно доказать:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4=\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}.$$

Положим

$$\sqrt[4]{5}=\alpha.$$

Имеем:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4=\frac{(\alpha+1)^4}{(\alpha-1)^4}=\frac{1+4\alpha+6\alpha^2+4\alpha^3+\alpha^4}{1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4}=\frac{3+2\alpha+3\alpha^2+2\alpha^3}{3-2\alpha+3\alpha^2-2\alpha^3},$$

так как $\alpha^4=5$.

Далее:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4=\frac{3+2\alpha+\alpha^2(3+2\alpha)}{3-2\alpha+\alpha^2(3-2\alpha)}=\frac{3+2\alpha}{3-2\alpha}=\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}.$$

5° Требуется доказать:

$$\left(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{9}\right)^3=5\left(2-\sqrt[5]{27}\right).$$

Положим

$$\sqrt[5]{3}=\alpha, \text{ т. е. } \alpha^5=3.$$

Имеем:

$$(1+\alpha-\alpha^2)^2=1+\alpha^2+\alpha^4+2\alpha-2\alpha^2-2\alpha^3=1+2\alpha-\alpha^2-2\alpha^3+\alpha^4.$$

Далее:

$$(1+\alpha-\alpha^2)^3=1+3\alpha-5\alpha^3+3\alpha^5-\alpha^6.$$

Но

$$\alpha^6=3\alpha; \quad \alpha^5=3.$$

Поэтому

$$(1+\alpha-\alpha^2)^3=10-5\alpha^3=5\,(2-\sqrt[5]{27}).$$

6° Положим $\sqrt[5]{2}=\alpha$ и докажем сначала первое равенство, которое можно переписать в следующей форме:

$$5\,(1+\alpha+\alpha^3)^2=(1+\alpha^2)^5.$$

Правая часть равна:

$$1+5\alpha^2+10\alpha^4+10\alpha^6+5\alpha^8+\alpha^{10}=5\,(1+\alpha^2+2\alpha^4+2\alpha^6+\alpha^8),$$

так как

$$\alpha^{10}=4.$$

Далее:

$$\alpha^5=2.\quad \alpha^6=2\alpha;\quad \alpha^8=2\alpha^3,$$

и, следовательно:

$$(1+\alpha^2)^5=5\,(1+\alpha^2+2\alpha^4+4\alpha+2\alpha^3),$$

и остается только доказать, что

$$(1+\alpha+\alpha^3)^2=1+4\alpha+\alpha^2+2\alpha^3+2\alpha^4.$$

В последнем равенстве легко убеждаемся, раскрывая скобки, стоящие в левой части, и произведя небольшие преобразования. Для того чтобы установить второе равеиство, надо показать:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{5}}+\sqrt[5]{\frac{4}{5}}=\left(\sqrt[5]{\frac{16}{125}}+\sqrt[5]{\frac{8}{125}}+\sqrt[5]{\frac{2}{125}}-\sqrt[5]{\frac{1}{125}}\right)^2,$$

или

$$5\,(1+\sqrt[5]{4})=(\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2}-1)^2.$$

Положим:

$$\sqrt[5]{2}=\alpha;\quad \alpha^5=2,\quad \alpha^6=2\alpha;\quad \alpha^7=2\alpha^2;\quad \alpha^8=2\alpha^3.$$

Тогда надо доказать, что

$$(\alpha^4+\alpha^3+\alpha-1)^2=5\,(1+\alpha^2).$$

Развертывая левую часть, найдем:

$$1+\alpha^2+\alpha^6+\alpha^8+2\alpha^7+2\alpha^5-2\alpha^4+2\alpha^4-2\alpha^3-2\alpha.$$

Пользуясь равенствами, позволяющими заменять высокие степени α более низкими, иайдем требуемое тождество.

3. Положим:

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=\lambda.$$

Тогда:

$$A=a\lambda;\quad B=b\lambda;\quad C=c\lambda;\quad D=d\lambda.$$

Следовательно:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{\lambda}\,(a+b+c+d).$$

Но

$$A+B+C+D=\lambda\,(a+b+c+d)$$

и

$$\lambda=\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d},$$

т. е.

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\sqrt{A+B+C+D}}{\sqrt{a+b+c+d}}.$$

Заменяя $\sqrt{\lambda}$ в равенстве

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{\lambda}(a+b+c+d)$$

найденным только что значением, получим искомое тождество.

4. Положим для краткости:

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=A.$$

Имеем:

$$A=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a},$$

так как

$$ax^3=by^3=cz^3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Совершенно аналогично находим:

$$A=y\sqrt[3]{b} \quad \text{и} \quad A=z\sqrt[3]{c}.$$

Отсюда

$$\frac{A}{x}=\sqrt[3]{a}\ ;\quad \frac{A}{y}=\sqrt[3]{b}\ ;\quad \frac{A}{z}=\sqrt[3]{c}\ .$$

Складывая почленно эти равенства, получим:

$$A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ .$$

Отсюда окончательно:

$$A=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ .$$

5. Положим:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha, \qquad 1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\beta.$$

Тогда

$$a_n=\alpha^n+\beta^n; \quad b_n=\alpha^n-\beta^n,$$

где $\alpha\beta=\frac{1}{2}$.

Докажем, что

$$a_m a_n-\frac{a_{m-n}}{2^n}=a_{m+n}.$$

Имеем:

$$a_m a_n-\frac{a_{m-n}}{2^n}=(\alpha^m+\beta^m)(\alpha^n+\beta^n)-\frac{\alpha^{m-n}+\beta^{m-n}}{2^n}=$$

$$=\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}+\alpha^n\beta^n(\alpha^{m-n}+\beta^{m-n})-\frac{\alpha^{m-n}+\beta^{m-n}}{2^n}.$$

Но

$$\alpha^n\beta^n=\frac{1}{2^n},$$

следовательно:

$$a_m a_n - \frac{a_{m-n}}{2^n} = \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} = a_{m+n}.$$

Совершенно аналогично докажем и второе соотношение.

6. Положим:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha; \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta.$$

Тогда:

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1.$$

Кроме того:

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0, \quad \beta^2 - \beta - 1 = 0$$

и

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n).$$

Перейдем к доказательству.

1° Имеем:

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ (\alpha^n + \alpha^{n-1}) - (\beta^n + \beta^{n-1}) \right\}.$$

Но из равенства

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

следует:

$$\alpha + 1 = \alpha^2, \ \alpha^n + \alpha^{n-1} = \alpha^{n+1}$$

(умножив обе части предыдущего равенства на α^{n-1}). Равным образом, легко заключить аналогично:

$$\beta^n + \beta^{n-1} = \beta^{n+1}.$$

Поэтому

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = u_{n+1}.$$

2° Имеем:

$$u_k u_{n-k} + u_{k-1} u_{n-k-1} =$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ (\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) + (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})(\alpha^{n-k-1} - \beta^{n-k-1}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \{ \alpha^n + \beta^n - \alpha^k \beta^{n-k} - \beta^k \alpha^{n-k} + \alpha^{n-2} + \beta^{n-2} - \beta^{k-1} \alpha^{n-k-1} -$$

$$- \beta^{n-k-1} \alpha^{k-1} \} =$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \alpha^n + \alpha^{n-2} + \beta^n + \beta^{n-2} - \beta^n \left(\frac{\alpha^k}{\beta^k} + \frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^{k+1}} \right) - \alpha^n \left(\frac{\beta^k}{\alpha^k} + \frac{\beta^{k-1}}{\alpha^{k+1}} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \alpha^n + \alpha^{n-2} + \beta^n + \beta^{n-2} - \beta^n \frac{\alpha^k \beta + \alpha^{k-1}}{\beta^{k+1}} - \alpha^n \frac{\beta^k \alpha - \beta^{k-1}}{\alpha^{k+1}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \alpha^n + \alpha^{n-2} + \beta^n + \beta^{n-2} - \beta^n \frac{\alpha^{k-1}(\alpha\beta + 1)}{\beta^{k+1}} - \alpha^n \frac{\beta^{k-1}(\alpha\beta + 1)}{\alpha^{k+1}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \{ \alpha^n + \alpha^{n-2} + \beta^n + \beta^{n-2} \},$$

так как $\alpha\beta+1=0$. Далее, преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{5}\{\alpha^n+\alpha^{n-2}+\beta^n+\beta^{n-2}\}=\frac{1}{5}\left\{\alpha^{n-1}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\beta^{n-1}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{5}\{\alpha^{n-1}(\alpha-\beta)+\beta^{n-1}(\beta-\alpha)\}=\frac{\alpha-\beta}{5}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})=u_{n-1}.$$

3° Получается из 2°, если положить $n=2k$, а затем заменить k через n.

4° Следует показать, что

$$5(\alpha^{3n}-\beta^{3n})-(\alpha^n-\beta^n)^3-(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})^3+(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})^3=0.$$

Левая часть преобразуется следующим образом:

$$5(\alpha^{3n}-\beta^{3n})-\alpha^{3n}\left(\alpha^3+1-\frac{1}{\alpha^3}\right)+3\alpha^{2n}\beta^n\left(\alpha^2\beta+1-\frac{1}{\alpha^2\beta}\right)-$$
$$-3\alpha^n\beta^{2n}\left(\alpha\beta^2+1-\frac{1}{\alpha\beta^2}\right)+\beta^{3n}\left(\beta^3+1-\frac{1}{\beta^3}\right).$$

Легко показать, что

$$\alpha^2\beta+1-\frac{1}{\alpha^2\beta}=0;\quad \alpha\beta^2+1-\frac{1}{\alpha\beta^2}=0.$$

С другой стороны, также легко убедиться, что

$$\alpha^3+1-\frac{1}{\alpha^3}=\beta^3+1-\frac{1}{\beta^3}=\alpha^3+\beta^3+1=$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+1=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2+1=5.$$

Отсюда и следует справедливость нашего тождества.

5° Следует доказать, что

$$(\alpha^n-\beta^n)^4-(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})=25.$$

Докажем сначала:

$$(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})=\alpha^{2n}+\beta^{2n}-(-1)^n(\alpha^4+\beta^4),$$
$$(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})=\alpha^{2n}+\beta^{2n}+(-1)^n(\alpha^2+\beta^2).$$

Но

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3;\quad \alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=7.$$

Поэтому

$$(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})=$$
$$=(\alpha^{2n}+\beta^{2n})^2-(-1)^n\cdot 4(\alpha^{2n}+\beta^{2n})-21.$$

С другой стороны:

$$(\alpha^n-\beta^n)^4=\alpha^{4n}-4\alpha^{3n}\beta^n+4-4\alpha^n\beta^{3n}+\beta^{4n}=\alpha^{4n}+\beta^{4n}+4-4(-1)^n(\alpha^{2n}+\beta^{2n}).$$

Вычитая из последнего равенства почленно предпоследнее, найдем искомый результат.

6° и 7° доказываются аналогично предыдущим случаям.

7. 1° Имеем:

$$2\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b\right]=2(a^2+b^2)-2(a+b)(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+2ab=$$
$$=(a^2+b^2)-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+(a+b)^2+(a^2+b^2)+2ab-(a+b)^2$$

(выделяя полный квадрат).

Следовательно:

$$2\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b\right]=(a+b-\sqrt{a^2+b^2})^2.$$

Отсюда и следует первое тождество.

2° Перемножая в левой части выражения, стоящие внутри фигурной скобки, получим:

$$3(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}-3(a+b)(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}+3ab=$$
$$=3(a^2-ab+b^2)^{\frac{2}{3}}(a+b)^{\frac{2}{3}}-3(a^2-ab+b^2)^{\frac{1}{3}}(a+b)^{\frac{4}{3}}+$$
$$+(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)=\left[(a+b)^{\frac{2}{3}}-(a^2-ab+b^2)^{\frac{1}{3}}\right]^3.$$

Дальнейшее очевидно.

8. Легко видеть, что $ax=\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$, следовательно:

$$\frac{1-ax}{1+ax}=\frac{1-\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}=\frac{\left(1-\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}\right)^2}{1-\dfrac{2a-b}{b}}=$$
$$=\frac{b}{2(b-a)}\left(1-2\sqrt{\frac{2a-b}{b}}+\frac{2a-b}{b}\right)=\frac{a-b\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{(b-a)}.$$

Аналогично находим:

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\sqrt{\frac{1+\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{1-\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}}=\frac{1+\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{2a-b}{b}}}=$$
$$=\frac{a+b\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}=\frac{a+b\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{\sqrt{(b-a)^2}}=\frac{a+b\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{b-a}$$

(так как $b-a>0$).

Перемножая полученные два выражения, найдем:

$$\frac{a-b\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{b-a}\cdot\frac{a+b\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{b-a}=\frac{a^2-b^2\dfrac{2a-b}{b}}{(b-a)^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{(b-a)^2}=1.$$

9. Разложим на множители выражение:

$$n^3-3n-2.$$

Имеем:

$$n^3-3n-2=n^3-n-2n-2=n(n^2-1)-2(n+1)=$$
$$=(n+1)(n^2-n-2)=(n+1)^2(n-2).$$

Равным образом:

$$n^3-3n+2=(n-1)^2(n+2).$$

Теперь мы можем написать:

$$\frac{(n^3-3n-2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}{n^3-3n+2+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}=\frac{(n+1)^2(n-2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}{(n-1)^2(n+2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}=$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}}{(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

10. Рассмотрим вторую из дробей, стоящих в первой квадратной скобке, именно:

$$\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}=\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-(1-a)}=\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.$$

Итак, преобразуемое выражение примет вид:

$$\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right]\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{2a}{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})^2}\cdot\frac{(\sqrt{1-a^2}-1)}{a}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{1-a^2}-1)}{(1+a+1-a-2\sqrt{1-a^2})}=-1.$$

11. Из формулы (*) начала параграфа легко получить:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

В нашем случае:

$$A=x;\quad B=4x-4,$$
$$A^2-B=x^2-4x+4,$$
$$\sqrt{A^2-B}=\sqrt{(x-2)^2}=x-2,\quad \text{если } x>2.$$
$$=2-x,\quad \text{если } x<2.$$

В первом случае имеем:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{\frac{x+x-2}{2}}=2\sqrt{x-1}.$$

Во втором случае будет:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{\frac{x+2-x}{2}}=2.$$

Также легко видеть, что и при $x=2$ значение рассматриваемого выражения будет также равно 2.

12. В этом случае:

$$A=a+b+c, \qquad B=4ac+4bc,$$

$$A^2-B=(a+b+c)^2-4ac-4bc=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac=(a+b-c)^2.$$

Если

$$a+b-c>0,$$

то

$$\sqrt{A^2-B}=a+b-c.$$

Если

$$a+b-c<0,$$

то

$$\sqrt{A^2-B}=c-a-b.$$

Отсюда легко получаем, что данное выражение равно $2\sqrt{a+b}$, если $a+b>c$, и равно $2\sqrt{c}$, если $a+b<c$. При $a+b=c$ оба эти значения совпадают.

13. Обозначим:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=u.$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=v.$$

Тогда:

$$x=u+v.$$

Следовательно:

$$x^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v).$$

Но

$$u^3+v^3=-q; \qquad uv=-\frac{p}{3}.$$

Поэтому

$$x^3=-q-px$$

или

$$x^3+px+q=0,$$

что и требовалось вывести.

14. Можно поступить, например, следующим образом. Положим:

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=z.$$

Тогда (умножая и деля левую часть на $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$) найдем:

$$\frac{a-b}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}=z,$$

или

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=\frac{a-b}{z}.$$

Отсюда

$$2\sqrt{x+a}=z+\frac{a-b}{z},$$

$$2\sqrt{x+b}=z-\frac{a-b}{z},$$

т. е. оба корня выражены рационально через z.

15. Обозначим общую величину отношений через $\frac{1}{\lambda}$, т. е. положим:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно:

$$a'=a\lambda; \qquad b'=b\lambda; \qquad c'=c\lambda; \qquad \lambda=\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}.$$

Поэтому

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}=(1+\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Наша дробь примет вид:

$$\frac{1}{(1+\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{(1-\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(1-\lambda)(a+b-c+2\sqrt{ab})}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{\lambda})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(1-\lambda)(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{a'+b'+c'})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})\sqrt{a+b+c}}{(a+b+c-a'-b'-c')(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)}.$$

16. Положим:

$$\sqrt[3]{2}=p+\sqrt{q}.$$

Отсюда

$$2=p^3+3pq+(3p^2+q)\sqrt{q},$$

так как q не есть полный квадрат, то должно быть $3p^2+q=0$, что невозможно.

17. 1° Имеем (на основании 1°, 4° начала параграфа):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha, \qquad (2°,\ 4°),$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad (1°,\ 3°),$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (3°,\ 4°),$$

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=+\sin\alpha \qquad (2°,\ 3°),$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad (2°),$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad (3°,\ 4°).$$

Теперь получаем:

$$\frac{-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=-1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0.$$

2° В этом случае получаем:

$$\sin(3\pi-\alpha)=(-1)^3\sin(-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha \qquad (2°,\ 3°),$$
$$\cos(3\pi+\alpha)=(-1)^3\cos\alpha=-\cos\alpha \qquad (2°),$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad (2°,\ 4°),$$
$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (1° \text{ или } 2°,\ 4°).$$

Итак, имеем:

$$(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\cos\alpha+\sin\alpha)+\sin 2\alpha=$$
$$=[(1-(\sin\alpha+\cos\alpha)][1+(\sin\alpha+\cos\alpha)]+\sin 2\alpha=1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin 2\alpha=$$
$$=1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha=0.$$

3° Аналогично предыдущим.

18. Действительно, имеем:

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Но в наших условиях:

$$\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{\alpha_0}{2}$$
$$\left(0\leqq\frac{\alpha_0}{2}<\pi\right).$$

Тогда:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(k\pi+\frac{\alpha_0}{2}\right)=(-1)^k\sin\frac{\alpha_0}{2},$$

где

$$\sin\frac{\alpha_0}{2}\geqq 0.$$

Поэтому, действительно:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=(-1)^k\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Аналогично доказывается и второе утверждение.

19. Докажем справедливость лишь некоторых предлагаемых для рассмотрения формул. Например, докажем, что $A_{16}=0$, если $n\equiv 0 \pmod 2$.

Положим $n=2l$. Тогда

$$\frac{1}{2}A_{16}=\cos\left(\frac{l\pi}{4}+\pi-\frac{3}{32}\pi\right)+\cos\left(\frac{3l\pi}{4}+\pi-\frac{5}{32}\pi\right)+$$
$$+\cos\left(\frac{5l\pi}{4}+\frac{5}{32}\pi\right)+\cos\left(\frac{7l\pi}{4}+\frac{3}{32}\pi\right)=-\cos\left(\frac{l\pi}{4}-\frac{3}{32}\pi\right)-$$
$$-\cos\left(l\pi-\frac{l\pi}{4}-\frac{5}{32}\pi\right)+\cos\left(\frac{l\pi}{4}+l\pi+\frac{5}{32}\pi\right)+$$
$$+\cos\left(2l\pi-\frac{l\pi}{4}+\frac{3}{32}\pi\right)=-\cos\left(\frac{l\pi}{4}-\frac{3}{32}\pi\right)-$$
$$-(-1)^l\cos\left(\frac{l\pi}{4}+\frac{5}{32}\pi\right)+(-1)^l\cos\left(\frac{l\pi}{4}+\frac{5}{32}\pi\right)+\cos\left(\frac{l\pi}{4}-\frac{3}{32}\pi\right)=0.$$

Докажем далее, например, что $A_{14}=0$, если $n\equiv 1,\ 3,\ 4 \pmod 7$. Имеем:

$$\frac{1}{2}A_{14}=\cos\left(\frac{1}{7}n\pi-\frac{13}{14}\pi\right)+\cos\left(\frac{3}{7}n\pi-\frac{3}{14}\pi\right)+\cos\left(\frac{5}{7}n\pi-\frac{3}{14}\pi\right).$$

Если заменить здесь n числом, с ним сравнимым по модулю 7, то от этого все косинусы получат только некоторый общий множитель, равный ± 1. В самом деле, допустим, что

$$n\equiv\alpha \pmod 7,$$

т. е.

$$n=\alpha+7N,$$

где N целое.

Поэтому

$$\cos\left(\frac{kn\pi}{7}-\beta\right)=\cos\left(\frac{k(\alpha+7N)\pi}{7}-\beta\right)=\cos\left(\frac{k\alpha\pi}{7}+kN\pi-\beta\right)=$$
$$=(-1)^{kN}\cos\left(\frac{k\alpha\pi}{7}-\beta\right)=(-1)^N\cos\left(\frac{k\alpha\pi}{7}-\beta\right),$$

так как в нашем случае $k=1,\ 3,\ 5$ и, следовательно, нечетно. (β равно одной из величин: $\frac{3}{14}\pi$, $\frac{13}{14}\pi$.) Поэтому для того, чтобы доказать, что $A_{14}=0$ при $n=1,\ 3,\ 4$, достаточно доказать, что это будет иметь место при $n=1$, 3, 4. Справедливость же этого легко проверить.

Положим сначала $n=1$. Тогда докажем, что

$$\cos\left(\frac{1}{7}\pi-\frac{13}{14}\pi\right)+\cos\left(\frac{5}{7}\pi-\frac{3}{14}\pi\right)+\cos\left(\frac{5}{7}\pi-\frac{3}{14}\pi\right)=0.$$

Преобразуя, получим:

$$\cos\frac{11}{14}\pi+\cos\frac{3}{14}\pi+\cos\frac{7}{14}\pi=\cos\left(\pi-\frac{3}{14}\pi\right)+\cos\frac{3}{14}\pi+\cos\frac{\pi}{2}=$$
$$=-\cos\frac{3}{14}\pi+\cos\frac{3}{14}\pi=0.$$

Пусть теперь $n=3$. Тогда надо доказать, что

$$\cos\left(\frac{3}{7}\pi-\frac{13}{14}\pi\right)+\cos\left(\frac{9}{7}\pi-\frac{3}{14}\pi\right)+\cos\left(\frac{15}{7}\pi-\frac{3}{14}\pi\right)=$$
$$=\cos\frac{7}{14}\pi+\cos\frac{15}{14}\pi+\cos\frac{27}{14}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{14}\right)=$$
$$=-\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}=0.$$

Совершенно так же убедимся, что и при $n=4$ получим нуль.

В заключение докажем еще, что A_8 ни при каких значениях n (целых) в нуль не обращается. Имеем:

$$\frac{1}{2}A_8=\cos\left(\frac{1}{4}n\pi-\frac{7}{16}\pi\right)+\cos\left(-\frac{1}{4}n\pi+n\pi-\frac{1}{16}\pi\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{1}{4}n\pi-\frac{7}{16}\pi\right)+(-1)^n\cos\left(\frac{1}{4}n\pi+\frac{1}{16}\pi\right).$$

Разберем различные случаи.

1° Пусть $n\equiv 0 \pmod 4$, $n=4N$. Тогда:

$$\frac{1}{2}A_8=\cos\left(N\pi-\frac{7}{16}\pi\right)+(-1)^{4N}\cos\left(N\pi+\frac{1}{16}\pi\right)=$$
$$=(-1)^N\cos\frac{7}{16}\pi+(-1)^N\cos\frac{1}{16}\pi=(-1)^N\left(\cos\frac{1}{16}\pi+\cos\frac{7}{16}\pi\right).$$

Выражение же, стоящее в скобках, не равно нулю, так как оно представляет собою сумму косинусов двух острых углов.

2° Пусть $n\equiv 1 \pmod 4$, т. е. $n=1+4N$.

$$\frac{1}{2}A_8=\cos\left(\frac{\pi}{4}+N\pi-\frac{7}{16}\pi\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}+3N\pi-\frac{1}{16}\pi\right)=$$
$$=(-1)^N\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7}{16}\pi\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{16}\pi\right)\right\}=$$
$$=(-1)^N\left\{\cos\frac{3}{16}\pi+\cos\frac{11}{16}\pi\right\}.$$

Легко убедиться, что сумма, стоящая в скобках, не равна нулю, а следовательно, в этом случае A_8 точно так же не равно нулю. Остается еще разобрать случаи: $n\equiv 3 \pmod 4$ и $n\equiv 2 \pmod 4$. На доказательстве этих случаев мы не останавливаемся.

20. Нужно доказать, что

$$\sum p(k)=0,$$

если $k=n, n-1, n-2, n-4, n-5, n-6$, и знак перед $p(k)$ выбирается соответственным образом.

Легко видеть, что

$$\sum p(k)=A\sum(k+3)^2+C\sum(-1)^k+D\sum\cos\frac{2\pi k}{3}.$$

Первые две суммы, стоящие в правой части, равны нулю. Остается доказать только, что

$$\sum\cos\frac{2\pi k}{3}=0.$$

Если k есть целое число, то могут представиться следующие случаи:

1° k делится на 3; $k=3l$.

2° k при делении на 3 дает в остатке 1; $k=3l+1$.

3° k при делении на 3 дает в остатке 2; $k=3l+2$.

В 1° случае:

$$\cos\frac{2\pi k}{3}=1.$$

Во 2° и 3° случаях:

$$\cos\frac{2\pi k}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}.$$

Допустим сначала, что n делится на 3. Тогда:

$$\sum\cos\frac{2\pi k}{3}=\cos\frac{2\pi n}{3}-\cos\frac{2\pi(n-1)}{3}-\cos\frac{2\pi(n-2)}{3}+$$
$$+\cos\frac{2\pi(n-4)}{3}+\cos\frac{2\pi(n-5)}{3}-\cos\frac{2\pi(n-6)}{3}.$$

Но

$$2\equiv-1 \pmod 3$$

и

$$\cos\frac{2\pi k}{3}=\cos\frac{2\pi k'}{3},$$

если

$$k\equiv k' \pmod 3.$$

Так как, по предложению: $n\equiv 0 \pmod 3$, то

$$n-1\equiv-1;\ n-2\equiv 1;\ n-4\equiv-1;\ n-5\equiv+1;\ n-6\equiv 0,$$

и наша сумма примет вид:

$$1-\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}-1=0.$$

Остается доказать, что наша сумма равна нулю и в тех случаях, когда $n\equiv\pm 1 \pmod 3$. В этом убеждаемся совершенно аналогично предыдущему.

21. Имеем:

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Аналогично найдем и $\cos 15^\circ$.

Имеем:

$$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Но

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5},$$
$$2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}.$$

Перемножая эти два равенства почленно, найдем:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}.$$

С другой стороны:

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Итак, если положить:

$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}=x; \qquad \cos\frac{\pi}{5}=y,$$

то имеем:

$$y-x=\frac{1}{2}, \qquad xy=\frac{1}{4}.$$

Но

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}.$$

Следовательно:

$$x+y=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Пользуясь этим соотношением и соотношением $y-x=\frac{1}{2}$, получим:

$$x=\sin\frac{\pi}{10}=\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Теперь легко найти и $\cos 18^\circ$.

22. Действительно:

$$\sin 6^\circ=\sin(60^\circ-54^\circ)=\sin 60^\circ\cos 54^\circ-\cos 60^\circ\sin 54^\circ.$$

Но

$$\sin 54^\circ=\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\,\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 54^\circ=\sqrt{1-\sin^2 54^\circ}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Остается только подставить эти значения в первую формулу и результат готов. Совершенно так же найдем и $\cos 6^\circ$.

23. Прежде всего нужно иметь в виду, что

$$1)\ -\frac{\pi}{2}\leqq \operatorname{arc\,sin} x\leqq+\frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<+\frac{\pi}{2};$$

$$0\leqq\operatorname{arc\,cos} x\leqq\pi; \qquad 0<\operatorname{arc\,ctg} x<\pi;$$

$$2)\ \sin(\operatorname{arc\,sin} x)=x; \qquad \cos(\operatorname{arc\,cos} x)=x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x; \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x.$$

Докажем теперь, что

$$\cos(\operatorname{arc\,sin} x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Положим:

$$\operatorname{arc\,sin} x=y,$$

тогда:

$$\sin y=x.$$

Нам же нужно вычислить $\cos y$. Но известно, что

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},$$

причем перед корнем берется знак плюс, так как

$$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2},$$

и, следовательно:

$$\cos y \geqq 0.$$

Докажем, например, еще, что

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Положим:

$$\operatorname{arc\,tg} x = y; \qquad \operatorname{tg} y = x.$$

Надо найти $\cos y$. Имеем:

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Следовательно,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

и

$$\cos y = \cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

где корень берется опять со знаком плюс, так как

$$\cos y \geqq 0.$$

Остальные формулы доказываются совершенно аналогично только что доказанным.

24. На основании определения:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < +\frac{\pi}{2},$$

$$0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi.$$

Поэтому

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x < +\frac{3\pi}{2}.$$

Вычислим

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x).$$

Имеем:

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x) =$$
$$= \sin(\operatorname{arc\,tg} x)\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) + \cos(\operatorname{arc\,tg} x)\sin(\operatorname{arc\,ctg} x) =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

Но если синус некоторой дуги равен 1, то эта дуга равна:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — любое целое, т. е. другими словами:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$$

может иметь одно из следующих значений:

$$\ldots, \frac{-7\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$$

Но из этих значений только одно, а именно $\frac{\pi}{2}$, заключеио в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{3\pi}{2}$. Поэтому необходимо:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Совершенно аналогично докажем, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Прежде всего имеем:

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin x + \arccos x \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

С другой стороны:

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \\ + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

25. Прежде всего легко доказать, что величины:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$$

и

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$$

отличаются друг от друга только на $\varepsilon\pi$, где ε — целое число.

В самом деле:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} y)} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Но если две величины имеют равные тангенсы, то они отличаются друг от друга только на слагаемое, кратное π.

Поэтому, действительно:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi. \tag{*}$$

Выясним точно значение ε. Так как

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < +\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} y < +\frac{\pi}{2},$$

то

$$-\pi < \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y < +\pi$$

и, следовательно:

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi\right| < \pi.$$

А так как

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} < +\frac{\pi}{2},$$

то $|\varepsilon| < 2$ и, следовательно, для ε допустимы только три значения:

$$0,\ +1,\ -1.$$

Для того чтобы окончательно выяснить вопрос о величине ε, напишем следующее равенство:

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y) = \cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi\right).$$

Отсюда

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x)\cos(\operatorname{arc\,tg} y) - \sin(\operatorname{arc\,tg} x)\sin(\operatorname{arc\,tg} y) = \cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}\right)\cos\varepsilon\pi.$$

На основании результатов задачи 23 имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cdot\cos\varepsilon\pi.$$

Следовательно:

$$\cos\varepsilon\pi = \frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}.$$

Имеем:

$$\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-xy)^2}} = \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{\sqrt{(1-xy)^2}}.$$

Однако

$$\sqrt{(1-xy)^2} = 1-xy, \quad \text{если } 1-xy > 0, \text{ т. е. если } xy < 1,$$

и

$$\sqrt{(1-xy)^2} = -(1-xy), \quad \text{если } 1-xy < 0, \text{ т. е. если } xy > 1.$$

Поэтому

$$\cos\varepsilon\pi = 1, \quad \text{если} \quad xy < 1,$$

и

$$\cos\varepsilon\pi = -1, \quad \text{если} \quad xy > 1.$$

Так как $\varepsilon\pi$ может принимать только значения 0, π и $-\pi$, то отсюда следует, что если $xy < 1$, то $\varepsilon = 0$, и если $xy > 1$, то $\varepsilon = \pm 1$. Вопрос о том, в каком случае придется взять минус, а в каком плюс, решается следующим образом.

Если $xy>1$ и $x>0$, то и $y>0$, тогда $\operatorname{arc\,tg} x>0$ и $\operatorname{arc\,tg} y>0$, а

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}<0.$$

В равенстве (*) слева стоит положительная величина, следовательно, и справа должна быть положительная величина, а потому $\varepsilon\pi$ должна быть больше нуля, и $\varepsilon=+1$. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что если $xy>1$ и $x<0$, $y<0$, то $\varepsilon=-1$.

26. Имеем:

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119}.$$

Далее:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119}+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{239}\right)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4}.$$

27. Применяя формулу задачи 25, легко получаем результат.

28. Прежде всего замечаем, что так как $\arcsin x$ заключен между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, а $2\operatorname{arc\,tg} x$ лежит между $-\pi$ и $+\pi$, то

$$-\frac{3\pi}{2}\leqq 2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\leqq+\frac{3\pi}{2}.$$

Вычислим теперь синус от искомой дуги, т. е. найдем, чему равняется выражение

$$\sin\left(2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Имеем:

$$\sin\left(2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)=\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)\cos\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)+$$
$$+\cos(2\operatorname{arc\,tg} x)\sin\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Вычислим сначала $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)$. Положим:

$$\operatorname{arc\,tg} x=y;\quad \operatorname{tg} y=x.$$

Тогда:

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)=\sin 2y=\operatorname{tg} 2y\cdot\cos 2y.$$

Но

$$\operatorname{tg} 2y=\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y};\quad \cos 2y=\frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

Следовательно:

$$\sin(2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)=\frac{2\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Далее:

$$\cos\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}=\frac{x^2-1}{1+x^2},$$

так как $x>1$.

Далее, легко видеть, что

$$\cos(2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)=\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2},$$

поэтому

$$\sin\left(2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{x^2-1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=0.$$

Итак, синус искомой дуги равен нулю, следовательно, эта дуга может иметь одно из бесчисленных множеств значений:

$$\ldots,\ -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ +\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \ldots$$

Но среди этих значений имеются лишь три ($-\pi$, 0 и π), лежащих в требуемом промежутке от $-\frac{3\pi}{2}$ до $+\frac{3\pi}{2}$. С другой стороны, $x>1$ и, следовательно, $2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x>0$ и $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}>0$, а потому и искомая сумма

$$2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

будет больше нуля и, следовательно, может равняться только π.

29. Легко видеть, что

$$-\pi\leqq\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}\leqq+\pi.$$

Составим:

$$\sin\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right).$$

Искомый синус оказывается равным (см. задачу 23):

$$\sin(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)\cos\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)+\cos(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)\sin\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=1,$$

если $x>0$ (так как в этом случае $\sqrt{x^2}=x$). Если же $x<0$, то $\sqrt{x^2}=-x$ и тогда $\sin\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=-1$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где знак плюс берется в том случае, когда $x>0$, а знак минус тогда, когда $x<0$.

Но так как, с другой стороны, должно быть:

$$-\pi\leqq\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\leqq+\pi,$$

то этим и исчерпывается решение нашей задачи.

30. Вычислим выражение:

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y).$$

Имеем:

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y)=\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y)+$$
$$+\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, если мы рассмотрим две дуги:

$$\arcsin x+\arcsin y$$

и

$$\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$

то мы можем утверждать, что синусы этих двух дуг равны между собою.

Но если

$$\sin\alpha=\sin\beta,$$
$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0,$$

и, следовательно, либо $\frac{\alpha-\beta}{2}=k\pi$, либо $\frac{\alpha+\beta}{2}=(2k'+1)\frac{\pi}{2}$ (k и k' целые), т. е. либо

$$\alpha=\beta+2k\pi,$$

либо

$$\alpha=-\beta+(2k'+1)\pi.$$

Поэтому мы можем утверждать, что

$$\arcsin x+\arcsin y=\eta\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi,$$

причем $\eta=+1$, если ε четное, и $\eta=-1$, если ε нечетное. Для того чтобы точнее определить величину ε, возьмем косинусы правой и левой части. Получим:

$$\cos(\arcsin x+\arcsin y)=\cos[\eta\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi].$$

Отсюда

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy=(-1)^{\varepsilon}\cos[\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})].$$

Далее:

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy=(-1)^{\varepsilon}\sqrt{1-(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2}.$$

Подкоренное выражение справа можно преобразовать следующим образом:

$$1-(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2=$$
$$=1-x^2(1-y^2)-y^2(1-x^2)-2xy\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}=$$
$$=(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+x^2y^2=$$
$$=(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)^2.$$

Если окажется, что

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy>0,$$

то

$$\sqrt{1-(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2}=\sqrt{(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy)^2}=$$
$$=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy.$$

Поэтому в этом случае

$$(-1)^\varepsilon=+1,$$

т. е. ε четное.

Если же окажется, что

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy<0,$$

то

$$(-1)^\varepsilon=-1,$$

и, следовательно, ε нечетное.

Рассмотрим теперь выражение

$$1-x^2-y^2.$$

Имеем:

$$1-x^2-y^2=1-x^2-y^2+x^2y^2-x^2y^2=(1-x^2)(1-y^2)-x^2y^2=$$
$$=(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy)(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy).$$

Величина $1-x^2-y^2$ может быть больше, меньше или равной нулю. Обратимся последовательно ко всем этим трем случаям:

1° Допустим $1-x^2-y^2>0$, т. е. $x^2+y^2<1$. Если произведение двух множителей положительно, то эти множители либо оба одновременно положительны, либо же оба одновременно отрицательны. Итак, мы имеем либо

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy>0;\quad \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy>0,$$

либо

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy<0;\quad \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy<0.$$

Но второй из этих случаев невозможен, так как, складывая оба последние неравенства, получим:

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}<0,$$

что невозможно. Если же существуют первые два неравенства, то

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy>0.$$

Следовательно, в этом случае ε четное.

Итак, если $x^2+y^2<1$, то в нашей формуле ε четное.

2° Пусть теперь $1-x^2-y^2<0$ и, следовательно, либо

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy>0;\quad \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+xy<0,$$

либо

$$\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}-xy<0;\qquad \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+xy>0.$$

Но из первых двух неравенств легко получаем $xy<0$.

При выполнении же этого неравенства обязательно будет:

$$\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}-xy>0,$$

и, следовательно, ε четное.

Из вторых двух неравенств получаем $xy>0$ и ε нечетное.

3° Наконец, допустим $1-x^2-y^2=0$. Тогда опять могут представиться два случая: либо $xy\leqq 0$, либо $xy>0$.

В первом из этих случаев $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy>0$ и, следовательно, ε четное. Второй случай равным образом дает ε четным ($\varepsilon=0$), так как существует следующая зависимость:

$$\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\quad (x>0).$$

Теперь вопрос о четности ε разрешен во всех возможных случаях. Посмотрим, какова величина ε. Имеем

$$|\arcsin x+\arcsin y|<\pi.$$

Следовательно:

$$|\eta\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi|<\pi.$$

Отсюда

$$|\varepsilon|<2.$$

Итак, ε может принимать только три значения: 0, +1, —1. Сопоставляя все полученные результаты, мы можем теперь утверждать, что

если $x^2+y^2\leqq 1$ или если $xy<0$, то $\varepsilon=0$, $\eta=+1$,

если же $x^2+y^2>1$ и $xy>0$, то $\varepsilon=\pm 1$, $\eta=-1$.

Чтобы выяснить, когда $\varepsilon=+1$, а когда $\varepsilon=-1$, заметим, что при $x>0$, $y>0$ $\arcsin x+\arcsin y>0$ и, следовательно:

$$-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi>0,$$

а потому в этом случае $\varepsilon=+1$. В случае же $x<0$, $y<0$ легко видеть, что $\varepsilon=-1$.

31. Имеем (см. задачу 24):

$$\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=$$
$$=\pi-\arcsin x-\arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right);$$

с другой стороны (задача 30):

$$\arcsin x+\arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\eta\arcsin\xi+\varepsilon\pi,$$

где

$$\xi=x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2}+\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

Но

$$1-\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2=\frac{1}{4}(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}\,x)^2,$$

а так как $x \geqq \frac{1}{2}$, то $4x^2 \geqq 1$: $3x^2 \geqq 1-x^2$ и $\sqrt{3}\,x \geqq \sqrt{1-x^2}$. Поэтому

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}\,x)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x-\sqrt{1-x^2})$$

и $\xi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно:

$$\arcsin\xi=\frac{\pi}{3}.$$

Остается только найти η и ε (см. задачу 30).

Докажем, что

$$x^2+\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2>1.$$

Имеем:

$$x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}(1-x^2)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\sqrt{1-x^2}\geqq\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x^2)=\frac{5}{4}.$$

Следовательно,

$$\eta=-1,\ \varepsilon=+1.$$

Поэтому

$$\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)=\frac{\pi}{3}.$$

32. Имеем $\operatorname{tg} A=\frac{1}{7}$; $\operatorname{tg} B=\frac{1}{3}$. Вычислим $\cos 2A$. Так как

$$1+\operatorname{tg}^2 A=\frac{1}{\cos^2 A},$$

то

$$\frac{1}{\cos^2 A}=1+\frac{1}{49}=\frac{50}{49} \quad \text{и} \quad \cos^2 A=\frac{49}{50}.$$

Но

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{98}{50}-1=\frac{24}{25}.$$

Далее:

$$\sin 4B=2\sin 2B\cos 2B.$$

Но

$$\cos 2B=2\cos^2 B-1=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 B}-1=\frac{4}{5},$$

$$\sin 2B=2\sin B\cos B=2\operatorname{tg} B\cos^2 B=\frac{2\operatorname{tg} B}{1+\operatorname{tg}^2 B}=\frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin 4B = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25} \quad \text{и} \quad \sin 4B = \cos 2A.$$

33. Имеем по условию:

$$(a+b)^2 = 9ab \quad \text{или} \quad \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab.$$

Остальное очевидно.

34. Положим:

$$\lg_a n = x; \quad \lg_{ma} n = y.$$

Тогда

$$a^x = n; \quad m^y a^y = n.$$

Отсюда

$$a^x = m^y\cdot a^y; \quad a^{\frac{x}{y}} = ma.$$

Логарифмируя это последнее равенство при основании a, получаем искомый результат.

35. Положим:

$$\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(z+x-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z} = \frac{1}{t}.$$

Тогда:

$$\lg x = tx(y+z-x),$$
$$\lg y = ty(z+x-y),$$
$$\lg z = tz(x+y-z).$$

Отсюда

$$y\lg x + x\lg y = 2txyz,$$
$$y\lg z + z\lg y = 2txyz,$$
$$z\lg x + x\lg z = 2txyz.$$

Следовательно,

$$y\lg x + x\lg y = y\lg z + z\lg y = z\lg x + x\lg z.$$
$$\lg x^y y^x = \lg z^y y^z = \lg x^z z^x.$$

Окончательно:

$$x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x.$$

36. 1° Положим $\lg_b a = x$. Тогда:

$$b^x = a.$$

Логарифмируя это равенство при основании a, получаем:

$$x\lg_a b = 1.$$

По $x = \lg_b a$. Следовательно, действительно, $\lg_b a \lg_a b = 1$.

2° Имеем:

$$a^{\lg_a b} = b.$$

Поэтому

$$a^{\frac{\lg_b(\lg_b a)}{\lg_b a}} = \left(a^{\frac{1}{\lg_b a}}\right)^{\lg_b(\lg_b a)} = \left(a^{\lg_a b}\right)^{\lg_b(\lg_b a)} = b^{\lg_b(\lg_b a)} = \lg_b a.$$

37. Из данных соотношений следует:

$$y^{1-\lg x}=10;\quad z^{1-\lg y}=10.$$

Логарифмируя эти равенства, получаем:

$$(1-\lg x)\lg y=1;\quad (1-\lg y)\lg z=1.$$

Отсюда

$$\lg x=1-\frac{1}{\lg y}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\lg z}}=\frac{1}{1-\lg z},$$

и, следовательно:

$$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}.$$

38. Исходное равенство дает:

$$a^2=(c-b)(c+b).$$

Следовательно:

$$2\lg_{c+b}a=\lg_{c+b}(c-b)+1,$$
$$2\lg_{c-b}a=\lg_{c-b}(c+b)+1.$$

Перемножая эти равенства, находим:

$$4\lg_{c+b}a\cdot\lg_{c-b}a=\lg_{c+b}(c-b)+\lg_{c-b}(c+b)+1+\lg_{c+b}(c-b)\lg_{c-b}(c+b).$$

Но

$$\lg_{(c-b)}(c+b)\lg_{c+b}(c-b)=1.$$

Поэтому

$$4\lg_{c+b}a\lg_{c-b}a=2\lg_{c+b}a-1+2\lg_{c-b}a-1+2.$$

Окончательно:

$$\lg_{c+b}a+\lg_{c-b}a=2\lg_{c+b}a\lg_{c-b}a.$$

39. Положим

$$\lg_a N=x;\quad \lg_c N=y;\quad \lg_{\sqrt{ac}}N=z.$$

Последнее равенство дает:

$$(ac)^{\frac{z}{2}}=N.$$

Отсюда

$$\lg_a N=\frac{z}{2}(1+\lg_a c),$$

$$\lg_c N=\frac{z}{2}(1+\lg_c a).$$

Поэтому

$$\frac{2x}{z}-1=\lg_a c;\quad \frac{2y}{z}-1=\lg_c a.$$

Следовательно:

$$\left(\frac{2x}{z}-1\right)\left(\frac{2y}{z}-1\right)=1$$

или

$$\frac{x}{y}=\frac{x-z}{z-y}.$$

40. Имеем:

$$\lg_{a_1a_2\ldots a_n}x=\frac{1}{\lg_x a_1a_2\ldots a_n}=\frac{1}{\lg_x a_1+\lg_x a_2+\ldots+\lg_x a_n}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\lg_{a_1}x}+\frac{1}{\lg_{a_2}x}+\ldots+\frac{1}{\lg_{a_n}x}}.$$

41. Пусть

$$a_n=aq^n;\quad b_n=b+nd.$$

Тогда:

$$\lg a_n=\lg a+n\lg q,$$

$$\lg a_n-b_n=\lg a+n\lg q-b-nd=\lg a-b.$$

Отсюда

$$n\lg q-nd=0,$$

$$\lg_\beta q=d;\quad \beta^d=q.$$

Итак:

$$\beta=q^{\frac{1}{d}}.$$

§ 4. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

1. Имеем:

$$\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$$

или

$$(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0.$$

Предполагая, что

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$$

не равно нулю, получим:

$$x=ab+ac+bc.$$

Если же

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0,$$

то данное уравнение обращается в тождество, справедливое при любом значении x.

2. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0.$$

Имеем:

$$\frac{x-a-b-c}{bc}+\frac{x-b-a-c}{ac}+\frac{x-c-a-b}{ab}=0.$$

Отсюда

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)=0,$$

и, следовательно:

$$x=a+b+c.$$

Принимается, конечно, что ни одна из величин a, b и c, а также

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$$

не равны нулю.

3. Если положить в нашем уравнении

$$6x+2a=A;\ 3b+c=B;\ 2x+6a=C;\ b+3c=D,$$

то уравнение перепишется следующим образом:

$$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства по единице, найдем:

$$\frac{2A}{A-B}=\frac{2C}{C-D}.$$

Равным образом, отнимая по единице, получим:

$$\frac{2B}{A-B}=\frac{2D}{C-D}.$$

Деля же почленно последние равенства, будем иметь:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

т. е.

$$\frac{6x+2a}{3b+c}=\frac{2x+6a}{b+3c}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{6}{3b+c}-\frac{2}{b+3c}\right)x=\left(\frac{6}{b+3c}-\frac{2}{3b+c}\right)a.$$

Наконец:

$$x=\frac{ab}{c}.$$

4. Прибавим к обеим частям уравнения по 3 и перепишем его следующим образом:

$$\left(\frac{a+b-x}{c}+1\right)+\left(\frac{a+c-x}{b}+1\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+1\right)=4-\frac{4x}{a+b+c}.$$

Отсюда

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4\,\frac{a+b+c-x}{a+b+c}.$$

Следовательно:

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$$

и, наконец:

$$x=a+b+c.$$

5. Возьмем слева за скобки $\sqrt[p]{b+x}$. Получим:

$$\sqrt[p]{b+x}\,\frac{b+x}{bx}=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}.$$

Следовательно:

$$\frac{(b+x)^{1+\frac{1}{p}}}{x^{1+\frac{1}{p}}}=\frac{bc}{a}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{b+x}{x}\right)^{\frac{p+1}{p}}=\frac{bc}{a};\quad \frac{b+x}{x}=\left(\frac{cb}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Далее:

$$\frac{b}{x}=\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}-1,$$

$$x=\frac{b}{\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}-1}.$$

6. 1° Возведя в квадрат обе части данного уравнения, найдем:

$$x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}=1.$$

Следовательно:

$$2\sqrt{x^2-1}=1-2x,$$

$$4x^2-4=1+4x^2-4x,$$

$$x=\frac{5}{4}.$$

Ввиду того, что возведение в квадрат приводит, вообще говоря, к уравнению, не эквивалентному данному, или, точнее, к такому уравнению, которое, помимо корней данного уравнения, может иметь и другие корни, от них отличные, то необходимо проверить подстановкой, является ли действительно $\frac{5}{4}$ корнем исходного уравнения. Подстановка показывает, что $\frac{5}{4}$ не будет корнем исходного уравнения (здесь, как и прежде, рассматриваются арифметические значения корней).

2° Произведя преобразования, совершенно аналогичные предыдущим, найдем, что $x=\frac{5}{4}$ является корнем нашего уравнения.

7. Возводим обе части нашего уравнения в третью степень. Формулу куб суммы возьмем в следующей форме:

$$(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B).$$

Имеем:

$$a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{a^2-x}\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)=b.$$

Но так как

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b},$$

то

$$2a+3\sqrt[3]{a^2-x}\cdot\sqrt[3]{b}=b,$$
$$x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}.$$

Предполагаем, что a и b таковы, что

$$a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\geqq 0.$$

Так как равенство кубов двух вещественных чисел влечет за собой и равенство самих чисел, то найденное значение x удовлетворяет и исходному уравиеиию.

8. Возведя обе части уравнения в квадрат, найдем:

$$-\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x.$$

Отсюда

$$x^4-x^2-x^2(x-2)^2=0,$$
$$x^2[x^2-1-x^2-4+4x]=x^2(4x-5)=0.$$

Таким образом, последнее уравнение имеет два корня:

$$x=0 \quad \text{и} \quad x=\frac{5}{4}.$$

Подставляя их в исходное уравнение, увидим, что единственный корень этого уравнения будет:

$$x=\frac{5}{4}.$$

9. Освобождаясь от знаменателя, получим:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{x-b})\sqrt{b}=\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{x-a}),$$

или

$$\sqrt{b(x-b)}=\sqrt{a(x-a)},$$
$$b(x-b)=a(x-a),$$
$$x=a+b.$$

Легко видеть, что это значение x является также и корнем исходного уравнения.

10. Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}$, получим:

$$(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2=2x\sqrt{b}.$$

Отсюда

$$\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{b}-a.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, найдем два корня:

$$x=0,\quad x=\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}.$$

Но первое из этих значений не является корнем нашего исходного уравнения, второе же будет корнем его при условии, если

$$b\geqq 1.$$

В самом деле, имеем:

$$\sqrt{a+x}=\sqrt{a+\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}}=\sqrt{a}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{b})^2}{1+b}}=\sqrt{a}\,\frac{1+\sqrt{b}}{\sqrt{1+b}},$$

$$\sqrt{a-x}=\sqrt{a-\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}}=\sqrt{a}\sqrt{\frac{(\sqrt{b}-1)^2}{1+b}}=$$

$$=\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{1+b}}\quad (\text{если }\ \sqrt{b}-1\geqq 0).$$

Подставляя вместо $\sqrt{a+x}$ и $\sqrt{a-x}$ полученные значения в исходное уравнение, убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

11. Складывая все данные уравнения, найдем:

$$x+y+z+v=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Следовательно:

$$v=(x+y+z+v)-(x+y+z)=\frac{a+b+c+d}{3}-a=\frac{b+c+d-2a}{3}.$$

Аналогично получим:

$$z=\frac{a+c+d-2b}{3};\quad y=\frac{a+b+d-2c}{3};\quad x=\frac{a+b+c-2d}{3}.$$

12. Складывая все четыре уравнения, получим:

$$4x_1=2a_1+2a_2+2a_3+2a_4,$$

$$x_1=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}.$$

Если же умножить последние два уравнения на -1, а затем сложить все четыре уравнения, то найдем:

$$x_2=\frac{a_1+a_2-a_3-a_4}{2}.$$

Совершенно так же получим:

$$x_3=\frac{a_1-a_2+a_3-a_4}{2},$$

$$x_4=\frac{a_1-a_2-a_3+a_4}{2}.$$

13. Положим: $x+y+z+v=s$. Тогда система перепишется следующим образом:

$$ax+m(s-x)=k,$$
$$by+m(s-y)=l,$$
$$cz+m(s-z)=p,$$
$$dv+m(s-v)=q,$$

так что

$$ms+x(a-m)=k;\ ms+y(b-m)=l;\ ms+z(c-m)=p;$$
$$ms+v(d-m)=q.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} x&=\frac{k}{a-m}-\frac{m}{a-m}s,\\ y&=\frac{l}{b-m}-\frac{m}{b-m}s,\\ z&=\frac{p}{c-m}-\frac{m}{c-m}s,\\ v&=\frac{q}{d-m}-\frac{m}{d-m}s. \end{aligned} \tag{*}$$

Складывая почленно эти равенства, найдем:

$$s=\frac{k}{a-m}+\frac{l}{b-m}+\frac{p}{c-m}+\frac{q}{d-m}-ms\left(\frac{1}{a-m}+\frac{1}{b-m}+\frac{1}{c-m}+\frac{1}{d-m}\right).$$

Следовательно:

$$s\left[1+m\left(\frac{1}{a-m}+\frac{1}{b-m}+\frac{1}{c-m}+\frac{1}{d-m}\right)\right]=\frac{k}{a-m}+\frac{l}{b-m}+\frac{p}{c-m}+\frac{q}{d-m}.$$

Отсюда находим s, а затем из равенств (*) получаем и искомые значения неизвестных x, y, z и v.

14. Положим общую величину отношений равною λ. Тогда имеем:

$$\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_p-a_p}{m_p}=\lambda.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_1&=a_1+m_1\lambda,\\ x_2&=a_2+m_2\lambda,\\ &\cdots\cdots\\ x_p&=a_p+m_p\lambda. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее из данных уравнений, получим:

$$x_1+x_2+\ldots+x_p=a=(a_1+a_2+\ldots+a_p)+\lambda(m_1+m_2+\ldots+m_p).$$

Следовательно:

$$\lambda=\frac{a-a_1-a_2-\ldots-a_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p},$$

а затем легко получаем и значения:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p.$$

15. Если положить:

$$\frac{1}{x}=x';\quad \frac{1}{y}=y';\quad \frac{1}{z}=z';\quad \frac{1}{v}=v',$$

то решение этой системы приведется к решению системы задачи 11. Пользуясь результатом этой последней задачи, легко получаем:

$$x=\frac{3}{a+b+c-2d};\quad y=\frac{3}{a+b+d-2c};$$
$$z=\frac{3}{a+c+d-2b};\quad v=\frac{3}{b+c+d-2a}.$$

16. Разделим первое уравнение на ab, второе на ac и третье на bc (предполагая $abc\neq 0$); получим:

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=\frac{c}{ab},$$
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{b}{ac},$$
$$\frac{z}{c}+\frac{y}{b}=\frac{a}{bc}.$$

Складывая все эти уравнения почленно, найдем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right).$$

Отсюда

$$\frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right)-\frac{c}{ab}.$$

Следовательно:

$$\frac{z}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc},$$

т. е.

$$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

и, далее, аналогично:

$$y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$
$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

17. Прежде всего, имеем очевидное решение: $x=y=z=0$. Будем теперь искать решения, отличные от нуля, т. е. такие, где x, y, z нулю не равны. Разделим первое из наших уравнений на yz, второе на zx и третье на xy. Получим:

$$\frac{c}{z}+\frac{b}{y}=2d,$$
$$\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=2d',$$
$$\frac{b}{y}+\frac{a}{x}=2d''.$$

Отсюда

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=d+d'+d''.$$

Поэтому

$$\frac{a}{x}=d'+d''-d;\quad \frac{b}{y}=d+d''-d';\quad \frac{c}{z}=d+d'-d''.$$

Окончательно:

$$x=\frac{a}{d'+d''-d};\quad y=\frac{b}{d+d''-d'};\quad z=\frac{c}{d+d'-d''}.$$

18. Перепишем систему следующим способом:

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{1}{c};\quad \frac{az+cx}{xz}=\frac{1}{b};\quad \frac{bz+cy}{yz}=\frac{1}{a}.$$

Отсюда

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{c};\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=\frac{1}{b};\quad \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{a}.$$

Следовательно (см. предыдущую задачу):

$$x=\frac{2a^2bc}{ac+ab-bc};\quad y=\frac{2ab^2c}{bc+ab-ac};\quad z=\frac{2abc^2}{bc+ac-ab}.$$

19. Очевидное решение будет: $x=y=z=0$. Теперь разделим обе части каждого из уравнений нашей системы на xyz. Получаем:

$$\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}=\frac{1}{a^2};$$
$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}-\frac{1}{xz}=\frac{1}{b^2};$$
$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}-\frac{1}{xy}=\frac{1}{c^2}.$$

Складывая попарно, найдем:

$$\frac{2}{xy}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2};\quad \frac{2}{yz}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2};\quad \frac{2}{xz}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Следовательно,

$$xy=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2};\quad yz=\frac{2b^2c^2}{b^2+c^2};\quad xz=\frac{2a^2c^2}{a^2+c^2}. \tag{*}$$

Перемножая эти равенства, получим:

$$x^2y^2z^2=\frac{8a^4b^4c^4}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2)}.$$

Отсюда

$$xyz=\pm\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2c^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2)}}.$$

Пользуясь равенством

$$xy=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},$$

находим для z два значения, отличающиеся друг от друга только знаками. По данному значению z из равенств (*) находим соответствующие значения y и x. Таким образом, получаем две системы значений x, y и z, удовлетворяющих нашему уравнению.

20. Складывая почленно все три уравнения, найдем:

$$(x+y+z)(a+b+c)=0.$$

Следовательно:

$$x+y+z=0,$$

откуда

$$x=\frac{a-b}{a+b+c}; \quad y=\frac{a-c}{a+b+c}; \quad z=\frac{b-a}{a+b+c}.$$

21. Складывая почленно все три уравнения, получим:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=2a^3+2b^3+2c^3.$$

Пользуясь последовательно данными уравнения, найдем:

$$2(b+c)x=2b^3+2c^3,$$
$$2(c+a)y=2a^3+2c^3,$$
$$2(a+b)z=2a^3+2b^3,$$

откуда

$$x=b^2-bc+c^2; \quad y=a^2-ac+c^2; \quad z=a^2-ab+b^2.$$

22. Рассмотрим следующее равенство:

$$\frac{x}{a+\theta}+\frac{y}{b+\theta}+\frac{z}{c+\theta}-1=-\frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu)}{(\theta+a)(\theta+b)(\theta+c)}.$$

Если преобразовать это равенство, приведя к общему знаменателю его члены и отбросив этот общий знаменатель, то мы получим равенство нулю некоторого многочлена второй степени относительно θ с коэффициентами, зависящими от x, y, z, λ, μ, ν, a, b, c. Если вместо θ мы подставим в наше исходное выражение последовательно λ, μ и ν, то в силу данных уравнений это выражение (а следовательно, и образующийся из него многочлен второй степени) обратится в нуль. Но если многочлен второй степени обращается в нуль при трех различных значениях переменной, то он равен нулю тождественно (см. § 2, начало) и, следовательно, равенство:

$$\frac{x}{a+\theta}+\frac{y}{b+\theta}+\frac{z}{c+\theta}-1=-\frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu)}{(\theta+a)(\theta+b)(\theta+c)}$$

(в силу существования данных трех уравнений) является тождественным относительно θ, т. е. справедливо при любых значениях θ.

Умножим обе части этого равенства на $a+\theta$, а затем положим $\theta=-a$. Тогда найдем:

$$x=\frac{(a+\lambda)(a+\mu)(a+\nu)}{(a-b)(a-c)}.$$

Аналогично получим:

$$y=\frac{(b+\lambda)(b+\mu)(b+\nu)}{(b-c)(b-a)};$$
$$z=\frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{(c-a)(c-b)}.$$

Конечно, мы предполагаем при этом, что данные величины λ, μ, ν, а равным образом a, b и c не равны между собою.

23. Данные уравнения показывают, что многочлен:

$$\alpha^3+x\alpha^2+y\alpha+z$$

обращается в нуль при трех различных значениях α, а именно при $\alpha=a$, при $\alpha=b$ и при $\alpha=c$ (мы предполагаем a, b и c не равными между собой).

Составим разность:

$$\alpha^3+x\alpha^2+y\alpha+z-(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c).$$

Эта разность обращается также в нуль при α равном a, b, c. Если развернуть это выражение по степеням α, то получим:

$$(x+a+b+c)\,\alpha^2+(y-ab-ac-bc)\,\alpha+z+abc.$$

Этот трехчлен второй степени относительно α обращается в нуль при трех различных значениях α, а потому он равен нулю тождественно и, следовательно, все его коэффициенты равны нулю, т. е.

$$x+a+b+c=0,\quad y-ab-ac-bc=0,\quad z+abc=0.$$

Отсюда

$$x=-(a+b+c),$$
$$y=ab+ac+bc,$$
$$z=-abc$$

являются решением нашей системы.

24. Совершенно аналогично найдем:

$$t=-(a+b+c+d),$$
$$x=ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$
$$y=-(abc+abd+acd+bcd),$$
$$z=abcd.$$

25. Умножим первое из уравнений на r, второе на p, третье на q и четвертое на 1 и сложим. Тогда получим:

$$(a^3+a^2q+ap+r)\,x+(b^3+b^2q+bp+r)\,y+$$
$$+(c^3+c^2q+cp+r)\,z+(d^3+d^2q+dp+r)\,u=mr+np+kq+l.$$

Подберем величины r, p и q так, чтобы имели место равенства:

$$b^3+b^2q+bp+r=0,$$
$$c^3+c^2q+cp+r=0,$$
$$d^3+d^2q+dp+r=0.$$

Отсюда получаем (см. задачу 23):

$$q=-(b+c+d),$$
$$p=bc+bd+cd,$$
$$r=-bcd,$$

и, следовательно:

$$x=\frac{N}{a^3+a^2q+ap+r}=\frac{N}{(a-b)(a-c)(a-d)},$$

где

$$N=-mbcd+n(bc+bd+cd)-k(b+c+d)+l.$$

Что касается равенства

$$a^3+a^2q+ap+r=(a-b)(a-c)(a-d),$$

то оно легко следует из тождества:

$$\alpha^3+q\alpha^2+p\alpha+r=(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d).$$

Для нахождения переменной y подбираем q, p и r так, чтобы имели место равенства:

$$a^3+a^2q+ap+r=0,$$
$$c^3+c^2q+cp+r=0,$$
$$d^3+d^2q+dp+r=0$$

и аналогично для остальных переменных.

26. Положим

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=s.$$

Складывая почленно наши уравнения, получим

$$s+2s+3s+\ldots+ns=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Но

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(арифметическая прогрессия).}$$

Поэтому

$$s=\frac{2}{n(n+1)}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=A \quad \text{(для краткости).}$$

Вычитая теперь из первого уравнения второе, найдем:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-nx_1=a_1-a_2.$$

Отсюда

$$nx_1=A+a_2-a_1$$

и

$$x_1=\frac{A+a_2-a_1}{n}.$$

Вычитая из второго уравнения третье, получим:

$$x_2=\frac{A+a_2-a_2}{n}$$

и т. д.

27. Положим:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=s.$$

Тогда имеем:

$$-s+2x_1=2a; \qquad -s+4x_2=4a;$$
$$-s+8x_3=8a;\ \ldots;\ -s+2^nx_n=2^na.$$

Отсюда

$$x_1=a+\frac{s}{2}; \quad x_2=a+\frac{s}{4}; \quad x_3=a+\frac{s}{8};\ \ldots;\ x_n=a+\frac{s}{2^n}.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$s=na+s\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Но

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Поэтому

$$s=2^nna.$$

Следовательно:

$$x_1 = a + \frac{s}{2} = a + 2^{n-1}na = a(1 + n\cdot 2^{n-1}),$$

$$x_2 = a + \frac{s}{4} = a + 2^{n-2}na = a(1 + n2^{n-2}) \text{ и т. д.}$$

28. Пусть

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = s = 1.$$

Тогда:

$$s - x_2 = 2; \quad s - x_3 = 3; \quad \ldots; \quad s - x_{n-1} = n - 1; \quad s - x_n = n.$$

Следовательно (так как $s = 1$):

$$x_2 = -1; \quad x_3 = -2; \quad \ldots; \quad x_n = -(n-1).$$

Отсюда

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -[(1 + 2 + \ldots + (n-1)] = -\frac{n(n-1)}{2}.$$

Наконец:

$$x_1 = 1 - (x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

29. Допустим, что уравнения совместны, т. е. существует такое значение x, которое удовлетворяет как первому, так и второму из уравнений. Подставляя это значение x в наши уравнения, получим следующие тождественные равенства:

$$ax + b = 0; \quad a'x + b' = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на b', а второе на b. Вычитая полученные равенства почленно, найдем:

$$(ab' - a'b)\,x = 0.$$

Если общее решение x отлично от нуля, тогда действительно из последнего равенства следует:

$$ab' - a'b = 0.$$

Если же общее решение равно нулю, то из исходных уравнений будет следовать:

$$b = b' = 0,$$

а потому и в этом случае

$$ab' - a'b = 0.$$

Итак, в обоих случаях, если данные два уравнения имеют общее решение, то

$$ab' - a'b = 0.$$

Обратно легко видеть, что при выполнении условия:

$$ab' - a'b = 0$$

оба данных уравнения имеют общий корень (коэффициенты уравнений пропорциональны) и, следовательно, уравнения совместны.

30. Для того чтобы доказать, что данные системы эквивалентны, надо доказать, что каждое решение одной из систем является одновременно решением другой системы. Действительно, легко видеть, что каждое решение первой системы является одновременно решением и второй системы. Остается

только доказать, что каждое решение второй системы будет и решением первой системы. Допустим, что пара чисел x и y является решением второй системы, т. е. мы имеем тождественно:

$$l\xi + l'\xi' = 0,$$
$$m\xi + m'\xi' = 0,$$

где

$$\xi = ax + by + c; \quad \xi' = a'x + b'y + c'.$$

Умножая первое из этих равенств на m', а второе на l' и вычитая их почленно, найдем:

$$(lm' - ml')\,\xi = 0.$$

Совершенно так же, умножая первое из равенств на m, а второе на l и вычитая, получим:

$$(lm' - ml')\,\xi' = 0.$$

Но так как по условию:

$$lm' - ml' \neq 0,$$

то из последних двух равенств следует:

$$\xi = 0$$

и

$$\xi' = 0,$$

т. е.

$$ax + by + c = 0$$

и

$$a'x + b'y + c' = 0.$$

Итак, пара чисел x и y, являющаяся решением системы второй, одновременно является и решением системы первой.

31. Умножим первое уравнение на b', а второе на b и произведем почленное вычитание. Найдем:

$$(ab' - a'b)\,x + cb' - c'b = 0.$$

Аналогично получим:

$$(ab' - a'b)\,y + c'a - a'c = 0.$$

Эти два уравнения эквивалентны исходным. Легко видеть, что если $ab' - a'b \neq 0$, то существует одна и только одна пара значений x и y, удовлетворяющих последним двум равенствам, а следовательно, и исходной системе уравнений.

32. Умножая первое из равенств на b', а второе на b и вычитая, найдем:

$$(ab' - a'b)\,x = 0.$$

Так как по условию $ab' - a'b \neq 0$, то отсюда следует: $x = 0$. Совершенно так же докажем, что $y = 0$.

33. Из первых двух уравнений получим:

$$x = \frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}; \quad y = \frac{a'c - c'a}{ab' - a'b}.$$

Если три уравнения совместны, то пара чисел x и y, являющаяся решением системы, составленной из первых двух уравнений, должна являться решением и третьего уравнения. Поэтому при совместности трех данных уравнений должна существовать зависимость:

$$a''\frac{c'b - cb'}{ab' - a'b} + b''\frac{a'c - c'a}{ab' - a'b} + c'' = 0,$$

или

$$a''(c'b-cb')+b''(a'c-c'a)+c''(ab'-a'b)=0. \quad (*)$$

Обратно, существование этой зависимости утверждает, что решение, удовлетворяющее первым двум уравнениям, удовлетворяет и третьему. Эту зависимость можно переписать следующими способами:

$$a'(cb''-c''b)+b'(ac''-ca'')+c'(ba''-b''a)=0,$$
$$a(c''b'-c'b'')+b(a''c'-c''a')+c(b''a'-a''b')=0.$$

Отсюда видно, что решение каждой пары из трех уравнений обязательно является решением третьего уравнения, т. е. при соблюдении условия (*) наша система совместна.

34. Вычитая из первого равенства сначала второе, а затем третье, найдем:

$$(a-b)y+(a^2-b^2)z=0,$$
$$(a-c)y+(a^2-c^2)z=0.$$

Так как $a-b\neq 0$ и $a-c\neq 0$, то имеем отсюда:

$$y+(a+b)z=0,$$
$$y+(a+c)z=0.$$

Вычитая эти два равенства почленно, имеем:

$$(b-c)z=0.$$

Но по условию $b-c\neq 0$. Поэтому $z=0$. Подставляя же значение $z=0$ в одно из последних двух уравнений, найдем $y=0$. Наконец, при помощи одного из исходных уравнений получим:

$$x=0.$$

35. Умножим первое из равенств на B_1, а второе на B и вычтем их почленно. Получим:

$$(AB_1-A_1B)x+(CB_1-C_1B)z=0. \quad (1)$$

Аналогично найдем:

$$(AC_1-A_1C)x+(BC_1-B_1C)y=0. \quad (2)$$

Допустим теперь, что ни одно из выражений:

$$AB_1-A_1B, \quad CB_1-C_1B, \quad AC_1-A_1C$$

не равно нулю. Тогда из наших равенств получаем:

$$\frac{x}{C_1B-CB_1}=\frac{z}{AB_1-A_1B}$$

[деля обе части первого равенства на произведение:

$$(AB_1-A_1B)(C_1B-CB_1)]$$

и

$$\frac{x}{C_1B-CB_1}=\frac{y}{CA_1-AC_1}.$$

Таким образом, в этом случае действительно имеет место искомая пропорция.

Пусть теперь о д н о и т о л ь к о о д н о из выражений:

$$AB_1-A_1B, \; CB_1-C_1B, \; AC_1-A_1C$$

обращается в нуль. Положим, например, $CB_1-C_1B=0$. Тогда из равенств (1) и (2) получаем: $x=0$. Предположим, далее, что два из рассматриваемых выражений, например, C_1B-CB_1 и CA_1-AC_1, равны нулю, а третье, т. е. AB_1-A_1B, нулю не равно. Тогда найдем: $x=y=0$. И в этих случаях будет

иметь место наша пропорция, или, вернее, три равенства:

$$x=\lambda(C_1B-CB_1),$$
$$y=\lambda(CA_1-AC_1),$$
$$z=\lambda(AB_1-A_1B).$$

Таким образом, два данных уравнения в этих случаях определяют переменные x, y и z „с точностью до общего множителя пропорциональности".

Если же все три величины:

$$AB_1-A_1B, \quad CB_1-C_1B \text{ и } AC_1-A_1C$$

равны нулю, то имеет место пропорция:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}.$$

В этом случае система двух уравнений обращается в одно и относительно величины переменных x, y и z, удовлетворяющих этому уравнению, нельзя заключить ничего определенного.

36. Из первых двух уравнений (см. предыдущую задачу) получим:

$$\frac{x}{ac-b^2}=\frac{y}{bc-a^2}=\frac{z}{ab-c^2}.$$

Отсюда

$$x=\lambda(ac-b^2),$$
$$y=\lambda(bc-a^2),$$
$$z=\lambda(ab-c^2).$$

Подставляя в третье уравнение, найдем:

$$b(ac-b^2)+a(bc-a^2)+c(ab-c^2)=0,$$

или

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

37. Перемножив первые два уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}.$$

Тот же результат мы получим, если перемножим третье и четвертое уравнения.

Это показывает, что если имеют место любые три из данных уравнений, то имеет место и четвертое уравнение, т. е. система совместна.

Для определения значений x, y и z, удовлетворяющих данной системе, поступим так. Приравнивая правые части первого и третьего уравнений, найдем:

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Решая это уравнение относительно y, имеем:

$$y=b\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Подставляя значение y в первые два уравнения, получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda},$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{2}{\mu+\lambda}.$$

Отсюда

$$x = a\frac{\lambda\mu + 1}{\mu + \lambda}; \qquad z = c\frac{\lambda\mu - 1}{\mu + \lambda}.$$

38. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{gathered} a(x + py) + b(x + qy) = ap^2 + bq^2, \\ ap(x + py) + bq(x + qy) = ap^3 + bq^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ap^{k-1}(x + py) + bq^{k-1}(x + qy) = ap^{k+1} + bq^{k+1}. \end{gathered}$$

Теперь видно, что система эквивалентна следующим двум уравнениям:

$$x + py = p^2; \quad x + qy = q^2,$$

и, следовательно, система совместна.

39. Имеем:

$$\begin{aligned} &x_2 = a_1 - x_1, \\ &x_3 = a_2 - x_2 = a_2 - a_1 + x_1, \\ &x_4 = a_3 - x_3 = a_3 - a_2 + a_1 - x_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \dots \pm a_2 \mp a_1 \pm x_1. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в последнем равенстве верхние знаки будут в том случае, когда n нечетное, а нижние знаки тогда, когда n четное.

Рассмотрим эти два случая в отдельности.

1° Пусть n нечетное. Тогда:

$$x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + x_1.$$

С другой стороны:

$$x_n + x_1 = a_n.$$

Из этих двух равенств получаем:

$$x_1 = \frac{a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots - a_2 + a_1}{2},$$

и, следовательно:

$$x_2 = \frac{a_1 - a_n + a_{n-1} - \dots - a_3 + a_2}{2},$$

$$x_3 = \frac{a_2 - a_1 + a_n - \dots - a_4 + a_3}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2° Пусть теперь n четное. Тогда:

$$x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_2 + a_1 - x_1.$$

С другой стороны:

$$x_n = a_n - x_1.$$

Следовательно, для совместности данной системы уравнений должно быть выполнено равенство:

$$a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_2 + a_1 = a_n,$$

т. е.

$$a_n + a_{n-2} + \dots + a_2 = a_{n-1} + a_{n-3} + \dots + a_1$$

(сумма коэффициентов с четными значками должна равняться сумме коэффициентов с нечетными значками). Легко видеть, что в этом случае система будет неопределенна, т. е. будет допускать бесчисленное множество решений,

именно:

$$\begin{aligned}
&x_1=\lambda,\\
&x_2=a_1-\lambda,\\
&x_3=a_2-a_1+\lambda,\\
&x_4=a_3-a_2+a_1-\lambda,\\
&x_n=a_{n-1}-a_{n-2}+\ldots+a_3-a_2+a_1-\lambda,
\end{aligned}$$

где λ — произвольная величина.

40. Из первых двух уравнений найдем:

$$\frac{x}{\frac{b^2}{b-d}-\frac{c^2}{c-d}}=\frac{y}{\frac{c^2}{c-d}-\frac{a^2}{a-d}}=\frac{z}{\frac{a^2}{a-d}-\frac{b^2}{b-d}}=\lambda.$$

Подставляя в третье уравнение, имеем:

$$\lambda\left\{\frac{a}{a-d}\left(\frac{b^2}{b-d}-\frac{c^2}{c-d}\right)+\frac{b}{b-d}\left(\frac{c^2}{c-d}-\frac{a^2}{a-d}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{c}{c-d}\left(\frac{a^2}{a-d}-\frac{b^2}{b-d}\right)\right\}=d(a-b)(b-c)(c-a).$$

После преобразований получим:

$$\frac{a}{a-d}\left(\frac{b^2}{b-d}-\frac{c^2}{c-d}\right)+\frac{b}{b-d}\left(\frac{c^2}{c-d}-\frac{a^2}{a-d}\right)+$$
$$+\frac{c}{c-d}\left(\frac{a^2}{a-d}-\frac{b^2}{b-d}\right)=\frac{d(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

Поэтому

$$\lambda=-(a-d)(b-d)(c-d),$$

и, следовательно:

$$\begin{aligned}
&x=(a-d)(b-c)(db+dc-bc),\\
&y=(b-d)(c-a)(dc+da-ac),\\
&z=(c-d)(a-b)(ad+db-ab).
\end{aligned}$$

41. Решая два последних уравнения относительно x и y, найдем:

$$x+n=\frac{(c-m)(n-a)}{z+c},$$

$$y+b=\frac{(b-l)(m-c)}{z+m}.$$

Отсюда

$$x+a=\frac{(c-m)(n-a)}{z+c}-(n-a)=(a-n)\frac{z+m}{z+c}.$$

Аналогично:

$$y+l=(l-b)\frac{z+c}{z+m}.$$

Подставляя найденные значения $x+a$ и $y+l$ в первое уравнение, получаем, что оно есть следствие двух последних. Таким образом, система неопреде-

лена и все решения ее заключаются в формулах:

$$x=\frac{(c-m)(n-a)}{z+c}-n,$$

$$y=\frac{(b-l)(m-c)}{z+m}-b,$$

при произвольном z.

42. Из второго и третьего уравнения имеем:

$$(1-k)x+ky=-[(1+k)x+(12-k)y];$$

отсюда с учетом первого уравнения $(5-k)y=0$ и либо $k=5$, либо $y=0$ (отсюда $x=0$), что дает (подстановкой во второе уравнение) $k=-1$.

43. Имеем:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a,$$
$$\sin 3a=\sin a(4\cos^2 a-1),$$
$$\sin 4a=4\sin a(2\cos^3 a-\cos a).$$

Поэтому первое из уравнений нашей системы перепишется следующим образом:

$$x+2y\cos a+z(4\cos^2 a-1)=4(2\cos^3 a-\cos a).$$

Остальные два аналогичны. Расположим это уравнение по степеням $\cos a$. Имеем:

$$8\cos^3 a-4z\cos^2 a-(2y+4)\cos a+z-x=0.$$

Полагая $\cos a=t$ и деля обе части на 8, получаем:

$$t^3-\frac{z}{2}t^2-\frac{y+2}{4}t+\frac{z-x}{8}=0. \qquad (*)$$

Наша система уравнений равносильна утверждению, что уравнение (*) имеет три корня: $t=\cos a$, $t=\cos b$ и $t=\cos c$. Отсюда следует (см. задачу 23):

$$\frac{z}{2}=\cos a+\cos b+\cos c;$$
$$\frac{y+2}{4}=-(\cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c);$$
$$\frac{x-z}{8}=\cos a\cos b\cos c.$$

Поэтому решения нашей системы будут:

$$x=2(\cos a+\cos b+\cos c)+8\cos a\cos b\cos c,$$
$$y=-2-4(\cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c),$$
$$z=2(\cos a+\cos b+\cos c).$$

44. Положим:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k.$$

Так как $A+B+C=\pi$, то

$$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C.$$

Но из данной нам пропорции имеем:

$$\sin A=\frac{a}{k};\quad \sin B=\frac{b}{k};\quad \sin C=\frac{c}{k}.$$

Подставляя в последнее равенство, найдем:

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

Остальные равенства получаются аналогично.

45. Из первых двух данных равенств выражаем a и b через c и тригонометрические функции. Получаем:

$$b=\frac{c(\cos A+\cos B\cos C)}{\sin^2 C}, \tag{1}$$

$$a=\frac{c(\cos B+\cos A\cos C)}{\sin^2 C}. \tag{2}$$

Подставляя в третье равенство и произведя необходимые преобразования, найдем:

$$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=0.$$

Докажем теперь, что

$$A+B+C=\pi.$$

Преобразуем полученное нами равенство следующим образом:

$$\cos^2 A+2\cos A\cos B\cos C=1-\cos^2 B-\cos^2 C-\cos^2 B\cos^2 C+\cos^2 B\cos^2 C,$$
$$\cos^2 A+2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 B\cos^2 C=1-\cos^2 B-\cos^2 C\,(1-\cos^2 B),$$
$$(\cos A+\cos B\cos C)^2=\sin^2 A\sin^2 C.$$

Но, так как ранее было получено (1), что

$$\cos A+\cos B\cos C=\frac{b\sin^2 C}{c}>0,$$

то

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin A\sin C,$$
$$\cos A=\sin A\sin C-\cos B\cos C=-\cos(B+C),$$
$$\cos A+\cos(B+C)=2\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2}=0.$$

Отсюда следует, что либо

$$\frac{A+B+C}{2}=(2l+1)\frac{\pi}{2},$$

либо

$$\frac{A-B-C}{2}=(2l'+1)\frac{\pi}{2},$$

где l и l' — целые числа. Покажем сначала, что предположение второе невозможно. В этом случае мы имели бы:

$$A-B-C=(2l'+1)\pi,$$
$$B=A-C-(2l'+1)\pi,$$
$$\cos B=\cos(A-C-\pi)=-\cos(A-C)=-\cos A\cos C-\sin A\sin C.$$

Следовательно:

$$\cos B+\cos A\cos C=-\sin A\sin C<0,$$

что невозможно, так как прежде мы получили (2):

$$\cos B+\cos A\cos C=\frac{a\sin^2 C}{c}>0.$$

Итак, остается только случай

$$A+B+C=(2l+1)\pi.$$

Но в силу существующих для A, B и C неравенств, имеем:

$$0<2l+1<3,$$

т. е.

$$2l+1=1$$

и

$$A+B+C=\pi.$$

Остается только доказать, что

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Мы показали, что

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C.$$

С другой стороны:

$$\cos B+\cos A\cos C=\cos(\pi-A-C)+\cos A\cos C=$$
$$=-\cos(A+C)+\cos A\cos C=\sin A\sin C.$$

Пользуясь этим равенством, а также равенствами (1) и (2), легко получаем искомую пропорцию.

46. Покажем сначала, что из уравнений (1) следуют уравнения (2). Умножим первое из уравнений (1) на a, второе на b и третье на $-c$ и затем сложим их почленно. Тогда получаем:

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,$$

т. е. третье из уравнений (2). Аналогично получим и остальные два из уравнений (2).

Чтобы получить уравнения (1) из уравнений (2), сложим первые два из уравнений (2). После приведения подобных членов найдем:

$$2c^2-2bc\cos A-2ac\cos B=0.$$

Отсюда

$$c=b\cos A+a\cos B,$$

т. е. получаем третье из уравнений (1). Остальные получаем аналогично.

47. Из первого равенства получаем:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Отсюда

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$
$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$
$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Следовательно:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Так как данные формулы переходят одна в другую путем круговой перестановки букв a, b, c, A, B, C и от этого преобразования правая часть

Итак, остается только случай

$$A+B+C=(2l+1)\pi.$$

Но в силу существующих для A, B и C неравенств, имеем:

$$0<2l+1<3,$$

т. е.

$$2l+1=1$$

и

$$A+B+C=\pi.$$

Остается только доказать, что

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Мы показали, что

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C.$$

С другой стороны:

$$\cos B+\cos A\cos C=\cos(\pi-A-C)+\cos A\cos C=$$
$$=-\cos(A+C)+\cos A\cos C=\sin A\sin C.$$

Пользуясь этим равенством, а также равенствами (1) и (2), легко получаем искомую пропорцию.

46. Покажем сначала, что из уравнений (1) следуют уравнения (2). Умножим первое из уравнений (1) на a, второе на b и третье на $-c$ и затем сложим их почленно. Тогда получаем:

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,$$

т. е. третье из уравнений (2). Аналогично получим и остальные два из уравнений (2).

Чтобы получить уравнения (1) из уравнений (2), сложим первые два из уравнений (2). После приведения подобных членов найдем:

$$2c^2-2bc\cos A-2ac\cos B=0.$$

Отсюда

$$c=b\cos A+a\cos B,$$

т. е. получаем третье из уравнений (1). Остальные получаем аналогично.

47. Из первого равенства получаем:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Отсюда

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$
$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$
$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Следовательно:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Так как данные формулы переходят одна в другую путем круговой перестановки букв a, b, c, A, B, C и от этого преобразования правая часть

Отсюда

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin b\sin c}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}}.$$

Аналогичные выражения получаются для $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ и $\sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$. Вычислим теперь $\sin\frac{A+B}{2}$. Имеем:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\sin b}}\left(\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin c}+\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin c}\right)=$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Итак, мы получили формулу:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

Аналогично найдем:

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

Так как $\varepsilon=A+B+C-\pi$, то

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C-\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C-\varepsilon}{2}$$

и, следовательно:

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}+\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}}$$

и, следовательно:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}. \qquad (1)$$

Пользуясь же формулой:

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2},$$

найдем совершенно аналогично предыдущему:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}. \qquad (2)$$

Перемножая равенства (1) и (2) почленно и извлекая корень квадратный, действительно, получаем:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

49. Имеем:

$$a[\operatorname{tg}(x+\gamma)-\operatorname{tg}(x+\beta)]+b[\operatorname{tg}(x+\alpha)-\operatorname{tg}(x+\gamma)]+$$
$$+c[\operatorname{tg}(x+\beta)-\operatorname{tg}(x+\alpha)]=0.$$

Отсюда

$$\frac{a\sin(\gamma-\beta)}{\cos(x+\beta)\cos(x+\gamma)}+\frac{b\sin(\alpha-\gamma)}{\cos(x+\alpha)\cos(x+\gamma)}+\frac{c\sin(\beta-\alpha)}{\cos(x+\beta)\cos(x+\alpha)}=0,$$

$$a\sin(\gamma-\beta)\cos(x+\alpha)+b\sin(\alpha-\gamma)\cos(x+\beta)+c\sin(\beta-\alpha)\cos(x+\gamma)=0.$$

Наконец, находим:

$$\operatorname{tg}x=\frac{a\sin(\gamma-\beta)\cos\alpha+b\sin(\alpha-\gamma)\cos\beta+c\sin(\beta-\alpha)\cos\gamma}{a\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha+b\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta+c\sin(\beta-\alpha)\sin\gamma}.$$

50. Имеем:

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\sin x=\operatorname{tg}x\cos x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Отсюда видно, что если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационально, то рациональны $\sin x$ и $\cos x$. Покажем теперь, что если $\sin x$ и $\cos x$ рациональны, то рационален и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Из первого соотношения имеем:

$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cos x=1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Следовательно, если $\cos x$ рационален, то рационален и $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. Но из второго равенства следует:

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sin x\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда ясно, что при рациональности $\cos x$ и $\sin x$ рационален и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

51. Так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, то

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1,$$

т. е.

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x.$$

Поэтому наше уравнение перепишется так:

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x=a,$$
$$2\sin^2 x\cos^2 x=1-a,$$
$$\sin^2 2x=2(1-a);\quad \sin 2x=\pm\sqrt{2(1-a)}.$$

Для вещественности решений необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1.$$

52. 1° Преобразуем левую часть уравнения. Получаем:

$$\sin x+\sin 3x+\sin 2x=2\sin 2x\cos x+\sin 2x=\sin 2x\,(1+2\cos x)=0.$$

Отсюда

$$1)\ \sin 2x=0;\qquad 2)\ \cos x=-\frac{1}{2}.$$

2° В данном случае преобразование левой части дает:

$$\cos nx+\cos(n-2)x-\cos x=2\cos(n-1)x\cos x-\cos x=$$
$$=\cos x\,[2\cos(n-1)x-1]=0,$$

т. е. либо $\cos x=0$, либо $\cos(n-1)x=\frac{1}{2}$.

53. 1° Имеем:

$$m(\sin a\cos x-\cos a\sin x)-n(\sin b\cos x-\cos b\sin x)=0,$$
$$(n\cos b-m\cos a)\sin x-(n\sin b-m\sin a)\cos x=0,$$
$$(n\cos b-m\cos a)\cos x\left[\operatorname{tg}x-\frac{n\sin b-m\sin a}{n\cos b-m\cos a}\right]=0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x = \frac{n \sin b - m \sin a}{n \cos b - m \cos a}.$$

2° Имеем:

$$\sin x \cos 3\alpha + \cos x \sin 3\alpha = 3 (\sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x).$$

Отсюда

$$\sin x (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) - \cos x (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) = 0.$$

Но

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Поэтому уравнение принимает вид:

$$\sin x \cos^3 \alpha - \cos x \sin^3 \alpha = 0.$$

Итак:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

54. Легко найти, что

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x.$$

Поэтому наше уравнение примет вид:

$$-20 \sin^3 x + 5 \sin x = 0,$$

или

$$\sin x (1 - 4 \sin^2 x) = 0.$$

Итак, имеем следующие решения:

$$\sin x = 0; \qquad \sin x = \pm \frac{1}{2}.$$

55. Имеем:

$$2 \sin x \cos (a - x) = \sin a + \sin (2x - a).$$

Уравнение принимает вид:

$$\sin x + \sin (2x - a) = 0,$$

или

$$2 \sin \frac{3x - a}{2} \cos \frac{x - a}{2} = 0.$$

Итак, может быть

$$\sin \frac{3x - a}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{3x - a}{2} = k\pi,$$

т. е.

$$3x = a + 2k\pi; \quad x = \frac{a + 2k\pi}{3},$$

k — любое целое число.

Равным образом, имеем:

$$\cos \frac{x - a}{2} = 0; \quad \frac{x - a}{2} = (2l + 1) \frac{\pi}{2};$$
$$x = a + (2l + 1) \pi,$$

где l — любое целое число.

56. Имеем:

$$\sin x \sin(\gamma - x) = \frac{1}{2}[\cos(2x-\gamma) - \cos\gamma].$$

Поэтому уравнение перепишется так:

$$\cos(2x-\gamma) - \cos\gamma = 2a,$$
$$\cos(2x-\gamma) = 2a + \cos\gamma.$$

57. Имеем:

$$\sin(\alpha + x) + \sin\alpha \sin x \frac{\sin(\alpha+x)}{\cos(\alpha+x)} - m\cos\alpha\cos x = 0.$$

Далее:

$$\frac{\sin(\alpha+x)}{\cos(\alpha+x)}\left\{\cos(\alpha+x) + \sin\alpha\sin x\right\} - m\cos\alpha\cos x = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\sin(\alpha+x)}{\cos(\alpha+x)}\cos\alpha\cos x - m\cos\alpha\cos x = \cos\alpha\cos x\left\{\operatorname{tg}(\alpha+x) - m\right\} = 0.$$

Предполагая $\cos\alpha \neq 0$, получаем для определения x следующие равенства:

$$\cos x = 0; \quad \operatorname{tg}(\alpha+x) = m.$$

58. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+x) - 2\cos\alpha\cos(\alpha+x) = 1 - \cos^2 x.$$

Отсюда

$$[\cos\alpha - \cos(\alpha+x)]^2 - \sin^2 x = 0,$$

т. е.

$$[\cos\alpha - \cos(\alpha+x) - \sin x]\,[\cos\alpha - \cos(\alpha+x) + \sin x] = 0.$$

Далее:

$$[\cos\alpha(1-\cos x) + \sin x(\sin\alpha - 1)]\,[\cos\alpha(1-\cos x) + \sin x(\sin\alpha+1)] = 0,$$

$$\sin^2 x\left[\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha - 1\right]\left[\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha + 1\right] = 0$$

(если $\sin x \neq 0$). Если $\sin x = 0$, то $\cos^2\alpha(1-\cos x)^2 = 0$.

Теперь легко находим следующие решения:

$$\cos x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \text{т. е. } x = 2k\pi \text{ и } x = -\alpha + \frac{2k+1}{2}\pi.$$

59. Легко получить:

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Поэтому

$$(1-\operatorname{tg} x)\left(1 + \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

Отсюда

$$\frac{(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)^2}{1+\operatorname{tg}^2 x} - (1+\operatorname{tg} x) = 0,$$

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\left\{1 - \operatorname{tg}^2 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x\right\} = 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0.$$

Для определения x имеем: $\operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$.

60. Имеем:

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{\sin (A+B)}{\cos A \cos B}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 4x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x}=$$
$$=\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x}\{\cos 2x \cos 3x+\cos x \cos 4x\}.$$

Но

$$\cos 3x=4 \cos^3 x-3 \cos x.$$

Итак, наше уравнение принимает вид:

$$\frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x}[\cos 2x(4 \cos^2 x-3)+\cos 4x]=0.$$

Отсюда

$$\frac{\sin 5x[4 \cos^2 2x-\cos 2x-1]}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x}=0.$$

Следовательно, либо $\sin 5x=0$, т. е. $5x=k\pi$, либо

$$4 \cos^2 2x-\cos 2x-1=0,$$

т. е.

$$8 \cos 2x=1 \pm \sqrt{17}.$$

61. Подставляя вместо x и y их выражения через X и Y в трехчлен

$$ax^2+2bxy+cy^2,$$

получим:

$$ax^2+2bxy+cy^2=a(X \cos \theta-Y \sin \theta)^2+$$
$$+2b(X \cos \theta-Y \sin \theta)(X \sin \theta+Y \cos \theta)+c(X \sin \theta+Y \cos \theta)^2=$$
$$=(a \cos^2 \theta+2b \cos \theta \sin \theta+c \sin^2 \theta) X^2+(a \sin^2 \theta-2b \sin \theta \cos \theta+$$
$$+c \cos^2 \theta) Y^2+(-2a \cos \theta \sin \theta+2c \cos \theta \sin \theta+2b \cos^2 \theta-2b \sin^2 \theta) XY.$$

Так как коэффициент при XY по условию должен равняться нулю, то для определения θ имеем следующее уравнение:

$$2b(\cos^2 \theta-\sin^2 \theta)-2(a-c) \sin \theta \cos \theta=0.$$

Иначе:

$$2b \cos 2\theta-(a-c) \sin 2\theta=0.$$

Итак:

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2b}{a-c}.$$

62. Легко видеть, что

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sin (2\theta+\alpha+\beta)}{\sin (\alpha-\beta)}.$$

Поэтому

$$\frac{x+y}{x-y} \sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z} \sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x} \sin^2(\gamma-\alpha)=$$
$$=\sin (2\theta+\alpha+\beta) \sin (\alpha-\beta)+\sin (2\theta+\beta+\gamma) \sin (\beta-\gamma)+$$
$$+\sin (2\theta+\gamma+\alpha) \sin (\gamma-\alpha).$$

Но

$$\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)\}.$$

Применяя круговую перестановку, легко проверим справедливость нашего тождества.

63. 1° Положим:

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin y}{b}=\frac{\sin z}{c}=k.$$

Тогда имеем:

$$\sin x=ak; \quad \sin y=bk; \quad \sin z=ck.$$

С другой стороны:

$$\sin z=\sin(\pi-x-y)=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Отсюда

$$a\cos y+b\cos x=c,$$
$$b\cos z+c\cos y=a,$$
$$c\cos x+a\cos z=b.$$

Решая эту систему, найдем:

$$\cos x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Прн $k=0$ получаем еще решения: $\sin x=\sin y=\sin z=0$.

2° Примем:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{a}=\frac{\operatorname{tg} y}{b}=\frac{\operatorname{tg} z}{c}=k.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x=ak; \quad \operatorname{tg} y=bk; \quad \operatorname{tg} z=ck.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем (см. задачу 40, § 2):

$$(a+b+c)k=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z.$$

Следовательно,

$$(a+b+c)k-k^3abc=0.$$

Итак:

$$k=0; \quad k=\pm\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}.$$

Отсюда имеем: либо $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} z=0$, либо

$$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)a}{bc}}; \quad \operatorname{tg} y=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)b}{ac}};$$
$$\operatorname{tg} z=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)c}{ab}}.$$

64. Имеем:

$$\operatorname{tg} 2b = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Но по условию:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a,$$

поэтому

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1-a) \operatorname{tg} 2b.$$

Зная же произведение и сумму тангенсов, легко найти и сами тангенсы (см. § 5, квадратные уравнения).

65. Преобразуем наше уравнение следующим образом:

$$4^x + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}},$$

$$4^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 3^{x-\frac{1}{2}}(1+3),$$

$$4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 4.$$

Отсюда

$$\frac{4^{x-1}}{2} = 3^{x-\frac{3}{2}},$$

$$2^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3}.$$

Итак:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = 1.$$

Следовательно:

$$2x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{3}{2}.$$

66. Логарифмируя обе части нашего уравнения, находим

$$(x+1) \lg x = 0.$$

Отсюда

$$x = 1.$$

67. Логарифмируя первое уравнение, находим

$$x \lg a + y \lg b = \lg m.$$

Остается только решить систему:

$$x \lg a + y \lg b = \lg m,$$
$$x + y = n.$$

68. Положим:

$$x = b^{\xi}; \quad y = a^{\eta}$$

(в этой задаче, как и в следующих, предполагается $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ и разыскиваются положительные решения).

Тогда (на основании первого уравнения):

$$b^{\xi y} = a^{\eta x}.$$

Но

$$b^y = a^x.$$

Следовательно:

$$b^{\xi y}=(b^y)^{\xi}=a^{x\xi}.$$

Отсюда

$$a^{x\xi}=a^{\eta x},$$

$$x(\xi-\eta)=0.$$

Итак, либо $x=0$, либо $\eta=\xi$. Но при $x=0$ получаем и $y=0$. Отбрасывая это решение, рассмотрим случай $\eta=\xi$.

Следовательно:

$$x=b^{\xi} \text{ и } y=a^{\xi}.$$

Но

$$x\lg a=y\lg b,$$

$$b^{\xi}\lg a=a^{\xi}\lg b;\quad \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi}=\frac{\lg b}{\lg a}.$$

Отсюда

$$\xi(\lg b-\lg a)=\lg\frac{\lg b}{\lg a},$$

$$\xi=\frac{\lg\frac{\lg b}{\lg a}}{\lg b-\lg a}.$$

Поэтому

$$x=b^{\xi}=\left(b^{\frac{\lg\frac{\lg b}{\lg a}}{\lg b}}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}}.$$

Так как отношение логарифмов двух чисел не зависит от выбора основания, то в выражении:

$$\frac{\lg\frac{\lg b}{\lg a}}{\lg b}$$

мы можем считать первые логарифмы взятыми при основании b. Тогда:

$$b^{\frac{\lg\frac{\lg b}{\lg a}}{\lg b}}=\frac{\lg b}{\lg a}$$

и

$$x=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}}.$$

Аналогично найдем:

$$y=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b-\lg a}}.$$

69. Логарифмируя второе равенство, найдем:

$$\frac{\lg x}{\lg a}=\frac{\lg y}{\lg b}.$$

Полагая это отношение равным ξ, получим:

$$x=a^{\xi};\quad y=b^{\xi}.$$

Подставляя эти значения для x и y в первое уравнение и предполагая, что $a\neq b^{\pm 1}$, найдем: $\xi=-1$. Итак:

$$x=\frac{1}{a},\quad y=\frac{1}{b}.$$

70. Имеем:

$$x=y^{\frac{x}{y}}.$$

Следовательно:

$$x^m=y^{\frac{mx}{y}}.$$

Пользуясь вторым уравнением, находим:

$$y^{\frac{mx}{y}}=y^n.$$

Отсюда следует либо $y=1$, и тогда и $x=1$; либо $\frac{mx}{y}=n$, т. е.

$$x=\frac{ny}{m}.$$

Подставляя во второе уравнение, имеем:

$$\left(\frac{ny}{m}\right)^m=y^n,$$

$$y^{m-n}=\left(\frac{m}{n}\right)^m.$$

Итак:

$$y=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}},$$

$$x=y^{\frac{x}{y}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}.$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Имеем:

$$x^2\frac{(b+x)(x+c)}{(x-b)(x-c)}=\frac{x^3(b+c+x)+xbcx}{(x-b)(x-c)}.$$

Поэтому левая часть нашего уравнения равна:

$$(b+c+x)\left[\frac{x^3}{(x-b)(x-c)}+\frac{b^3}{(b-x)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-x)(c-b)}\right]+$$
$$+bcx\left[\frac{x}{(x-b)(x-c)}+\frac{b}{(b-x)(b-c)}+\frac{c}{(c-x)(c-b)}\right].$$

Но (см. задачу 8, § 2):

$$\frac{x^2}{(x-b)(x-c)}+\frac{b^2}{(b-x)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-x)(c-b)}=b+c+x,$$

$$\frac{x}{(x-b)(x-c)}+\frac{b}{(b-x)(b-c)}+\frac{c}{(c-x)(c-b)}=0.$$

Поэтому уравнение принимает вид:

$$(b+c+x)^2=(b+c)^2.$$

Отсюда

$$(b+c+x)^2-(b+c)^2=0,$$

$$(b+c+x-b-c)(b+c+x+b+c)=0,$$

и, следовательно:

$$x_1=0; \quad x_2=-2(b+c).$$

2. Перепишем наше уравнение следующим образом:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)\left\{\frac{a^3}{(x-a)(c-a)(a-b)}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^3}{(x-b)(b-c)(a-b)}+\frac{c^3}{(x-a)(c-a)(b-c)}\right\}=0.$$

Но известно (см. задачу 9, § 2), что

$$\frac{a^3}{(a-x)(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-x)(b-a)(b-c)}+$$

$$+\frac{c^3}{(c-x)(c-a)(c-b)}+\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}=1.$$

Поэтому уравнение наше перепишется так:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)\left\{1-\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}\right\}=0,$$

или

$$(b-c)(c-a)(a-b)[(x-a)(x-b)(x-c)-x^3]=0.$$

Предполагая, что a, b, c не равны между собою, получим:

$$(a+b+c)x^2-(ab+ac+bc)x+abc=0,$$

$$x=\frac{ab+ac+bc\pm\sqrt{(ab+ac+bc)^2-4abc(a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

Для равенства корней необходимо и достаточно, чтобы

$$(ab+ac+bc)^2-4abc(a+b+c)=0.$$

Отсюда

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab=0,$$

$$(ab+ac-bc)^2-4a^2bc=0,$$

$$\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{4}{bc}=0.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-\frac{2}{\sqrt{bc}}\right)=0,$$

или

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-\frac{1}{a}\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-\frac{1}{a}\right]=0.$$

Наконец:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=0.$$

3. Перепишем наше уравнение в такой форме:

$$\frac{(a-x)^{\frac{3}{2}}+(x-b)^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}+(x-b)^{\frac{1}{2}}}=a-b.$$

Отсюда имеем:

$$a-x-(a-x)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}+x-b=a-b,$$

или

$$\sqrt{(a-x)(x-b)}=0.$$

Таким образом, искомые решения будут:

$$x_1=a; \quad x_2=b.$$

4. Имеем:

$$\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}=3\sqrt{a+b-2x}.$$

Возведя обе части равеиства в квадрат и произведя необходимые преобразоваиия, получим:

$$\sqrt{4a+b-5x}\cdot\sqrt{4b+a-5x}=2(a+b-2x).$$

Возведя еще раз в квадрат, найдем:

$$(4a+b)(4b+a)-5x(4a+b+4b+a)+25x^2=$$

$$=4(a^2+b^2+4x^2+2ab-4ax-4bx).$$

Отсюда

$$x^2-ax-bx+ab=0,$$

и, следовательно:

$$x_1=a; \quad x_2=b.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$\sqrt{b-a}+2\sqrt{b-a}-3\sqrt{b-a}=0,$$

$$2\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}-3\sqrt{a-b}=0.$$

Отсюда следует, что если $a \neq b$, то уравнение имеет два корня a и b (собственно говоря, если не считать известными действия с комплексными числами, корень будет только один).

5. Перепишем наше уравнение следующим образом:

$$(1+\lambda)x^2-(a+c+\lambda b+\lambda d)x+ac+\lambda bd=0.$$

Составим дискриминант этого уравнения $D(\lambda)$. Имеем:

$$D(\lambda)=(a+c+\lambda b+\lambda d)^2-4(1+\lambda)(ac+\lambda bd).$$

Преобразуя, получим:

$$D(\lambda)=\lambda^2(b-d)^2+2\lambda(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)+(a-c)^2.$$

Нужно доказать, что $D(\lambda)\geqq 0$ при любом λ. Так как $D(\lambda)$ есть трехчлен второй степени относительно λ и $D(0)=(a-c)^2>0$, то достаточно доказать, что корни этого трехчлена мнимые. Для того же, чтобы корни нашего трехчлена были мнимые, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$4(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)^2-4(a-c)^2(b-d)^2$$

было меньше нуля. Имеем:

$$4(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)^2-4(a-c)^2(b-d)^2=$$
$$=4(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac-ab+cb+ad-cd)(aq+ad+$$
$$+bc+dc-2bd-2ac+ab-cb-ad+cd)=-16(b-a)(d-c)(c-b)(d-a).$$

Это же последнее выражение, действительно, меньше нуля в силу поставленных условий:

$$a<b<c<d.$$

6. Исходное уравнение может быть переписано следующим образом:

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc=0.$$

Докажем, что

$$4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)\geqq 0.$$

Имеем:

$$4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)=4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$
$$=2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)=$$
$$=2\left\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)\right\}=$$
$$=2\left\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right\}\geqq 0.$$

7. Допустим, что корни обоих уравнений мнимы. Тогда:

$$p^2-4q<0,$$
$$p_1^2-4q_1<0.$$

Следовательно:

$$p^2+p_1^2-4q-4q_1<0,$$
$$p^2+p_1^2-2pp_1<0,$$
$$(p-p_1)^2<0,$$

что невозможно.

8. Данное уравнение перепишем так:

$$(a+b+c)x^2-2(ab+ac+bc)x+3abc=0.$$

Докажем, что его дискриминант больше или равен нулю.

Имеем:

$$4(ab+ac+bc)^2-12abc(a+b+c)=2\left\{(ab-ac)^2+(ab-bc)^2+(ac-bc)^2\right\}\geqq 0.$$

9. На основании свойств квадратного уравнения имеем:

$$p+q=-p,$$
$$pq=q.$$

Решаем эту систему. Из второго уравнения получаем:

$$q(p-1)=0.$$

Отсюда либо $q=0$, либо $p=1$. Из первого находим:

$$\text{если } q=0, \text{ то и } p=0;$$

$$\text{если } p=1, \text{ то } q=-2.$$

Итак, имеем два квадратных уравнения, удовлетворяющих поставленным требованиям:

$$x^2=0 \text{ и } x^2+x-2=0.$$

10. Имеем:

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right\}\geqq 0$$

(см. задачи 6, 8).

Однако, можно рассуждать и иначе. Расположим наше выражение по степеням x. Получаем:

$$x^2-(y+z)x+y^2+z^2-yz.$$

Для того чтобы доказать, что это выражение при всех значениях x будет больше или равно нулю, достаточно доказать (см. начало параграфа), во-первых, что

$$y^2+z^2-yz\geqq 0$$

и, во-вторых, что

$$(y+z)^2-4(y^2+z^2-yz)\leqq 0.$$

Легко видеть, что имеют место следующие тождества:

$$y^2+z^2-yz=\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}z^2,$$

$$(y+z)^2-4(y^2+z^2-yz)=-3(y-z)^2$$

и, следовательно, наше утверждение доказано.

11. Имеем:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{a^2}{3}=x^2+y^2+(a-x-y)^2-\frac{a^2}{3}.$$

Нужно доказать, что последнее выражение при всех значениях x и y будет больше или равно нулю. Расположим этот многочлен по степеням y. Получаем:

$$y^2+(x-a)y+x^2-ax+\frac{a^2}{3}.$$

Остается только доказать, что при всех значениях x

$$x^2-ax+\frac{a^2}{3}\geqq 0,$$

$$(x-a)^2-4\left(x^2-ax+\frac{a^2}{3}\right)\leqq 0.$$

Имеем:

$$x^2-ax+\frac{a^2}{3}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}a^2\geqq 0,$$

$$(x-a)^2-4\left(x^2-ax+\frac{a^2}{3}\right)=-3\left(x-\frac{1}{3}a\right)^2\leqq 0,$$

что и требовалось доказать. Однако, доказательство можно провести и несколько иначе. В самом деле, требуется доказать, что

$$3x^2+3y^2+3z^2 \geqq a^2,$$

если

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=a^2.$$

Следовательно, достаточно доказать:

$$3x^2+3y^2+3z^2 \geqq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$

или

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz \geqq 0.$$

Это же последнее неравенство нам известно (см., например, задачу 6).

12. См. предыдущую задачу.

13. На основании свойств квадратного уравнения можем написать:

$$\alpha+\beta=-p; \quad \alpha\beta=q.$$

Поэтому

$$s_1=-p.$$

Так как α и β — корни уравнения:

$$x^2+px+q=0,$$

то

$$\alpha^2+p\alpha+q=0,$$
$$\beta^2+p\beta+q=0.$$

Складывая эти два равенства почленно, найдем:

$$s_2+ps_1+2q=0.$$

Отсюда

$$s_2=-ps_1-2q=p^2-2q.$$

Умножим обе части нашего уравнения на x^k. Получим:

$$x^{k+2}+px^{k+1}+qx^k=0.$$

Подставляя сюда α и β и складывая, найдем:

$$s_{k+2}+ps_{k+1}+qs_k=0.$$

Полагая здесь $k=1$, будем иметь:

$$s_3=-ps_2-qs_1.$$

Далее:

$$s_3=-p(p^2-2q)+qp=3pq-p^3.$$

Совершенно так же найдем:

$$s_4=p^4-4p^2q+2q^2,$$
$$s_5=-p^5+5p^3q-5pq^2.$$

Чтобы получить s_{-1}, положим в нашей формуле $k=-1$. Имеем:

$$s_1+ps_0+qs_{-1}=0.$$

Но

$$s_0=2; \quad s_1=-p.$$

Поэтому

$$qs_{-1}=+p-2p=-p;$$

$$s_{-1}=-\frac{p}{q}.$$

Аналогично получим и s_{-2}, s_{-3}, s_{-4} и s_{-5}. Впрочем, можно поступить и так:

$$s_{-k}=\frac{1}{\alpha^k}+\frac{1}{\beta^k}=\frac{\alpha^k+\beta^k}{(\alpha\beta)^k}=\frac{s^k}{q^k}.$$

Откуда легко найдем все желательные для нас значения s_{-k}.

14. Пусть

$$\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=\omega.$$

Тогда:

$$\omega^4=\alpha+4\sqrt[4]{\alpha^3\beta}+6\sqrt[4]{\alpha^2\beta^2}+4\sqrt[4]{\alpha\beta^3}+\beta.$$

Но

$$\alpha+\beta=-p;\quad \alpha\beta=q.$$

Следовательно:

$$\omega^4=-p+6\sqrt{q}+4\sqrt[4]{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}).$$

Но

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=-p+2\sqrt{q},$$

поэтому

$$\omega=\sqrt[4]{-p+6\sqrt{q}+4\sqrt[4]{q}\cdot\sqrt{-p+2\sqrt{q}}}.$$

15. Пусть x есть общий корень данных уравнений. Умножая первое из равенств на A', а второе на A и вычитая их почленно, получим:

$$(AB'-A'B)\,x+AC'-A'C=0.$$

Точно так же, умножая первое на B' и второе на B и вычитая, найдем:

$$(AB'-A'B)\,x^2+BC'-B'C=0.$$

Возьмем значение для x из первого полученного равенства и подставим во второе.

Получим искомый результат.

16. Складывая все три уравнения почленно, найдем:

$$(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2.$$

Отсюда

$$x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Следовательно:

$$x=\frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad y=\frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad z=\frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

17. Легко видеть, что нашу систему можно переписать следующим образом:

$$(x+z)(x+y)=a,$$
$$(y+z)(y+x)=b,$$
$$(z+x)(z+y)=c.$$

Перемножая эти уравнения и извлекая корень квадратный из обеих частей полученного равенства, имеем:

$$(x+z)(x+y)(y+z)=\pm\sqrt{abc}.$$

Отсюда

$$y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a};\quad x+z=\frac{\pm\sqrt{abc}}{b};\quad x+y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}.$$

Складывая эти равенства почленно, найдем:

$$x+y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Но так как

$$y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a},$$

то

$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right).$$

Аналогично найдем:

$$y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right);\quad z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right),$$

причем нужно брать либо одновременно везде плюс, либо одновременно везде минус.

18. Положим:

$$y+x=\gamma;\quad x+z=\beta;\quad y+z=\alpha.$$

Тогда уравнения наши примут вид:

$$\gamma+\beta=a\gamma\beta,$$
$$\alpha+\gamma=b\alpha\gamma,$$
$$\beta+\alpha=c\alpha\beta.$$

Решив эту систему (см. § 4, задача 17), мы найдем решения и исходной системы:

$$x=y=z=0$$
$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p-a}\right),$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-b}\right),$$
$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-c}\right),$$

где

$$2p=a+b+c.$$

19. Прибавим к обеим частям наших равенств по единице. Получим:

$$1+y+z+yz=a+1,$$
$$1+x+z+xz=b+1,$$
$$1+x+y+xy=c+1$$

или

$$(1+y)(1+z)=a+1,$$
$$(1+x)(1+z)=b+1,$$
$$(1+y)(1+x)=c+1.$$

Перемножая эти равенства, получим:

$$(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2=(1+a)(1+b)(1+c)$$

или

$$(1+x)(1+y)(1+z)=\pm\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}.$$

Следовательно:

$$1+x=\pm\sqrt{\frac{(1+b)(1+c)}{1+a}};\quad 1+y=\pm\sqrt{\frac{(1+a)(1+c)}{1+b}};$$

$$1+z=\pm\sqrt{\frac{(1+a)(1+b)}{1+c}}.$$

20. Перемножим данные уравнения. Получаем:

$$(xyz)^2=abcxyz.$$

Прежде всего имеем очевидное решение: $x=y=z=0$. Далее:

$$xyz=abc.$$

Из исходных уравнений находим:

$$xyz=ax^2;\quad xyz=by^2,\quad xyz=cz^2.$$

Отсюда

$$ax^2=abc;\quad by^2=abc;\quad cz^2=abc;$$
$$x^2=bc;\quad y^2=ac;\quad z^2=ab.$$

Таким образом, мы имеем следующую систему решений:

$$\begin{aligned}
&x=\sqrt{bc}, && y=\sqrt{ac}, && z=\sqrt{ab};\\
&x=-\sqrt{bc}, && y=-\sqrt{ac}, && z=\sqrt{ab};\\
&x=\sqrt{bc}, && y=-\sqrt{ac}, && z=-\sqrt{ab};\\
&x=-\sqrt{bc}, && y=\sqrt{ac}, && z=-\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

21. Складывая первые два уравнения и вычитая третье, получим:

$$2x^2=(c+b-a)\,xyz.$$

Аналогично найдем:

$$2y^2=(c+a-b)\,xyz,$$
$$2z^2=(a+b-c)\,xyz.$$

Выделяя решение:

$$x=y=z=0.$$

имеем:

$$2x=(c+b-a)\,yz,$$
$$2y=(c+a-b)\,xz,$$
$$2z=(a+b-c)\,xy.$$

Далее решение аналогично решению предыдущей задачи.

22. Система приводится к виду:

$$xy+xz=a^2,$$
$$yz+yx=b^2,$$
$$zx+zy=c^2.$$

Складывая эти уравнения почленно, найдем:

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Принимая во внимание первые три уравнения, получим:

$$yz=\frac{b^2+c^2-a^2}{2};\quad zx=\frac{a^2+c^2-b^2}{2};\quad xy=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Перемножая эти три последние равенства, имеем:

$$(xyz)^2=\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8},$$

т. е.

$$xyz=\pm\sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}}.$$

Теперь легко находим:

$$x=\pm\sqrt{\frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8(b^2+c^2-a^2)}};$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{8(a^2+c^2-b^2)}};$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8(a^2+b^2-c^2)}}.$$

23. Складывая и вычитая почленно данные уравнения, найдем:

$$x^3+y^3=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y),$$
$$x^3-y^3=a(x-y)-b(x-y)=(a-b)(x-y).$$

Отсюда

$$(x+y)(x^2-xy+y^2-a-b)=0,$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2-a+b)=0.$$

Таким образом, придется рассмотреть следующие системы:

1° $x+y=0,\quad x-y=0;$
2° $x+y=0,\quad x^2+xy+y^2-a+b=0;$
3° $x-y=0,\quad x^2-xy+y^2-a-b=0;$
4° $x^2-xy+y^2-a-b=0;\quad x^2+xy+y^2-a+b=0.$

Первые три системы дают следующие решения:

1° $x=y=0;$
2° $x=\pm\sqrt{a-b};\quad y=\mp\sqrt{a-b};$
3° $x=y=\pm\sqrt{a+b}.$

Последняя же система приводится к следующей:

$$x^2+y^2=a;\quad xy=-b.$$

Решая ее, получаем:

$$x=\frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{a-2b}+\eta\sqrt{a+2b}),$$

$$y=\frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{a-2b}-\eta\sqrt{a+2b}),$$

где ε и η принимают значения ±1 независимо друг от друга. Таким образом, получаются еще четыре решения.

24. Преобразуем систему к следующему виду:

$$(x+y-z)(x+z-y)=a,$$
$$(y+z-x)(y+x-z)=b,$$
$$(x+z-y)(z+y-x)=c.$$

После умножения и извлечения корня квадратного имеем:

$$(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=\pm\sqrt{abc}.$$

Далее:

$$y+z-x=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}},$$

$$x+z-y=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}},$$

$$x+y-z=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Следовательно:

$$x=\pm\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right);\quad y=\pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right);$$

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}\right).$$

25. Положим:

$$\frac{x+y}{x+y+cxy}=\gamma;\qquad \frac{y+z}{y+z+ayz}=\alpha;\qquad \frac{x+z}{x+z+bxz}=\beta.$$

Тогда система примет вид:

$$b\gamma+c\beta=a;\quad c\alpha+a\gamma=b;\quad a\beta+b\alpha=c$$

или

$$\frac{\gamma}{c}+\frac{\beta}{b}=\frac{a}{bc};\quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\gamma}{c}=\frac{b}{ac};\quad \frac{\beta}{b}+\frac{\alpha}{a}=\frac{c}{ab}.$$

Поэтому

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=\frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$$

и, следовательно:

$$\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\qquad \beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\qquad \gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Далее:

$$\frac{x+y+cxy}{x+y}=\frac{1}{\gamma};\quad \frac{cxy}{x+y}=\frac{1}{\gamma}-1;\quad \frac{x+y}{cxy}=\frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Наконец:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{c\gamma}{1-\gamma}.$$

Аналогично находим:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{b\beta}{1-\beta},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a\alpha}{1-\alpha}.$$

Отсюда найдем x, y и z.

26. Умножаем первое, второе и третье уравнения соответственно на y, z и x. Получаем:

$$cx+ay+bz=0.$$

Равным образом, умножая эти уравнения на z, x и y, найдем:

$$bx+cy+az=0.$$

Из этих двух уравнений (см. задачу 35, § 4) имеем:

$$\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ac}=\frac{z}{c^2-ab}=\lambda,$$

т. е.

$$x=(a^2-bc)\lambda;\quad y=(b^2-ac)\lambda;\quad z=(c^2-ab)\lambda.$$

Подставляя эти значения для x, y и z в третье уравнение, найдем:

$$\lambda^2=\frac{c}{(c^2-ab)^2-(a^2-bc)(b^2-ac)}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3-3abc}.$$

Теперь легко найти x, y и z.

27. Нашу систему перепишем следующим образом:

$$(y^2-xz)+(z^2-xy)=a,$$
$$(x^2-yz)+(z^2-xy)=b,$$
$$(x^2-zy)+(y^2-zx)=c.$$

Отсюда

$$x^2-yz=\frac{b+c-a}{2};\quad y^2-xz=\frac{a+c-b}{2};\quad z^2-xy=\frac{a+b-c}{2},$$

т. е. получаем систему предыдущей задачи.

28. Вычитая почленно наши уравнения, имеем:

$$(x-y)(x+y+z)=b^2-a^2,$$
$$(x-z)(x+y+z)=c^2-a^2.$$

Положим: $x+y+z=t$, тогда

$$(x-y)t=b^2-a^2,$$
$$(x-z)t=c^2-a^2.$$

Складывая почленно эти два уравнения, имеем:

$$[3x-(x+y+z)]t=b^2+c^2-2a^2.$$

Отсюда

$$x=\frac{t^2+b^2+c^2-2a^2}{3t}.$$

Аналогично:

$$y=\frac{t^2+a^2+c^2-2b^2}{3t},$$
$$z=\frac{t^2+a^2+b^2-2c^2}{3t}.$$

Подставляя эти значения x, y и z в одно из уравнений, найдем:

$$t^4-(a^2+b^2+c^2)t^2+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0.$$

Отсюда

$$t^2=\frac{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2}.$$

По найденному значению t получаем и значения x, y и z.

29. Имеем следующие тождества:

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+xz+yz),$$
$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz.$$

Принимая во внимание второе и третье уравнения нашей системы, из первого тождества получаем:

$$xy+xz+yz=0.$$

Из второго тождества имеем:

$$xyz=0.$$

Таким образом, получаем следующие решения нашей системы:

$$x=0;\quad y=0;\quad z=a;$$
$$x=0;\quad y=a;\quad z=0;$$
$$x=a;\quad y=0;\quad z=0.$$

30. Пусть x, y, z и u являются корнями следующего уравнения четвертой степени:

$$\alpha^4-p\alpha^3+q\alpha^2-r\alpha+t=0. \qquad (*)$$

Положим

$$x^k+y^k+z^k+u^k=s_k.$$

Тогда:

$$s_4-ps_3+qs_2-rs_1+t=0.$$

Но по условию:

$$s_4=a^4;\quad s_3=a^3;\quad s_2=a^2;\quad s_1=a.$$

Поэтому должно иметь место тождество:

$$a^4-pa^3+qa^2-ra+t=0,$$

т. е. уравнение (*) имеет корень $\alpha=a$, а потому одно из неизвестных, например x, равно a.

Тогда должны иметь место равенства:

$$u+y+z=0;\quad u^2+y^2+z^2=0;\quad u^3+y^3+z^3=0,$$

и следовательно (на основании результатов последней задачи):

$$u=y=z=0.$$

Итак, данная система имеет следующие решения:

$$x=a;\quad u=y=z=0,$$
$$y=a;\quad x=u=z=0,$$
$$z=a;\quad x=y=u=0,$$
$$u=a;\quad x=y=z=0.$$

31. Эквивалентность этих систем вытекает из следующего тождества:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2-1)^2+(a'^2+b'^2+c'^2-1)^2+(a''^2+b''^2+c''^2-1)^2+\\+2(aa'+bb'+cc')^2+2(aa''+bb''+cc'')^2+2(a'a''+b'b''+c'c'')^2=\\=(a^2+a'^2+a''^2-1)^2+(b^2+b'^2+b''^2-1)^2+(c^2+c'^2+c''^2-1)^2+\\+2(ab+a'b'+a''b'')^2+2(ac+a'c'+a''c'')^2+2(bc+b'c'+b''c'')^2.\end{aligned}$$

Отметим, что девять коэффициентов a, a', a'', b, b', b'', c, c' и c'' могут быть (как это установлено Эйлером) выражены через три независимые

величины p, q и r следующим образом:

$$a=\frac{1+p^2-q^2-r^2}{N}; \qquad b=\frac{2(r+pq)}{N}; \qquad c=\frac{2(-q+pr)}{N},$$

$$a'=\frac{2(-r+pq)}{N}; \qquad b'=\frac{1-p^2+q^2-r^2}{N}; \qquad c'=\frac{2(p+qr)}{N}.$$

$$a''=\frac{2(q+pr)}{N}; \qquad b''=\frac{2(-p+rq)}{N}; \qquad c''=\frac{1-p^2-q^2+r^2}{N}$$

$$(N=1+p^2+q^2+r^2).$$

32. Перемножая первые три равенства, получаем:

$$x^2y^2z^2(y+z)(x+z)(x+y)=a^3b^3c^3.$$

Пользуясь четвертым равенством, имеем:

$$(y+z)(x+z)(x+y)=abc$$

или

$$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+2xyz=abc.$$

Но, складывая первые три равенства, находим:

$$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=a^3+b^3+c^3.$$

Итак, окончательно:

$$a^3+b^3+c^3+abc=0.$$

33. Складывая данные три равенства, получаем:

$$a+b+c=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{xyz}.$$

Равным образом имеем:

$$a-b-c=\frac{(y-z)(z+x)(x+y)}{xyz},$$

$$b-c-a=\frac{(z-x)(x+y)(y+z)}{xyz},$$

$$c-a-b=\frac{(x-y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Отсюда

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=$$

$$=-\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^2\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)^2\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2=-a^2b^2c^2.$$

Отсюда окончательно получаем результат исключения:

$$2b^2c^2+2b^2a^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4+a^2b^2c^2=0.$$

34. Имеем:

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=2a; \qquad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=2b; \qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2c.$$

Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получаем:

$$\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+6=4a^2+4b^2+4c^2.$$

С другой стороны, если перемножить эти равенства, то найдем:

$$\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2=8abc.$$

Следовательно, результат исключения x, y и z из данной системы будет:

$$a^2+b^2+c^2-2abc=1.$$

35. Имеем тождество:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2.$$

Подставляя в правую часть вместо a^2, b^2 и c^2 их выражения через x, y и z и пользуясь соотношением

$$xy+xz+yz=0,$$

получим:

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=0.$$

Итак, действительно результат исключения x, y и z из данной системы будет:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=0.$$

36. Имеем:

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3+\frac{3}{2}(x+y)[(x+y)^2-(x^2+y^2)].$$

Итак:

$$(x+y)^3=3(x+y)(x^2+y^2)-2(x^3+y^3).$$

Но

$$x+y=a;\quad x^2+y^2=b;\quad x^3+y^3=c.$$

Следовательно, результат исключения будет:

$$a^3=3ab-2c.$$

37. Положим:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}.$$

Тогда:

$$a=x\lambda;\quad b=y\lambda;\quad c=z\lambda. \qquad (*)$$

С другой стороны, имеем:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Так как $a+b+c=1$; $a^2+b^2+c^2=1$, то из последнего равенства получаем:

$$ab+ac+bc=0.$$

Принимая же во внимание равенства (*), найдем:

$$xy+xz+yz=0.$$

38. Имеем:

$$\left(\alpha-\frac{z}{x}\right)\left(\alpha-\frac{x}{y}\right)\left(\alpha-\frac{y}{z}\right)=\gamma$$

или

$$\alpha^3-\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\alpha^2+\left(\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}\right)\alpha-1=\gamma.$$

Отсюда

$$\alpha\beta-1=\gamma.$$

39. Из первых двух равенств находим:

$$\left.\begin{aligned} z(d-c)+x(d-a)+y(d-b)=0,\\ w(d-c)+x(a-c)+y(b-c)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Умножая первое из этих равенств на y, а второе на x и складывая, получим:

$$(zy+wx)(d-c)=x^2(c-a)+y^2(b-d)+xy(a+c-b-d).$$

Так же найдем, что

$$(zx+wy)(d-c)=x^2(a-d)+y^2(c-b)+xy(b+c-a-d),$$

$$zw(d-c)^2=x^2(a-d)(c-a)+y^2(b-d)(c-b)+$$
$$+xy[(a-d)(c-b)+(b-d)(c-a)].$$

Подставляя найденные таким образом выражения для $zy+wx$, $zx+wy$ и zw в третье равенство, получаем:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0,$$

где

$$A=(c-a)(a-d)^2(b-c)^2+(c-d)(b-d)^2(c-a)^2+(a-d)(c-a)(d-c)(a-b)^2,$$
$$C=(b-d)(a-d)^2(b-c)^2+(c-b)(b-d)^2(c-a)^2+(b-d)(c-b)(d-c)(a-b)^2,$$
$$2B=(a+c-b-d)(a-d)^2(b-c)^2+(b+c-a-d)(b-d)^2(c-a)^2+$$
$$+(d-c)^3(a-b)^2+[(a-d)(c-b)+(b-d)(c-a)](d-c)(a-b)^2.$$

Сделав необходимые преобразования (для упрощения выкладок можно пользоваться результатом задачи 8, § 2), найдем:

$$A=(a-d)^2(c-a)^2(c-d);$$
$$B=(d-c)(a-d)(b-c)(a-c)(d-b);$$
$$C=(c-b)^2(b-d)^2(c-d).$$

Поэтому имеем:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=(c-d)[(a-d)(a-c)x-(b-c)(d-b)y]^2=0.$$

Отсюда

$$\frac{x}{(b-c)(d-b)}=\frac{y}{(a-d)(a-c)}.$$

Подставляя эти значения в равенство (*), получим искомую пропорцию.

40. 1° Имеем:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)=\frac{3}{2}$$

или

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+1=0.$$

Отсюда

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\sqrt{16\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-16}}{8}.$$

Так как подкоренное выражение равно $-16\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, а $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ веществен, то $-16\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ должно быть больше или равно нулю. Но быть больше нуля это выражение не может. Поэтому имеем:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Но так как $0<\alpha<\pi$ и $0<\beta<\pi$, то $\alpha=\beta$ и, следовательно:

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

и

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

2° Аналогично 1°.

41. По условию:

$$2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=a,$$
$$2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=b.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\theta+\varphi}{2}=\frac{b}{a}.$$

Но

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\qquad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому

$$\cos(\theta+\varphi)=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\sin(\theta+\varphi)=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

42. По условию имеем:

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=c,$$
$$a\cos\beta+b\sin\beta=c.$$

Складывая эти два равенства почленно, найдем:

$$2a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2c.$$

Отсюда

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c}{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(a+b\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Вычитая же данные равенства почленно, получим:

$$-2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2b\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

Так как α и β — различные решения уравнения, то $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$. Последнее равенство, следовательно, дает:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}.$$

Вернемся к вычислению $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$. Имеем:

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\left(a+b\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}=c^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{1}{\left(a+b\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

43. Перепишем данные равенства следующим образом:

$$\sin\theta\,(b\cos\alpha-a\cos\beta)=\cos\theta\,(b\sin\alpha-a\sin\beta),$$
$$\sin\theta\,(d\sin\alpha-c\sin\beta)=\cos\theta\,(c\cos\beta-d\cos\alpha).$$

Исключая отсюда θ, найдем:

$$(b\cos\alpha-a\cos\beta)(c\cos\beta-d\cos\alpha)=(b\sin\alpha-a\sin\beta)(d\sin\alpha-c\sin\beta).$$

Отсюда

$$bc\cos\alpha\cos\beta-ac\cos^2\beta-bd\cos^2\alpha+ad\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=bd\sin^2\alpha-ad\sin\alpha\sin\beta-bc\sin\alpha\sin\beta+ac\sin^2\beta,$$

или

$$(bc+ad)\cos\alpha\cos\beta+(bc+ad)\sin\alpha\sin\beta=bd+ac.$$

Наконец:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{bd+ac}{bc+ad}.$$

44. 1° Имеем:

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{1+2e\cos\beta+e^2}{e^2-1}=\frac{2e^2+2e\cos\beta}{2e^2+2e\cos\alpha}=\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}$$

(пользуясь тем свойством пропорций, что из равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следует $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$).

Аналогично имеем:

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{1+2e\cos\beta+e^2}{e^2-1}=\frac{-2-2e\cos\beta}{2+2e\cos\alpha}=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}.$$

Далее:

$$\left(\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}\right)^2=\frac{(1+e\cos\beta)^2}{(1+e\cos\alpha)^2}=\frac{e^2+\cos^2\beta-1-e^2\cos^2\beta}{e^2+\cos^2\alpha-1-e^2\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

Следовательно, действительно:

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}=\pm\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

2° Из данного равенства следует (см. результат 1°):

$$\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}.$$

Следовательно:

$$\frac{e+\cos\beta-1-e\cos\beta}{e+\cos\alpha+1+e\cos\alpha}=\frac{e+\cos\beta+1+e\cos\beta}{e+\cos\alpha-1-e\cos\alpha}$$

(из равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следует: $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$).

Далее:

$$\frac{(1-e)(1-\cos\beta)}{(1+e)(1+\cos\alpha)}=\frac{(1+e)(1+\cos\beta)}{(1-e)(1-\cos\alpha)}$$

или

$$(1-\cos\beta)(1-\cos\alpha)=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha).$$

Наконец:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\frac{1+e}{1-e}.$$

45. Решая данное уравнение относительно $\cos x$, найдем:

$$\cos x(\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\beta)=\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\alpha-\cos^2\beta.$$

Но

$$\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\beta=\cos\alpha(1-\cos^2\beta)-\cos\beta(1-\cos^2\alpha)=$$
$$=\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha-\cos\beta)=$$
$$=(\cos\alpha-\cos\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta)$$

поэтому

$$\cos x=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$$

Далее:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}=$$
$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

и, следовательно:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

46. Имеем:

$$\sin^2\alpha=4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}=(1-\cos\varphi)(1-\cos\theta)=\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right).$$

Отсюда

$$1-\cos^2\alpha=1-\cos\alpha\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta\cos\gamma},$$

т. е.

$$\cos^2\alpha\left(1+\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}\right)=\cos\alpha\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Предполагая, что $\cos\alpha$ не равно нулю, найдем:

$$\cos\alpha=\frac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}.$$

Теперь легко проверить, что

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

47. Положим $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=\beta$. Тогда два первых равенства примут вид:

$$x\alpha^2-2y\alpha+2a-x=0,$$
$$x\beta^2-2y\beta+2a-x=0.$$

Следовательно, α и β суть корни квадратного уравнения:

$$xz^2-2yz+2a-x=0.$$

Поэтому

$$\alpha+\beta=\frac{2y}{x}; \quad \alpha\beta=\frac{2a-x}{x}.$$

Но, кроме того:

$$\alpha-\beta=2l.$$

Остается из этих трех последних равенств исключить α и β. Имеем тождественно:

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta.$$

Следовательно:

$$\left(\frac{2y}{x}\right)^2=4l^2+4\,\frac{2a-x}{x}.$$

После упрощений, действительно, получаем:

$$y^2=2ax-(1-l^2)x^2.$$

48. Из первых двух равенств видим, что θ и φ суть корни уравнения:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-2a=0 \qquad (\text{неизвестная } \alpha).$$

Ясно, что θ и φ будут точно так же корнями уравнения:

$$(2a-x\cos\alpha)^2=y^2\sin^2\alpha.$$

Преобразуем это последнее уравнение следующим образом:

$$x^2\cos^2\alpha-4ax\cos\alpha+4a^2=y^2(1-\cos^2\alpha),$$
$$(x^2+y^2)\cos^2\alpha-4ax\cos\alpha+4a^2-y^2=0.$$

Поэтому величины $\cos\theta$ и $\cos\varphi$ будут корнями следующего уравнения:

$$(x^2+y^2)z^2-4axz+4a^2-y^2=0,$$

а потому

$$\cos\theta\cos\varphi=\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}; \quad \cos\theta+\cos\varphi=\frac{4ax}{x^2+y^2}.$$

Далее имеем:

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}=4\,\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{2}=1$$

или

$$1-(\cos\theta+\cos\varphi)+\cos\theta\cos\varphi=1.$$

Отсюда и следует, что

$$y^2=4a(a-x).$$

49. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Но

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta};\quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Следовательно:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta+\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1-\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

50. Имеем:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{\cos x+\cos(x+2\theta)}{\cos(x+\theta)+\cos(x+3\theta)}=\frac{\cos(x+\theta)\cos\theta}{\cos(x+2\theta)\cos\theta}=\frac{b}{c}.$$

Отсюда

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}.$$

51. Имеем:

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha};\qquad 1+\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Отсюда

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta-\cos\gamma}.$$

С другой стороны, нам дано, что

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Из этого равенства получаем:

$$\cos\beta=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\gamma-\cos^2\gamma\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\gamma-\sin^2\alpha\cos\gamma}=\frac{\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\gamma-\sin^2\alpha\cos\gamma}.$$

Но

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\sin^2\gamma-\sin^2\alpha\cos\gamma-\sin^2\gamma+\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\gamma-\sin^2\alpha\cos\gamma+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos\gamma)-\sin^2\gamma(1-\cos\alpha)}{\sin^2\gamma(1+\cos\alpha)-\sin^2\alpha(1+\cos\gamma)}=$$

$$=\frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}-8\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{8\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2},$$

так как

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\gamma}{2}=\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

52. Положим:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=x;\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=y.$$

Тогда:

$$\cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos\alpha\cos\beta;\qquad \cos\varphi=\frac{1-y^2}{1+y^2}=\cos\alpha_1\cdot\cos\beta.$$

Далее:

$$x^2=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta};\qquad y^2=\frac{1-\cos\alpha_1\cdot\cos\beta}{1+\cos\alpha_1\cdot\cos\beta},$$

поэтому

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=x^2y^2=\frac{(1-\cos\alpha\cos\beta)(1-\cos\alpha_1\cos\beta)}{(1+\cos\alpha\cos\beta)(1+\cos\alpha_1\cos\beta)}.$$

Прибавим к обеим частям равенства по единице. Находим:

$$\frac{2}{1+\cos\beta}=\frac{2(1+\cos\alpha\cos\alpha_1\cos^2\beta)}{(1+\cos\alpha\cos\beta)(1+\cos\alpha_1\cos\beta)}.$$

Предполагая $\cos\beta\neq 0$, получаем:

$$\cos\alpha+\cos\alpha_1=1+\cos\alpha\cos\alpha_1\cos^2\beta,$$

т. е.

$$\cos\alpha+\cos\alpha_1=1+\cos\alpha\cos\alpha_1(1-\sin^2\beta);$$

$$\cos\alpha\cos\alpha_1\sin^2\beta=1+\cos\alpha\cos\alpha_1-\cos\alpha-\cos\alpha_1=(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha_1),$$

и, следовательно, действительно:

$$\sin^2\beta=\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha_1}-1\right).$$

53. Имеем:

$$\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\beta+\gamma)}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\beta-\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)}=x.$$

Отсюда

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}+\beta\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\gamma\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\gamma+\beta}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\gamma+\beta}{2}+\alpha\right)}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Но из равенств

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{a'-b'}{a'+b'}=\frac{a''-b''}{a''+b''}$$

следует:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

54. Из первого равенства имеем:

$$\frac{(\operatorname{tg}\theta\cos\beta-\sin\beta)\cos\alpha}{(\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)\cos\beta}+\frac{(\cos\alpha-\operatorname{tg}\theta\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\beta+\operatorname{tg}\varphi\sin\beta)\sin\alpha}=0.$$

Отсюда

$$\sin\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\varphi=$$
$$=2\sin\beta\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha. \quad (*)$$

Из второго равенства получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}=-\frac{\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha}.$$

Поэтому можно положить:

$$\operatorname{tg}\theta=\lambda\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta; \qquad \operatorname{tg}\varphi=-\lambda\cos(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha.$$

Подставляя эти значения для $\operatorname{tg}\theta$ и $\operatorname{tg}\varphi$ в равенство (*), найдем:

$$\lambda=\frac{1}{2\sin\alpha\sin\beta}.$$

Итак:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cos\beta}=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta),$$
$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta).$$

55. Имеем:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2(\alpha-\beta).$$

Поэтому

$$\sin(\alpha-\beta)=\pm n\sin(\alpha+\beta),$$
$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\pm n(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta),$$
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\pm n(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta).$$

Окончательно:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\operatorname{tg}\beta.$$

56. Развернем данные равенства. Получаем:

$$\cos\alpha\cos3\theta+\sin\alpha\sin3\theta=m\cos^3\theta,$$
$$\sin\alpha\cos3\theta-\cos\alpha\sin3\theta=m\sin^3\theta.$$

Умножая первое из этих равенств на $\cos 3\theta$, второе на $-\sin 3\theta$ и складывая почленно, находим:

$$\cos\alpha = m\left\{\cos^3\theta\cos 3\theta - \sin^3\theta\sin 3\theta\right\}.$$

Но известно, что

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Следовательно:

$$\cos^3\theta\cos 3\theta - \sin^3\theta\sin 3\theta = 4(\cos^6\theta + \sin^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta).$$

Но, возводя исходные равенства в квадрат и складывая, получаем:

$$\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{m^2}.$$

Вычислим $\cos^4\theta + \sin^4\theta$. Имеем:

$$\cos^6\theta + \sin^6\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^4\theta + \sin^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta) =$$
$$= \cos^4\theta + \sin^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta.$$

Поэтому

$$\frac{1}{m^2} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta; \qquad 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{m^2};$$

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{m^2}\right).$$

Итак:

$$\cos\alpha = m\left\{4(\cos^6\theta + \sin^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\right\} = m\left\{\frac{4}{m^2} - 1 - \frac{2}{m^2}\right\} = \frac{2-m^2}{m},$$

т. е.

$$m^2 + m\cos\alpha = 2.$$

57. Из первого равенства получаем:

$$a[\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi)] = b[\sin(\theta-\varphi) + \sin(\theta+\varphi)].$$

Отсюда

$$a\,\mathrm{tg}\,\varphi = b\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Следовательно:

$$\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

Но из второго равенства имеем:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c}{a},$$

поэтому

$$\frac{a}{b}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\left(b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\right)}{a\left[1 - \frac{\left(b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\right)^2}{a^2}\right]}.$$

Полагая для краткости $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=x$ и преобразуя наше последнее равенство, найдем:

$$bc(1+x^2)=-(b^2+c^2-a^2)x.$$

Но

$$\frac{2x}{1+x^2}=\sin\varphi.$$

Окончательно:

$$\sin\varphi=\frac{2bc}{a^2-b^2-c^2}.$$

58. Из третьего равенства получаем:

$$\sin^2\theta\sin^2\varphi=(\cos\theta\cos\varphi-\sin\beta\sin\gamma)^2.$$

Пользуясь первыми двумя равенствами, находим:

$$\left(1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\left(1-\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\right)=\left(\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}-\sin\beta\sin\gamma\right)^2.$$

Произведя необходимые преобразования, действительно получаем, что из этого равенства вытекает:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\beta.$$

59. Имеем:

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=1; \qquad a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1.$$

Отсюда

$$a\operatorname{tg}^2\theta+b=1+\operatorname{tg}^2\theta,$$
$$b\operatorname{tg}^2\varphi+a=1+\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Следовательно:

$$(a-1)\operatorname{tg}^2\theta=1-b;$$
$$(b-1)\operatorname{tg}^2\varphi=1-a;$$
$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

С другой стороны:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Из этих двух последних равенств получаем (предполагая, что a не равно b):

$$a+b-2ab=0.$$

60. Перепишем первые два равенства следующим образом:

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=a,$$
$$\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta=b.$$

Умножая сначала первое из этих равенств на $\sin\beta$, а второе на $\cos\alpha$, а затем первое на $\cos\beta$, а второе на $-\sin\alpha$ и складывая, найдем:

$$\sin\theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha.$$
$$\cos\theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha.$$

Возводя эти два последние равенства в квадрат и складывая, получим:

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2.$$

61. Так как

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x,$$
$$\sin 3x = -\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x,$$

то уравнение принимает вид:

$$(\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x) \cos^3 x + (-\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x) \sin^3 x = 0,$$
$$\cos^6 x - 3 \cos^4 x \sin^2 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x - \sin^6 x = 0$$

или

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^3 = 0,$$
$$\cos 2x = 0.$$

62. Так как

$$\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2,$$

то имеем:

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0.$$

Отсюда

$$(\sin x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0$$

или

$$\cos x (1 + \operatorname{tg} x)(1 + 2 \cos x) = 0.$$

Итак:

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

дают искомые решения нашего уравнения.

63. Имеем:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{(\cos^3 x - \sin^3 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x (1 - \sin x)} = 0,$$

или

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 - \cos x) = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x = 1.$$

64. Имеем:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Поэтому

$$\cos 6x = 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x.$$

С другой стороны:

$$\cos^6 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3.$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$4 (1 + \cos 2x)^3 - (4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x) = 1$$

или

$$4 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0.$$

Итак:

$$\cos 2x = -1; \qquad \cos 2x = -\frac{1}{4}.$$

65. Имеем:

$$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin 2x - m \sin x = 0.$$

Отсюда

$$\sin x\,[2\cos^2 x+\cos 2x+2\cos x-m]=0,$$
$$\sin x\,[4\cos^2 x+2\cos x-(m+1)]=0.$$

Итак, одно решение:

$$\sin x=0.$$

Другое получается по формуле:

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{4m+5}}{4}.$$

Отсюда, прежде всего, следует, что должно быть

$$4m+5\geqq 0.$$

Далее, для существования одного из корней требуется, чтобы было

$$|-1+\sqrt{4m+5}\,|\leqq 4,$$

т. е. чтобы

$$-4\leqq -1+\sqrt{4m+5}\leqq +4$$

или

$$-3\leqq \sqrt{4m+5}\leqq 5,$$

т. е.

$$m\leqq 5.$$

Для существования другого корня необходимо:

$$|-1-\sqrt{4m+5}\,|\leqq 4,$$
$$-4\leqq -1-\sqrt{4m+5}\leqq 4,$$
$$m\leqq 1.$$

Итак, если $m<-\frac{5}{4}$, то $\cos x$ не имеет вещественных значений; при $m=-\frac{5}{4}$ $\cos x$ имеет одно вещественное значение $\left(\cos x=-\frac{1}{4}\right)$; при $-\frac{5}{4}<m\leqq 1$ $\cos x$ имеет два вещественных значения $\left(\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{4m+5}}{4}\right)$ и при $1<m\leqq 5$ $\cos x$ имеет опять одно вещественное значение $\left(\cos x=\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}\right)$ и при $m>5$ вещественных значений не имеет.

66. Перепишем наше уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{\cos(x-\alpha)}\left\{(1+k)\cos x\cos(2x-\alpha)-(1+k\cos 2x)\cos(x-\alpha)\right\}=0.$$

Но

$$\cos x\cos(2x-\alpha)=\frac{1}{2}\cos(3x-\alpha)+\frac{1}{2}\cos(x-\alpha),$$
$$\cos 2x\cos(x-\alpha)=\frac{1}{2}\cos(3x-\alpha)+\frac{1}{2}\cos(x+\alpha).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\cos(x-\alpha)}\left\{(1+k)\,[\cos(3x-\alpha)+\cos(x-\alpha)]-2\cos(x-\alpha)-\right.$$
$$\left.-k\,[\cos(3x-\alpha)+\cos(x+\alpha)]\right\}=0$$

или

$$\frac{1}{\cos(x-\alpha)}\{\cos(3x-\alpha)-\cos(x-\alpha)+k[\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)]\}=0,$$

$$\frac{\sin x}{\cos(x-\alpha)}\{k\sin\alpha-\sin(2x-\alpha)\}=0.$$

Отсюда

$$\sin x=0 \quad \text{и} \quad \sin(2x-\alpha)=k\sin\alpha.$$

67. Так как

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

то

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1$$

и

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}(\sin 2x)^2.$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$\sin^2 2x-8\sin 2x+4=0.$$

Отсюда:

$$\sin 2x=4\pm\sqrt{16-4},$$
$$\sin 2x=4\pm 2\sqrt{3}.$$

Отбрасывая одно из решений, получаем окончательно:

$$\sin 2x=4-2\sqrt{3}.$$

68. Имеем:

$$\lg_x a=\frac{1}{\lg_a x}; \quad \lg_{ax} a=\frac{1}{\lg_a ax}; \quad \lg_{a^2x} a=\frac{1}{\lg_a a^2x}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\frac{2}{\lg_a x}+\frac{1}{\lg_a x+1}+\frac{3}{\lg_a x+2}=0.$$

Положим:

$$\lg_a x=z.$$

Остается только решить следующее уравнение:

$$\frac{2}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{3}{z+2}=0.$$

Отсюда

$$\frac{6z^2+11z+4}{z(z+1)(z+2)}=0.$$

Искомые корни будут:

$$z_1=-\frac{4}{3}; \quad z_2=-\frac{1}{2}.$$

Итак:

$$x_1=a^{-\frac{4}{3}}; \quad x_2=a^{-\frac{1}{2}}.$$

69. Имеем:

$$x=y^{\frac{a}{x+y}}.$$

Отсюда

$$y^{x+y}=y^{\frac{4a^2}{x+y}}.$$

Следовательно, либо $y=1$, либо $x+y=\frac{4a^2}{x+y}$. Но при $y=1$ $x^{4a}=1$ и, следовательно, $x=1$. Итак, одно решение:

$$x=1, \quad y=1.$$

Переходим к нахождению второго решения. Имеем:

$$(x+y)^2=4a^2,$$

т. е.

$$x+y=2a.$$

Поэтому

$$x^{2a}=y^a; \ \left(\frac{x^2}{y}\right)^a=1,$$

и, следовательно:

$$x^2=y,$$

т. е.

$$x^2=2a-x.$$

Из этого квадратного уравнения находим:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2a}.$$

Положительное решение будет:

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a}.$$

Соответствующее значение y найдется по формуле:

$$y=x^2.$$

70. Возведем первое из уравнений в степень q, а второе в степень p, получаем:

$$u^{pq}v^{q^2}=a^{xq},$$
$$u^{pq}v^{p^2}=a^{yp}.$$

Деля одно из этих равенств на другое почленно, находим:

$$v^{q^2-p^2}=a^{xq-yp},$$

и, следовательно,

$$v=a^{\frac{py-qx}{p^2-q^2}}.$$

Аналогично найдем:

$$u=a^{\frac{xp-yq}{p^2-q^2}}. \qquad (*)$$

Подставляя эти значения для u и v в третье и четвертое уравнения, имеем:

$$a^{p(x^2+y^2)-2xyq}=b^{p^2-q^2},$$
$$a^{2xyp-q(x^2+y^2)}=c^{p^2-q^2}.$$

Отсюда

$$p(x^2+y^2)-2xyq=(p^2-q^2)\lg_a b,$$
$$2xyp-q(x^2+y^2)=(p^2-q^2)\lg_a c.$$

Следовательно:

$$x^2+y^2=p\lg_a b+q\lg_a c,$$
$$2xy=q\lg_a b+p\lg_a c.$$

Отсюда находим x и y. По найденным значениям x и y формулы (*) дают возможность получить u и v.

§ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОЛИНОМЫ

1. Пусть $x=\alpha+\beta i$; $y=\gamma+\delta i$. Тогда:

$$x+y=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i,$$
$$x-y=\alpha-\gamma+(\beta-\delta)i,$$
$$|x+y|^2+|x-y|^2=(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2=$$
$$=2(\alpha^2+\beta^2)+2(\gamma^2+\delta^2)=2\{|x|^2+|y|^2\}.$$

2. Пусть $x=\alpha+\beta i$, следовательно, $\bar{x}=\alpha-\beta i$.

1° Из условий задачи имеем:

$$\alpha-\beta i=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i.$$

Отсюда

$$\alpha=\alpha^2-\beta^2;\quad -\beta=2\alpha\beta.$$

Поэтому

$$\beta(2\alpha+1)=0;\quad \alpha=\alpha^2-\beta^2.$$

Допустим сначала $\beta=0$; $\alpha=\alpha^2$ или $\alpha(\alpha-1)=0$. Итак, прежде всего имеем решения:

$$\alpha=0;\quad \beta=0;\quad x=0;$$
$$\alpha=1;\quad \beta=0;\quad x=1.$$

Перейдем теперь к тому случаю, когда $2\alpha+1=0$, т. е.

$$\alpha=-\frac{1}{2};\quad -\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\beta^2;\quad \beta^2=\frac{3}{4};\quad \beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, существуют четыре комплексных значения x, удовлетворяющих условию:

$$\bar{x}=x^2,$$

именно:

$$x=0;\quad x=1;\quad x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2° Перейдем к решению следующей системы:

$$\alpha(\alpha^2-3\beta^2-1)=0;\quad \beta(3\alpha^2-\beta^2+1)=0.$$

Отсюда найдем решения:

$$\alpha=0;\qquad \beta=0;$$
$$\alpha=0;\qquad \beta=\pm 1;$$
$$\alpha=\pm 1;\qquad \beta=0.$$

Итак:

$$x=0;\quad x=\pm 1;\quad x=\pm i.$$

3. Положим:

$$a_1+b_1 i=x,\quad a_2+b_2 i=y,\ \ldots,\ a_{n-1}+b_{n-1}i=u,\quad a_n+b_n i=w.$$

Тогда неравенство, которое требуется доказать, перепишется так:

$$|x+y+\ldots+u+w|\leqq|x|+|y|+\ldots+|u|=|w|,$$

т. е. нужно доказать, что модуль суммы нескольких комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых. Докажем это предложение сначала для случая двух слагаемых, т. е. докажем, что

$$|x+y|\leqq|x|+|y|.$$

Но

$$|x+y|=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2};$$
$$|x|=\sqrt{a_1^2+b_1^2};\quad |y|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

Следовательно, требуется доказать:

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}\leqq\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

После возведения в квадрат обеих частей этого неравенства и после некоторых упрощений получаем равносильное ему неравенство:

$$a_1a_2+b_1b_2\leqq\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}.$$

Это же неравенство будет несомненно справедливым, если

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2\leqq(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2),$$

т. е. если

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2-(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\leqq 0,\quad -(a_1b_2-a_2b_1)^2\leqq 0,$$

что очевидно. Таким образом, доказано, что

$$|x+y|\leqq|x|+|y|,$$

при любых комплексных x и y. Для того чтобы доказать наше предложение в общем случае, поступаем так. Имеем:

$$|x+y+z+\ldots+u+w|=|(x+y+\ldots+u)+w|\leqq|x+y+\ldots+u|+|w|$$

(на основании доказанного). Применим теперь аналогичную операцию к первому слагаемому:

$$|x+y+\ldots+u|.$$

Продолжая эту операцию, докажем наше предложение для случая n слагаемых. Доказательство, приведенное нами, проведено методом математической индукции. Присоединим к нему еще другое доказательство. Допустим, что комплексные числа приведены к тригонометрической форме, т. е. положим:

$$x=\varrho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);$$
$$y=\varrho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2);\ldots;w=\varrho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n).$$

Тогда имеем:

$$x+y+\ldots+w=\sum_{k=1}^{n}\varrho_k\cos\varphi_k+i\sum_{k=1}^{n}\varrho_k\sin\varphi_k,$$

$$|x|+|y|+\ldots+|w|=\sum_{k=1}^{n}\varrho_k,$$

$$|x+y+\ldots+w|^2=\Big(\sum_{b=1}^{n}\varrho_k\cos\varphi_k\Big)^2+\Big(\sum_{k=1}^{n}\varrho_k\sin\varphi_k\Big)^2.$$

Нужно доказать:

$$\Delta=\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k\Big)^2-\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k \cos\varphi_k\Big)^2-\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k \sin\varphi_k\Big)^2 \geqq 0.$$

Имеем:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k\Big)^2=\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2+2\sum_{s\neq t} \varrho_s\varrho_t,$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k \cos\varphi_k\Big)^2=\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 \cos^2\varphi_k+2\sum_{s\neq t} \varrho_s\varrho_t \cos\varphi_s \cos\varphi_t,$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k \sin\varphi_k\Big)^2=\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 \sin^2\varphi_k+2\sum_{s\neq t} \varrho_s\varrho_t \sin\varphi_s \sin\varphi_t,$$

следовательно,

$$\Delta=2\sum_{s\neq t} \varrho_s\varrho_t-2\sum_{s\neq t} \varrho_s\varrho_t \cos(\varphi_s-\varphi_t),$$

$$\Delta=2\sum_{s\neq t}\varrho_s\varrho_t\,\{1-\cos(\varphi_s-\varphi_t)\}=4\sum_{s\neq t} \varrho_s\varrho_t \sin^2\frac{\varphi_s-\varphi_t}{2}\geqq 0.$$

4. Доказывается непосредственной проверкой, принимая во внимание, что

$$\varepsilon^2=-\varepsilon-1;\quad \varepsilon^3=1.$$

5. Легко видеть, что

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=(a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c)(a+\varepsilon^2 b+\varepsilon c),$$
$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)&=\\ =[(ax+cy+bz)+(cx+by+az)\,\varepsilon+(bx+ay+cz)\,\varepsilon^2]&\times\\ \times[(ax+cy+bz)+(cx+by+az)\,\varepsilon^2+(bx+ay+cz)\,\varepsilon]&=\\ =X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ&,\end{aligned}$$

где

$$X=ax+cy+bz;\quad Y=cx+by+az;\quad Z=bx+ay+cz.$$

6. 1° Решая предложенную систему относительно x, y и z, получаем:

$$x=\frac{A+B+C}{3};\quad y=\frac{A+B\varepsilon^2+C\varepsilon}{3};\quad z=\frac{A+B\varepsilon+C\varepsilon^2}{3}.$$

2° Имеем:

$$|A|^2+|B|^2+|C|^2=A\bar{A}+B\bar{B}+C\bar{C}.$$

Но

$$A\bar{A}=(x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})=|x|^2+|y|^2+|z|^2+\bar{x}(y+z)+\bar{y}(x+z)+\bar{z}(x+y),$$

$$B\bar{B}=(x+y\varepsilon+z\varepsilon^2)(\bar{x}+\bar{y}\bar{\varepsilon}^2+\bar{z}\bar{\varepsilon})=$$
$$=|x|^2+|y|^2+|z|^2+\bar{x}(y\varepsilon+z\varepsilon^2)+\bar{y}(x\varepsilon^2+z\varepsilon)+\bar{z}(x\varepsilon+y\varepsilon^2),$$

$$C\bar{C}=(x+y\varepsilon^2+z\varepsilon)(\bar{x}+\bar{y}\bar{\varepsilon}+\bar{z}\bar{\varepsilon}^2)=$$
$$=|x|^2+|y|^2+|z|^2+\bar{x}(y\varepsilon^2+z\varepsilon)+\bar{y}(x\varepsilon+z\varepsilon^2)+\bar{z}(x\varepsilon^2+y\varepsilon).$$

Складывая почленно эти три равенства, найдем:

$$|A|^2+|B|^2+|C|^2=A\overline{A}+B\overline{B}+C\overline{C}=$$
$$=3[|x|^2+|y|^2+|z|^2]+\overline{x}[y(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+z(1+\varepsilon^2+\varepsilon)]+$$
$$+\overline{y}[x(1+\varepsilon^2+\varepsilon)+z(1+\varepsilon+\varepsilon^2)]+\overline{z}[x(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+y(1+\varepsilon^2+\varepsilon)].$$

Но так как $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, то последние три квадратные скобки равны нулю и, действительно:

$$|A|^2+|B|^2+|C|^2=3[|x|^2+|y|^2+|z|^2].$$

7. На основании результата 1° задачи 6 имеем:

$$x''=\frac{AA'+BB'+CC'}{3}; \quad y''=\frac{AA'+BB'\varepsilon^2+CC'\varepsilon}{3};$$
$$z''=\frac{AA'+BB'\varepsilon+CC'\varepsilon^2}{3}.$$

Далее:

$$AA'+BB'+CC'=(x+y+z)(x'+y'+z')+$$
$$+(x+y\varepsilon+z\varepsilon^2)(x'+y'\varepsilon+z'\varepsilon^2)+(x+y\varepsilon^2+z\varepsilon)(x'+y'\varepsilon^2+z'\varepsilon)=$$
$$=3(xx'+zy'+yz').$$

Итак:

$$x''=xx'+zy'+yz'.$$

Аналогично

$$y''=zz'+yx'+xy',$$
$$z''=yy'+xz'+zx'$$

(два последних выражения возникают из первого путем круговой перестановки).

8. Хотя доказательство этой формулы уже было дано нами прежде (см. задачу 2, § 1), мы дадим здесь второе доказательство, пользуясь комплексными числами.

Имеем тождество

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')=(\alpha\alpha'+\beta\gamma')(\gamma\beta'+\delta\delta')-(\alpha\beta'+\beta\delta')(\gamma\alpha'+\delta\gamma'),$$

и положим здесь:

$$\alpha=x+yi; \quad \beta=z+ti; \quad \gamma=-(z-ti); \quad \delta=x-yi;$$
$$\alpha'=a+bi; \quad \beta'=c+di; \quad \gamma'=-(c-di); \quad \delta'=a-bi.$$

Тогда:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=x^2+y^2+z^2+t^2,$$
$$\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=a^2+b^2+c^2+d^2,$$
$$\alpha\alpha'+\beta\gamma'=(ax-by-cz-dt)+i(bx+ay+dz-ct),$$
$$\gamma\beta'+\delta\delta'=\overline{\beta\gamma'}+\overline{\alpha\alpha'}=\overline{(\alpha\alpha'+\beta\gamma')}.$$

Поэтому

$$(\alpha\alpha'+\beta\gamma')(\gamma\beta'+\delta\delta')=(ax-by-cz-dt)^2+(bx+ay+dz-ct)^2.$$

Далее:

$$\alpha\beta'+\beta\delta'=(cx-dy+az+bt)+i(dx+cy-bz+at),$$
$$\gamma\alpha'+\delta\gamma'=-(cx-dy+az+bt)+i(dx+cy-bz+at),$$

т. е.

$$-(\alpha\beta'+\beta\delta')(\gamma\alpha'+\delta\gamma')=(cx-dy+az+bt)^2+(dx+cy-bz+at)^2.$$

Подставляя полученные выражения в исходное тождество, найдем:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=(ax-by-cz-dt)^2+$$
$$+(bx+ay+dz-ct)^2+(cx-dy+az+bt)^2+(dx+cy-bz+at)^2.$$

Заменяя в нем d через $-d$ и t через $-t$, получим искомое тождество.

9. Развернем выражение

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n,$$

пользуясь формулой бинома Ньютона. Имеем:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos^n\varphi+n\cos^{n-1}\varphi\, i\sin\varphi+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\,(i\sin\varphi)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\,(i\sin\varphi)^3+\ldots$$
$$\ldots+n\cos\varphi\,(i\sin\varphi)^{n-1}+(i\sin\varphi)^n.$$

Отделяя в этом разложении вещественную и мнимую части и пользуясь формулой Моавра, найдем:

$$\cos n\varphi+i\sin n\varphi=\left(\cos^n\varphi-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\ldots\right)+$$
$$+i\left(n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots\right).$$

Отсюда

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\ldots,$$
$$\sin n\varphi=n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots$$

Принимая во внимание четность или нечетность n и деля обе части этих равенств на $\cos^n\varphi$, получаем искомые формулы.

10. Докажем сначала случай 1°. Имеем:

$$\cos\varphi=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{2}.$$

Положим $\cos\varphi+i\sin\varphi=\varepsilon$. Тогда $\cos\varphi-i\sin\varphi=\varepsilon^{-1}$

$$\cos^{2m}\varphi=\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon^{-1}}{2}\right)^{2m}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{2m}C_{2m}^k\varepsilon^{-k}\cdot\varepsilon^{2m-k}.$$

Далее:

$$2^{2m}\cos^{2m}\varphi=\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^k\varepsilon^{2(m-k)}+C_{2m}^m+\sum_{k=m+1}^{2m}C_{2m}^k\varepsilon^{2(m-k)}.$$

Положим во второй сумме $m-k=-(m-k')$. Тогда эта сумма перепишется так:

$$\sum_{k'=m-1}^{0}C_{2m}^{2m-k'}\varepsilon^{-2(m-k')}=\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^k\varepsilon^{-2(m-k)}.$$

Итак:

$$2^{2m}\cos^{2m}\varphi=\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^k\left(\varepsilon^{2(m-k)}+\varepsilon^{-2(m-k)}\right)+C_{2m}^m.$$

Но
$$\varepsilon^{2(m-k)}+\varepsilon^{-2(m-k)}=2\cos 2(m-k).$$
Поэтому, действительно:
$$2^{2m}\cos^{2m}\varphi=\sum_{k=0}^{m-1}2C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)\varphi+C_{2m}^{m}.$$
Заменяя в этой формуле φ через $\frac{\pi}{2}-\varphi$, получим формулу 2°. Формулы 3° и 4° выводятся аналогично 1° и 2°.

11. Составим выражение:
$$u_n+iv_n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+r[\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta)]+\ldots$$
$$\ldots+r^n[\cos(\alpha+n\theta]+i\sin(\alpha+n\theta)]=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left\{1+r(\cos\theta+i\sin\theta)+\ldots+r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\right\}.$$
Положим:
$$\cos\theta+i\sin\theta=\varepsilon.$$
Тогда
$$u_n+iv_n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left\{1+r\varepsilon+\ldots+(r\varepsilon)^n\right\}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\frac{(r\varepsilon)^{n+1}-1}{r\varepsilon-1}.$$

Преобразуем дробь $\frac{(r\varepsilon)^{n+1}-1}{r\varepsilon-1}$, выделив в ней вещественную и мнимую части.

Имеем:
$$\frac{(r\varepsilon)^{n+1}-1}{r\varepsilon-1}=\frac{[(r\varepsilon)^{n+1}-1][r\bar\varepsilon-1]}{(r\varepsilon-1)(r\bar\varepsilon-1)}=$$
$$=\frac{r^{n+2}[\cos n\theta+i\sin n\theta]-r[\cos\theta-i\sin\theta]}{1-2r\cos\theta+r^2}+$$
$$+\frac{-r^{n+1}[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]+1}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Умножая эту последнюю дробь на $\cos\alpha+i\sin\alpha$ и выделяя вещественную и мнимую части, получим искомый результат. В самом деле имеем:
$$u_n+iv_n=\frac{r^{n+2}[\cos(n\theta+\alpha)+i\sin(n\theta+\alpha)]}{1-2r\cos\theta+r^2}+$$
$$+\frac{-r[\cos(\alpha-\theta)+i\sin(\alpha-\theta)]}{1-2r\cos\theta+r^2}+$$
$$+\frac{-r^{n+1}\left\{\cos[(n+1)\theta+\alpha]+i\sin[(n+1)\theta+\alpha]\right\}+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$
Отсюда
$$u_n=\frac{\cos\alpha-r\cos(\alpha-\theta)-r^{n+1}\cos[(n+1)\theta+\alpha]+r^{n+2}\cos(n\theta+\alpha)}{1-2r\cos\theta+r^2},$$
$$v_n=\frac{\sin\alpha-r\sin(\alpha-\theta)-r^{n+1}\sin[(n+1)\theta+\alpha]+r^{n+2}\sin(n\theta+\alpha)}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Если положить в этих формулах $\alpha=0$, $r=1$, то найдем:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

12. Имеем:

$$S+S'i=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos\theta+i\sin\theta)^k=$$

$$=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n=$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right).$$

Отсюда

$$S=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2};\quad S'=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}.$$

13. Положим:

$$S=\sin^{2p}\alpha+\sin^{2p}2\alpha+\ldots+\sin^{2p}n\alpha=\sum_{l=1}^{n}\sin^{2p}l\alpha.$$

Но (см. задачу 10)

$$\sin^{2p}l\alpha=\frac{1}{2^{2p-1}}(-1)^p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k\cos 2(p-k)\,l\alpha+\frac{1}{2^{2p}}C_{2p}^p,$$

поэтому

$$S=\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k\sum_{l=1}^{n}\cos 2(p-k)\,l\alpha+\frac{n}{2^{2p}}C_{2p}^p.$$

Положим $2(p-k)\alpha=\xi$. Тогда:

$$\sum_{l=1}^{n}\cos 2(p-k)\,l\alpha=\cos\xi+\ldots+\cos n\xi=\frac{\sin\frac{n\xi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}$$

(см. решение задачи 11).

Обозначим:

$$\frac{\sin\frac{n\xi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}=\sigma_k.$$

Тогда можно доказать, что $\sigma_k=0$, если k одинаковой четности с $p\,\{k\equiv p\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$ и $\sigma_k=-1$, если k и p—разной четности $\{k\equiv p+1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$, и мы получим:

$$S=\frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p-1}}\sum_{\substack{k=0\\k\equiv p+1\,(\mathrm{mod}\ 2).}}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k+n\frac{1}{2^{2p}}C_{2p}^p.$$

Отсюда

$$S=\frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{\substack{k=0\\k\equiv p+1\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{p-1}C_{2p}^k+n\frac{1}{2^{2p}}C_{2p}^p.$$

Но можно доказать: $\sum\limits_{\substack{k=0\\k\equiv p+1\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{p-1}C_{2p}^k=2^{2p-2}$ (см. задачу 58 этого параграфа), и наша формула выведена.

14. 1° Перепишем наш многочлен следующим образом:

$$x^n-a^n-nxa^{n-1}+na^n=(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)=$$
$$=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}-na^{n-1}).$$

Второй сомножитель последнего произведения при $x=a$ обращается в нуль и, следовательно, делится на $x-a$, а потому данный многочлен делится на $(x-a)^2$.

2° Обозначим наш многочлен через P_n и составим разность P_n-P_{n-1}. Преобразуя эту разность, легко докажем, что она делится на $(1-x)^3$. Но так как это справедливо при любом целом положительном n, то мы получаем ряд равенств:

$$P_n-P_{n-1}=(1-x)^3\varphi_n(x),$$
$$P_{n-1}-P_{n-2}=(1-x)^3\varphi_{n-1}(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_2-P_2=(1-x)^3\varphi_2(x),$$
$$P_2-P_1=(1-x)^3\varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$—многочлены относительно x.

Отсюда следует:

$$P_n-P_1=(1-x)^3\psi(x).$$

Но так как

$$P_1=(1-x)^3,$$

то P_n делится на $(1-x)^3$, и наше предложение доказано.

15. 1° Рассматривая данное выражение как многочлен относительно y, положим $y=0$. Мы видим, что при $y=0$ многочлен обращается в нуль (при любом x). Поэтому наш многочлен делится на y. Так как он симметричен относительно x и y (не меняется при перестановке этих двух букв), то он равным образом делится и на x. Таким образом, многочлен делится на xy. Для того чтобы доказать, что он делится на $x+y$, положим в нем $y=-x$. Легко видеть, что при n нечетном имеем:

$$(x-x)^n-x^n-(-x)^n=0.$$

Следовательно, наш многочлен делится на $x+y$. Остается только доказать делимость многочлена на

$$x^2+xy+y^2=(y-x\varepsilon)(y-x\varepsilon^2),$$

где

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0.$$

Для этого остается только подставить вместо y сначала $x\varepsilon$, а затем $x\varepsilon^2$ и убедиться, что при этих подстановках многочлен принимает значение, равное нулю. Так как n по условию не делится на три, то $n=3l+1$ или $3l+2$. При $y=x\varepsilon$ многочлен принимает следующее значение:

$$(x+x\varepsilon)^n-x^n-(x\varepsilon)^n=x^n\left\{\varepsilon^{2n}+1+\varepsilon^n\right\}=x^n(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=0.$$

Совершенно так же докажем, что и при $y=x\varepsilon^2$ многочлен обращается в нуль и, следовательно, делимость его на $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ доказана.

2° Для доказательства этого утверждения поступим следующим образом. Пусть величины $-x$, $-y$ и $x+y$ будут корнями некоторого кубического уравнения:

$$\alpha^3-r\alpha^2-p\alpha-q=0.$$

Тогда в силу известных соотношений между корнями уравнения и его коэффициентами (см. начало параграфа), будем иметь:

$$\begin{aligned} r&=-x-y+(x+y)=0,\\ -p&=xy-x(x+y)-y(x+y),\\ q&=xy(x+y). \end{aligned}$$

Таким образом, $-x$, $-y$ и $x+y$ будут корнями следующего уравнения:

$$\alpha^3-p\alpha-q=0,$$

где

$$p=x^2+xy+y^2;\quad q=xy(x+y).$$

Положим:

$$(-x)^n+(-y)^n+(x+y)^n=S_n.$$

Между последовательными значениями S_n имеют место следующие соотношения:

$$S_{n+3}=pS_{n+1}+qS_n,$$

причем $S_1=0$. Докажем, что S_n делится на p^2, если $n\equiv 1 \pmod 6$. Применим метод математической индукции. Допустим, что S_n делится на p^2, и докажем, что тогда и S_{n+6} точно так же делится на p^2. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{n+6}&=pS_{n+4}+qS_{n+2},\\ S_{n+4}&=pS_{n+2}+qS_{n+1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$S_{n+6}=p(pS_{n+2}+qS_{n+1})+q(pS_{n+1}+qS_n)=p^2S_{n+2}+2pqS_{n+1}+q^2S_n.$$

Так как S_n, по предположению, делится на p^2, то достаточно доказать, что S_{n+1} делится на p. Таким образом, нужно доказать только, что

$$(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n$$

делится на x^2+xy+y^2, если $n\equiv 2 \pmod 6$. Действуя так же, как в 1°, легко докажем наше утверждение. Итак, предполагая, что S_n делится на p^2, доказали, что S_{n+6} также делится на p^2. Но $S_1=0$ делится на p^2. Следовательно, действительно:

$$S_n=(x+y)^n-x^n-y^n$$

делится на (x^2+xy+y^2) при любом $n\equiv 1 \pmod 6$. Остается только доказать делимость на $x+y$ и на xy.

16. Равенство 1° очевидно. Из задачи 15 следует, что $(x+y)^5-x^5-y^5$ делится на $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$. Так как многочлены $(x+y)^5-x^5-y^5$ и $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ оба однородны относительно x и y одной и той же

степени, то частным от деления $(x+y)^5-x^5-y^5$ на $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ будет некоторая величина, не зависящая от x и y. Обозначим ее через A. Имеем тогда:

$$(x+y)^5-x^5-y^5=Ay(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

Ввиду того, что это равенство представляет собою тождество и, следовательно, справедливо при всех значениях x и y, положим здесь, например, $x=1$, $y=1$. Получаем:

$$2^5-1-1=A\cdot 2\cdot 3.$$

Отсюда $A=5$, и окончательно находим:

$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

Пользуясь результатом задачи 15,2°, можно написать аналогично предыдущему:

$$(x+y)^7-x^7-y^7=Axy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Полагая здесь $x=y=1$, найдем: $A=7$.

17. Известно, что

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Докажем, что $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ делится на $x+y$. Рассматривая наш многочлен расположенным по степени x, положим в нем $x=-y$. Имеем:

$$(-y+y+z)^m-(-y)^m-y^m-z^m=0,$$

так как m—нечетное.

Следовательно, действительно наш многочлен делится на $(x+y)$. Совершенно так же убеждаемся, что он делится на $x+z$ и на $y+z$.

18. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы многочлен $f(x)$ делился на $x-a$, состоит в том, чтобы $f(a)=0$.
Положим:

$$f(x)=x^3+kyzx=y^3+z^3.$$

Для делимости этого многочлена на $x+y+z$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f(-y-z)=0.$$

Но

$$f(-y-z)=-(y+z)^3-kyz(y+z)+y^3+z^3=-(k+3)yz(y+z).$$

Отсюда следует $k=-3$. Итак, для делимости $x^3+y^3+z^3+kxyz$ на $x+y+z$ необходимо и достаточно, чтобы $k=-3$.

19. Разделим n на p. Получаем: $n=lp+r$, где l—некоторое целое, положительное и $0\leqq r<p$. Следовательно:

$$x^n-a^n=x^{lp}x^r-a^{lp}a^r=x^{lp}x^r-a^{lp}x^r+a^{lp}x^r-a^{lp}a^r=x^r(x^{lp}-a^{lp})+a^{lp}(x^r-a^r).$$

Но $x^{lp}-a^{lp}=(x^p)^l-(a^p)^l$ делится на x^p-a^p, поэтому для делимости x^n-a^n на x^p-a^p необходимо и достаточно, чтобы x^r-a^r делилось на x^p-a^p. Но это возможно только тогда, когда $r=0$ и, следовательно, $n=lp$. Окончательно, для делимости x^n-a^n на x^p-a^p необходимо и достаточно, чтобы n делилось на p.

20. Положим $f(x)=x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$. С другой стороны,

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)=(x+1)(x+i)(x-i).$$

Остается только показать, что

$$f(-1)=f(i)=f(-i)=0.$$

21. Имеем:

$$1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1},$$

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Нужно выяснить, при каком n $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}:\frac{x^n-1}{x-1}$ будет многочленом относительно x.

Находим:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}:\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^n+1}{x+1}.$$

Для того чтобы x^n+1 делилось на $x+1$, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^n+1=0$, т. е. чтобы n было нечетным.

Итак, $1+x^2+\ldots+x^{2n-2}$ делится на $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$ при n нечетном.

22. 1° Положим:

$$f(x)=(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi.$$

Но $x^2+1=(x+i)(x-i)$ и $f(i)=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n-(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=0$ (на основании формулы Моавра). Совершенно так же убеждаемся, что $f(-i)=0$, и наше предположение доказано.

2° Разложим многочлен $x^2-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2$ на множители, линейные относительно x. Для этого найдем корни квадратного уравнения:

$$x^2-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2=0.$$

Получаем:

$$x=\varrho\cos\varphi\pm\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho^2}=\varrho(\cos\varphi\pm i\sin\varphi).$$

Обозначим:

$$x^n\sin\varphi-\varrho^{n-1}x\sin n\varphi+\varrho^n\sin(n-1)\varphi=f(x).$$

Докажем, что

$$f[\varrho(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)]=0.$$

23. Допустим, что

$$x^4+1=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')=$$
$$=x^4+(p+p')x^3+(q+q'+pp')x^2+(pq'+qp')x+qq'.$$

Для определения четырех независимых p, q, p' и q' имеем четыре уравнения:

$$p+p'=0, \tag{1}$$
$$pp'+q+q'=0, \tag{2}$$
$$pq'+qp'=0, \tag{3}$$
$$qq'=1. \tag{4}$$

Из (1) и (3) находим: $p'=-p$; $p(q'-q)=0$.

1° Допустим: $p=0$; $p'=0$; $q+q'=0$; $qq'=1$; $q^2=-1$;

$$q=\pm i;\quad q'=\mp i.$$

Соответствующее разложение имеет вид:

$$x^4+1=(x^2+i)(x^2-i).$$

2° $q'=q$; $q^2=1$; $q=\pm 1$.

Допустим сначала $q' = \hat{q} = 1$. Тогда $pp' = -2$; $p + p' = 0$; $p^2 = 2$; $p = \pm\sqrt{2}$; $p' = \mp\sqrt{2}$. Соответствующее разложение будет:

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Предположим теперь:

$$q = q' = -1; \quad p + p' = 0; \quad pp' = 2; \quad p = \pm\sqrt{2}i; \quad p' = \mp\sqrt{2}i.$$

Разложение будет иметь вид:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}ix - 1)(x^2 - \sqrt{2}ix - 1).$$

24. Положим:

$$\sqrt{a + bi} = x + yi,$$

откуда

$$a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi;$$

следовательно:

$$x^2 - y^2 = a; \quad 2xy = b.$$

Для разыскания x, y остается только решить эту систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Имеем:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2,$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2};$$

поэтому

$$x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}; \quad y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$x = \pm\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}; \quad y = \pm\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}},$$

причем знаки корней связаны зависимостью $2xy = b$. Итак, имеет место следующая формула:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} + i\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

если $b > 0$ (так как тогда знаки x и y должны быть одинаковы), и

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} - i\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

если $b < 0$.

25. Корни данного уравнения определяются формулой:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k; \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

26. Имеем:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp},$$

где

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Итак:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k^p = 1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)p}.$$

Но

$$\varepsilon^p = \cos\frac{2p\pi}{n} + i\sin\frac{2p\pi}{n}.$$

Легко видеть, что $\varepsilon^p = 1$ тогда и только тогда, когда p делится на n. В этом случае:

$$s = n.$$

Если же $\varepsilon^p \neq 1$, то

$$s = 1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)p} = \frac{\varepsilon^{np} - 1}{\varepsilon^p - 1} = 0,$$

так как $\varepsilon^{np} = 1$.

Итак:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k^p = n, \text{ если } p \text{ делится на } n, \text{ и}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k^p = 0, \text{ если } p \text{ на } n \text{ не делится.}$$

27. Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\overline{A}_k.$$

Но

$$\begin{aligned} A_k\overline{A}_k = (x + y\varepsilon^k + z\varepsilon^{2k} + \ldots + w\varepsilon^{(n-1)k})(\overline{x} + \overline{y}\varepsilon^{-k} + \overline{z}\varepsilon^{-2k} + \ldots \\ \ldots + \overline{w}\varepsilon^{-(n-1)k}) = x\overline{x} + y\overline{y} + \ldots + w\overline{w} + \\ + x(\overline{y}\varepsilon^{-k} + \overline{z}\varepsilon^{-2k} + \ldots + \ldots \overline{w}\varepsilon^{-(n-1)k}) + \\ + y\varepsilon^k(\overline{x} + \overline{z}\varepsilon^{-2k} + \ldots + \overline{w}\varepsilon^{-(n-1)k}) + \\ + z\varepsilon^{2k}(\overline{x} + \overline{y}\varepsilon^{-k} + \ldots + \overline{w}\varepsilon^{-(n-1)k}) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + w\varepsilon^{(n-1)k}(\overline{x} + \overline{y}\varepsilon^{-k} + \ldots + \overline{u}\varepsilon^{-(n-2)k}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k\overline{A}_k = n(|x|^2 + |y|^2 + \ldots + |w|^2) + \\ + x\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{y}\varepsilon^{-k} + \overline{z}\varepsilon^{-2k} + \ldots + \overline{w}\varepsilon^{-(n-1)k}) + \\ + y\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{x}\varepsilon^k + \overline{z}\varepsilon^{-k} + \ldots + \overline{w}\varepsilon^{-(n-2)k}) + \ldots \\ \ldots + w\sum_{k=1}^{n-1}(\overline{x}\varepsilon^{(n-1)k} + y^{-(n-2)k} + \ldots + \overline{u}\varepsilon^k). \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{lk} = 0,$$

если l не делится на n (см. задачу 26).

Поэтому все суммы, стоящие в правой части, обратятся в нуль, и мы получаем:

$$|A_0|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{n-1}|^2=n\left\{|x|^2+|y|^2+\ldots+|w|^2\right\}.$$

28. 1° Обозначим корни $2n$-й степени из единицы через x_s, так что

$$x_s=\cos\frac{2s\pi}{n}+i\sin\frac{2s\pi}{n}\quad(s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Поэтому

$$x^{2n}-1=\prod_{s=1}^{2n}(x-x_s)=\prod_{s=1}^{n-1}(x-x_s).\ \prod_{s=n+1}^{2n-1}(x-x_s)\cdot(x^2-1),$$

так как $x_n=-1$; $x_{2n}=1$. Но $x_{2n-s}=\overline{x_s}$, следовательно:

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{s=1}^{n-1}(x-x_s)(x-\overline{x_s})=(x^2-1)\prod_{s=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{s\pi}{n}+1\right).$$

Остальные случаи доказываются аналогично.

29. 1° Перепишем равенство 1° предыдущей задачи следующим способом:

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1=\prod_{s=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{s\pi}{n}+1\right).$$

Положим в этом тождестве $x=1$. Имеем:

$$n=\prod_{s=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{s\pi}{n}\right)=\prod_{s=1}^{n-1}4\sin^2\frac{s\pi}{n}=$$

$$=2^{2(n-1)}\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{n}\ldots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Отсюда действительно:

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

2° Решается аналогично 1°.

30. Имеем:

$$x^n-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda).$$

Отсюда

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Следовательно,

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\lambda)=n.$$

31. Составим уравнение, корнями которого будут:

$$x_1-1,\ x_2-1,\ \ldots,\ x_n-1.$$

Это уравнение имеет вид:

$$(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+\ldots+(x+1)+1=0,$$

т. е.

$$\frac{(x+1)^{n+1}-1}{x+1-1}=\frac{(x+1)^{n+1}-1}{x}=0.$$

Далее, составим уравнение с корнями:

$$\frac{1}{x_1-1};\quad \frac{1}{x_2-1};\quad \ldots;\quad \frac{1}{x_n-1}.$$

Оно будет иметь вид:

$$\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{(1+x)^{n+1}-x^{n+1}}{x^n}=0.$$

Развернув последнее выражение по степеням x, найдем:

$$(n+1)\,x^n+\frac{(n+1)\,n}{1\cdot 2}\,x^{n-1}+\ldots=0,$$

или

$$x^n+\frac{n}{2}\,x^{n-1}+\ldots$$

Но сумма корней этого уравнения равна $-\frac{n}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\ldots+\frac{1}{x_n-1}=-\frac{n}{2}.$$

32. Рассмотрим уравнение (считая за неизвестное t):

$$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}=1.$$

В силу данных уравнений это уравнение имеет три корня: μ^2, ν^2, ϱ^2. Развернем последнее уравнение по степеням t. Получаем:

$$t\,(t-b^2)\,(t-c^2)-x^2\,(t-b^2)\,(t-c^2)-y^2\,(t-c^2)\,t-z^2\,(t-b^2)\,t=0,$$

$$t^3+\alpha t^2+\ldots=0,$$

где $\alpha=-b^2-c^2-x^2-y^2-z^2$.

Но корнями этого уравнения (как уже было замечено выше) являются: μ^2, ν^2, ϱ^2. Поэтому должно быть:

$$\mu^2+\nu^2+\varrho^2=b^2+c^2+x^2+y^2+z^2.$$

Отсюда

$$x^2+y^2+z^2=\mu^2+\nu^2+\varrho^2-b^2-c^2.$$

33. Так как $\cos\alpha+i\sin\alpha$ есть корень данного уравнения, то имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n-k}=0 \qquad (\text{считая } p_0=1)$$

или

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\sum_{k=0}^{n} p_k\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-k}=0.$$

Но

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-1}=\cos\alpha-i\sin\alpha,$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\,(\cos\alpha-i\sin\alpha)^k=0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\,(\cos\alpha k-i\sin\alpha k)=0.$$

Отсюда, действительно:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \sin k\alpha = p_1 \sin\alpha + p_2 \sin 2\alpha + \ldots + p_n \sin n\alpha = 0.$$

34. На основании данных задачи имеем тождественно:

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = (x-a)(x-b)\ldots(x-k).$$

Подставляя сюда вместо x сначала i, а затем $-i$ и перемножая почленно, получим искомый результат.

35. Вычитая два данных уравнения почленно, найдем:

$$(p-p')x + (q-q') = 0. \tag{1}$$

Умножая первое из уравнений на q', а второе на q и вычитая почленно, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x^3(q'-q) + x(pq'-qp') &= 0, \\ x^2(q'-q) + pq' - qp' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Исключая теперь из уравнений (1) и (2) x, получим искомый результат.

36. Корни уравнения

$$x^7 = 1$$

суть

$$\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6).$$

Поэтому корнями уравнения

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \tag{*}$$

будут:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Положим

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

тогда

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y.$$

Уравнение (*) можно переписать следующим способом:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Легко видеть, что

$$x_1 = \bar{x}_6; \quad x_2 = \bar{x}_5; \quad x_3 = \bar{x}_4,$$

$$x_k + \frac{1}{x_k} = x_k + \bar{x}_k = 2\cos\frac{2k\pi}{7}.$$

Отсюда можно заключить, что величины

$$2\cos\frac{2\pi}{7}, \quad 2\cos\frac{4\pi}{7}, \quad 2\cos\frac{8\pi}{7}$$

являются корнями следующего уравнения:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Построим уравнение, корнями которого была бы величина:

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}},\quad \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}},\quad \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}.$$

Пусть корни некоторого кубического уравнения

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

будут

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Тогда имеем:

$$\alpha+\beta+\gamma=a;\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b;\quad \alpha\beta\gamma=c.$$

Пусть уравнение, корнями которого являются величины $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$, будет:

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0.$$

Тогда:

$$\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}=A;\quad \sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\gamma}+\sqrt[3]{\beta}\sqrt[3]{\gamma}=B;$$
$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}=C.$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$(m+p+q)^3=m^3+p^3+q^3+3(m+p+q)(mp+mq+pq)-3mpq.$$

Полагая здесь вместо m, p и q сначала $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$, а затем $\sqrt[3]{\alpha\beta}$, $\sqrt[3]{\alpha\gamma}$, $\sqrt[3]{\beta\gamma}$, найдем:

$$A^3=a+3AB-3C,$$
$$B^3=b+3BCA-3C^2.$$

В нашем случае имеем: $a=-1$, $b=-2$, $c=1$, $C=1$. Отсюда

$$A^3=3AB-4,$$
$$B^3=3AB-5.$$

Перемножая эти уравнения и полагая $AB=z$, найдем:

$$z^3-9z^2+27z-20=0,$$
$$(z-3)^3+7=0,$$
$$z=3-\sqrt[3]{7}.$$

Но

$$A^3=3z-4=5-3\sqrt[3]{7};\quad A=\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}.$$

Поэтому, действительно:

$$\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}=\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}=$$
$$=\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}.$$

Совершенно аналогично доказывается и второе тождество.

37. Так как по условию $a+b+c=0$, то мы можем считать, что a, b и c являются корнями следующего кубического уравнения:

$$x^3+px+q=0,$$

где

$$p=ab+ac+bc;\quad q=-abc.$$

Имеем:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc),$$

т. е.

$$s_2=-2p.$$

Полагая в нашем уравнении последовательно $x=a$, $x=b$, $x=c$, получаем:

$$a^3+pa+q=0,$$
$$b^3+pb+q=0,$$
$$c^3+pc+q=0.$$

Складывая эти последние равенства почленно, находим:

$$s_3+ps_1+3q=0.$$

Но так как $s_1=a+b+c=0$, то $s_3=-3q$.

Умножая предварительно обе части нашего исходного уравнения на x^k, полагая затем в нем $x=a$, b и c и складывая, найдем:

$$s_{k+3}=-ps_{k+1}-qs_k.$$

Положим здесь $k=1$, 2, 3, 4. Найдем:

$$s_4=2p^2;\quad s_5=5pq;\quad s_6=-2p^3+3q^2;\quad s_7=-7p^2q.$$

Пользуясь этими соотношениями, легко докажем первые шесть формул. Так же легко доказывается и последняя формула.

38. Имеем:

$$x-u=v-y;\qquad x^2-u^2=v^2-y^2.$$

Второе равенство перепишем следующим образом:

$$(x-u)(x+u)-(v-y)(v+y)=0.$$

Так как $x-u=v-y$, то это последнее равенство запишется так:

$$(x-u)[x+u-(v+y)]=0.$$

Отсюда следует:

1° $\qquad x-u=0;\qquad v-y=0;\quad x=u;\ y=v;$

2° $(x+u)-(v+y)=0;\quad (x-u)-(v-y)=0;\quad x=v;\ y=u.$

Следовательно, действительно:

$$x^n+y^n=u^n+v^n.$$

Перейдем ко второму случаю. Допустим, что x, y, z являются корнями некоторого кубического уравнения:

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0.$$

Докажем, что u, v и t будут корнями этого же уравнения. Имеем:

$$x+y+z=-p;\quad xy+xz+yz=q;\quad xyz=-r.$$

Отсюда ясно, что для того, чтобы доказать, что u, v и t являются корнями того же уравнения, что x, y и z, достаточно доказать, что

$$u+v+t=x+y+z,$$
$$uv+ut+vt=xy+xz+yz,$$
$$uvt=xyz.$$

Первое из этих равенств справедливо по условию. Второе вытекает сейчас же из тождества

$$2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$$

и из условия

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+t^2.$$

Равным образом, третье равенство следует из тождества

$$3xyz=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-(x+y+z)^3$$

и из условия

$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+t^3.$$

Итак, u, v, t являются корнями того же уравнения третьей степени, что и x, y и z. Поэтому имеет место одна из шести возможностей:

u	v	t
x	y	z
y	x	z
x	z	y
y	z	x
z	x	y
z	y	x

Очевидно, что во всех случаях будет:

$$x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+t^n.$$

39. Возведя в квадрат первый из трехчленов, получаем:

$$A^2=(x_1^2+2x_2x_2)+(x_3^2+2x_1x_2)\,\varepsilon+(x_2^2+2x_1x_3)\,\varepsilon^2.$$

Далее:

$$A^3=(x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3)+(3x_1^2x_2+3x_3^2x_1+3x_2^2x_3)\,\varepsilon+$$
$$+(3x_1^2x_3+3x_2^2x_1+3x_3^2x_2)\,\varepsilon^2.$$

Положим:

$$\alpha=x_1^2x_2+x_2^2x_2+x_3^3x_1,$$
$$\beta=x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2.$$

Далее:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-(px_1+q)-(px_2+q)-(px_3+q)=-3q,$$

так как

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

Кроме того,

$$x_1x_2x_3=-q,$$

поэтому

$$A^3=-9q+3\alpha\varepsilon+3\beta\varepsilon^2.$$

Переставляя x_2 и x_3, найдем также:

$$B^3=-9q+3\alpha\varepsilon^2+3\beta\varepsilon.$$

Отсюда

$$A^3+B^3=-18q-3\alpha-3\beta=-27q,$$

так как

$$\alpha+\beta=x_1x_2(x_1+x_2)+x_2x_3(x_2+x_3)+x_3x_1(x_3+x_1)=-3x_1x_2x_3=3q.$$

Так же получаем:

$$A^3 \cdot B^3 = -27p^3.$$

Нужно только иметь в виду, что

$$\alpha\beta = 3x_1^2x_2^2x_3^2 + (x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3) + x_1^4x_2x_3 + x_2^4x_1x_3 + x_3^4x_2x_1 =$$

$$= 3q^2 + x_1^3x_2^3x_3^3\left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3}\right) + x_1x_2x_3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

причем

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3} = -\frac{3}{q} - \frac{p^3}{q^3}.$$

40. Положим:

$$a + b = c + d = p.$$

Имеем:

$$(x^2 + px + ab)(x^2 + px + cd) = m,$$

или

$$\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + ab - \frac{p^2}{4}\right]\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + cd - \frac{p^2}{4}\right] = m.$$

Пусть

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y.$$

Тогда уравнение приинимает вид:

$$\left(y + ab - \frac{p^2}{4}\right)\left(y + cd - \frac{p^2}{4}\right) = m,$$

т. е.

$$y^2 + \left(ab + cd - \frac{p^2}{2}\right)y + \left(ab - \frac{p^2}{4}\right)\left(cd - \frac{p^2}{4}\right) - m = 0.$$

Остается только решить это квадратное уравнение.

41. Введем подстановку

$$x = y - \frac{a+b}{2},$$

тогда:

$$x + a = y + \frac{a-b}{2}; \quad x + b = y - \frac{a-b}{2}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c.$$

Но

$$\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^4 = y^4 + 4y^3\frac{a-b}{2} + 6y^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 4y\left(\frac{a-b}{2}\right)^3 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^4,$$

поэтому уравнение примет вид:

$$y^4 + 6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2y^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = \frac{c}{2}.$$

Итак, задача привелась к решению биквадратного уравнения.

42. Положим для краткости:

$$a+b+c=p$$

и введем подстановку:

$$x+p=y.$$

Имеем:

$$(y-a)(y-b)(y-c)\,p-abc\,(y-p)=0.$$

Отсюда

$$p\left\{y^3-(a+b+c)\,y^2+(ab+ac+bc)\,y\right\}-abcy=0,$$

или

$$y\left\{(a+b+c)\,y^2-(a+b+c)^2\,y+(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc\right\}=0.$$

Итак, для y находим три значения. Одно из этих значений равно нулю, два другие получатся как корни квадратного уравнения. Затем легко найти и соответствующие значения x.

43. Уравнение перепишем следующим образом:

$$(x+a)^3-3bc\,(x+a)+b^3+c^3=0.$$

Положим $x+a=y$. Уравнение примет вид

$$y^3-3bcy+b^3+c^3=0.$$

Но известио (задача 20, § 1), что

$$y^3+b^3+c^3-3\,bcy=(y+b+c)(y^2+b^2+c^2-yb-yc-bc).$$

Следовательно, один из корней последнего уравнения будет $-b-c$, два другие найдутся решением квадратного уравнения. Затем находим соответствующие значения x.

44. Уравнение содержит пять коэффициентов: a, b, c, d и e. Между этими коэффициентами существуют две зависимости. Таким образом три коэффициента остаются произвольными. Выразим все коэффициенты через любые три.

Имеем:

$$a=c+d; \qquad e=b+c.$$

Уравнение примет вид:

$$(c+d)\,x^4+bx^3+cx^2+dx+(b+c)=0,$$

$$c\,(x^4+x^2+1)+dx\,(x^3+1)+b\,(x^3+1)=0.$$

Но

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Уравнение теперь перепишется так:

$$(x^2-x+1)\left\{c(x^2+x+1)+dx\,(x+1)+b\,(x+1)\right\}=0.$$

Приравнивая нулю первый множитель, найдем:

$$x=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Остальные два корня найдутся решением второго квадратного уравнения.

45. Имеем следующую формулу:

$$(a+b+x)^3=a^3+b^3+x^3+3a^2(b+x)+3b^2(a+x)+3x^2(a+b)+6\,abx.$$

Пользуясь этой формулой, приведем наше уравнение к виду

$$x^3-(a+b)x^2-(a-b)^2x+(a-b)^2(a+b)=0.$$

Отсюда

$$x^2(x-a-b)-(a-b)^2(x-a-b)=0,$$
$$(x-a-b)[x^2-(a-b)^2]=0,$$
$$(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)=0.$$

Таким образом, данное уравнение имеет три корня:

$$x=a+b;\quad x=a-b;\quad x=b-a.$$

46. Перепишем уравнение следующим образом:

$$x^2+\frac{a^2x^2}{(a+x)^2}-\frac{2ax^2}{a+x}=m^2-\frac{2ax^2}{a+x}.$$

Следовательно:

$$\left(x-\frac{ax}{a+x}\right)^2=m^2-\frac{2ax^2}{a+x}.$$

Отсюда

$$\frac{x^4}{(a+x)^2}=m^2-\frac{2ax^2}{a+x}.$$

Положим $\frac{x^2}{a+x}=y$. Тогда уравнение примет вид:

$$y^2+2ay-m^2=0.$$

Отсюда находим y, а затем по найденным значениям y отыщем и значения x. Для y находим следующие значения:

$$y=-a\pm\sqrt{a^2+m^2}. \tag{1}$$

Значения же x определятся по формуле:

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+ay}. \tag{2}$$

Возьмем в формуле (1) знак плюс. Тогда соответствующее значение y будет больше нуля. Вычислим для этого значения y по формуле (2) значения x. Убеждаемся, что x имеет два значения: одно положительное, а другое отрицательное. Итак, наше уравнение всегда имеет, по крайней мере, два вещественных корня: положительный и отрицательный.

Рассмотрим теперь тот случай, когда в формуле (1) берется знак минус. В этом случае значение y отрицательно и для вещественности x необходимо и достаточно, чтобы $y^2+4ay\geqq 0$. Но, следовательно, должно быть

$$y+4a\leqq 0,$$

т. е.

$$-a-\sqrt{a^2+m^2}+4a\leqq 0,$$
$$m^2\geqq 8a^2.$$

При соблюдении этого условия все четыре корня будут вещественны. Так как $ay<0$, то

$$\left|\sqrt{\frac{y^2}{4}+ay}\right|<\left|\frac{y}{2}\right|$$

и, следовательно, оба вещественных корня, найденные в предположении, что в формуле (1) имеет место знак минус, будут отрицательными. Итак, если все четыре корня вещественны, то один из них положительный, а три отрицательные.

47. Положим для краткости:

$$\frac{5x^4+10x^2+1}{x^4+10x^2+5}=f(x).$$

Тогда уравнение примет вид:

$$f(x)\cdot f(a)=ax.$$

Далее, имеем:

$$x-f(x)=\frac{(x-1)^5}{x^4+10x^2+5},$$

$$x+f(x)=\frac{(x+1)^5}{x^4+10x^2+5}.$$

Деля первое из этих равенств на второе, найдем:

$$\frac{x-f(x)}{x+f(x)}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5. \qquad (*)$$

Обозначим:

$$\frac{x-1}{x+1}=y; \qquad \frac{a-1}{a+1}=b.$$

Из равенства (*) получаем:

$$x-f(x)=y^5x+y^5f(x)$$

$$x(1-y^5)=f(x)(1+y^5)$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1-y^5}{1+y^5}.$$

Совершенно аналогично имеем:

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{1-b^5}{1+b^5}.$$

Наше уравнение можно переписать теперь так:

$$\frac{1-y^5}{1+y^5}=\frac{1+b^5}{1-b^5},$$

откуда

$$y^5=-b^5.$$

Это же уравнение имеет пять корней, именно:

$$y_k=-b\varepsilon^k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},$$

Но

$$x=\frac{1+y}{1-y}$$

следовательно:

$$x_k=\frac{1+y_k}{1-y_k}=\frac{1-b\varepsilon^k}{1+b\varepsilon^k}=\frac{(a+1)-(a-1)\varepsilon^k}{(a+1)+(a-1)\varepsilon^k}.$$

Далее:

$$x_k=\frac{(a+1)\varepsilon^{-\frac{k}{2}}-(a-1)\varepsilon^{\frac{k}{2}}}{(a+1)\varepsilon^{-\frac{k}{2}}+(a-1)\varepsilon^{\frac{k}{2}}}=$$

$$=\frac{a\left(\varepsilon^{-\frac{k}{2}}-\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right)+\varepsilon^{-\frac{k}{2}}+\varepsilon^{\frac{k}{2}}}{a\left(\varepsilon^{-\frac{k}{2}}+\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right)+\varepsilon^{-\frac{k}{2}}-\varepsilon^{\frac{k}{2}}}=\frac{\cos\frac{\pi k}{5}-ia\sin\frac{\pi k}{5}}{a\cos\frac{\pi k}{5}-i\sin\frac{\pi k}{5}}.$$

В частности, при $k=0$ получаем решение:

$$x_0=\frac{1}{a}.$$

48. Преобразуем левую часть уравнения. Обозначим сумму, стоящую в левой части, через S_m. Тогда:

$$S_1=1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}=\frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)}.$$

Докажем, что

$$S_m=\frac{x^{2m}}{(x-a_1)(x-a_2)\,\dots\,(x-a_{2m})}.$$

Допустим, что равенство справедливо при $m=n$, и докажем, что оно будет справедливо и при $m=n+1$. Имеем:

$$S_{n+1}=\frac{x^{2n}}{(x-a_1)\,\dots\,(x-a_{2n})}+\frac{a_{2n+1}x^{2n}}{(x-a_1)\,\dots\,(x-a_{2n})(x-a_{2n+1})}+$$

$$+\frac{a_{2n+2}x^{2n+1}}{(x-a_1)\,\dots\,(x-a_{2n+2})}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и проделав необходимые преобразования, действительно получим:

$$S_{n+1}=\frac{x^{2n+2}}{(x-a_1)\,\dots\,(x-a_{2n+2})}.$$

Теперь наше уравнение примет вид:

$$\frac{x^{2m}-2px^m+p^2}{(x-a_1)\,\dots\,(x-a_{2m})}=0$$

или

$$(x^m-p)(x^m-p)=0.$$

Уравнение имеет m двойных корней.

49. 1° Имеем: $x_1+x_2+x_3=-p$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$; $x_1x_2x_3=-r$.

Из второго равенства получаем:

$$x_1x_2+x_1x_2+x_1^2=x_1(x_1+x_2+x_3)=q,$$

откуда

$$x_1=-\frac{q}{p}.$$

Пользуясь первым равенством, находим:

$$x_2+x_3=\frac{q-p^2}{p}.$$

Из равенства третьего имеем:

$$x_2x_3=\frac{rp}{q}.$$

Остается только построить квадратное уравнение, которому удовлетворяют x_2 и x_3.

2° Решается аналогично предыдущему.

50. 1° Пользуясь тождеством задачи 4 этого параграфа, мы можем нашу систему переписать следующим образом:

$$(y+z+a)(y+z\varepsilon+a\varepsilon^2)(y+z\varepsilon^2+a\varepsilon)=0,$$
$$(z+x+b)(z+x\varepsilon+b\varepsilon^2)(z+x\varepsilon^2+b\varepsilon)=0,$$
$$(x+y+c)(x+y\varepsilon+c\varepsilon^2)(x+y\varepsilon^2+c\varepsilon)=0.$$

Для того чтобы найти все решения данной системы, нужно рассмотреть все возможные 27 комбинаций. Таким образом, мы получим 27 систем, каждая из которых содержит три уравнения, линейные относительно неизвестных x, y и z.

Если каждой из этих систем дать трехзначный номер, в котором место цифры будет соответствовать номеру уравнения, а сама цифра — номеру сомножителя в этом уравнении, то эти 27 систем запишутся так:

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133,
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233,
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.

Например, в системе 213 из первого уравнения взят второй сомножитель, из второго уравнения взят первый сомножитель и из третьего уравнения третий сомножитель, т. е. системой 213 будет следующая:

$$y+z\varepsilon+a\varepsilon^2=0,\ z+x+b=0,\ x+y\varepsilon^2+c\varepsilon=0.$$

Приведем еще несколько систем в развернутом виде:

$$y+z+a=0,\ z+x+b=0,\ x+y+c=0, \qquad (111)$$
$$y+z\varepsilon+a\varepsilon^2=0,\ z+x\varepsilon^2+b\varepsilon^2=0,\ x+y\varepsilon+c\varepsilon^2=0, \qquad (323)$$
$$y+z\varepsilon^2+a\varepsilon=0,\ z+x\varepsilon^2+b\varepsilon=0,\ x+y\varepsilon^2+c\varepsilon=0, \qquad (333)$$
$$y+z+a=0,\ z+x\varepsilon+b\varepsilon^2=0,\ x+y\varepsilon+c\varepsilon^2=0 \qquad (122)$$

и т. д.

2° Имеем:

$$x^4=xyzu+a,$$
$$y^4=xyzu+b,$$
$$z^4=xyzu+c,$$
$$u^4=xyzu+d.$$

Перемножая эти уравнения и полагая $xyzu=t$, найдем:

$$t^4=(t+a)(t+b)(t+c)(t+d).$$

Отсюда для определения t имеем следующее уравнение:

$$(a+b+c+d)\,t^3=(ab+ac+\ldots)\,t^2+(abc+acd+\ldots)\,t+abcd=0.$$

Но

$$a+b+c+d=0,$$

поэтому для нахождения t получаем квадратное уравнение. Найдя t, легко получаем x, y, z и u.

51. Имеем:

$$1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^n=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(1+x)-1}=$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k x^k-1\right\}=\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k x^{k-1}.$$

Отсюда следует, что член, содержащий x^k, будет:

$$C_{n+1}^{k+1}x^k.$$

52. Имеем:

$$(x+1)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^{s-1}x^{s-1}+C_n^sx^s+\ldots+x^n.$$

Так как этот многочлен умножается на трехчлен второй степени:

$$(s-2)\,x^2+nx-s,$$

то ясно, что коэффициент при x^s в произведении будет равен:

$$(s-2)\,C_n^{s-2}+nC_n^{s-1}-sC_n^s.$$

Произведя необходимые преобразования, получим, что это последнее выражение действительно равно:

$$nC_n^{s-2}.$$

53. Положим:

$$x=1+\alpha,$$

где $\alpha>0$ (так как $x>1$).

Тогда имеем:

$$px^q-qx^p-p+q=p\,(1+\alpha)^q-q\,(1+\alpha)^p-p+q=$$

$$=p\left\{1+q\alpha+\frac{q\,(q-1)}{1\cdot 2}\alpha^2+\ldots\right\}-q\left\{1+p\alpha+\frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}\alpha^2+\ldots\right\}-p+q=$$

$$=(pC_q^2-qC_p^2)\,\alpha^2+(pC_q^3-qC_p^3)\,\alpha^3+\ldots$$

Так как $q>p$, то можно доказать, что в разложении все члены будут положительными [коэффициент при α^k (если $k>p$) будет равен pC_q^k]. Таким образом, для того чтобы доказать справедливость нашего утверждения, достаточно доказать, что

$$\Delta=pC_q^k-qC_p^k>0,$$

если $q>p$ и $k\leqq p$.

Имеем:

$$\Delta = p\frac{q(q-1)\ \dots\ (q-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ k} - q\frac{p(p-1)\ \dots\ (p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ k} =$$

$$= \frac{pq}{k!}\left\{(q-1)(q-2)\ \dots\ (q-k+1) - (p-1)(p-2)\ \dots\ (p-k+1)\right\} > 0,$$

так как

$$q-1 > p-1;\quad q-2 > p-2;\dots$$

54. Пусть искомый наибольший член будет:

$$T_k = C_n^k x^{n-k} a^k.$$

Этот член должен быть не меньше двух рядом с ним стоящих членов T_{k-1} и T_{k+1}. Таким образом, имеют место неравенства:

$$T_k \geqq T_{k-1};\quad T_k \geqq T_{k+1}.$$

Отсюда

$$\frac{k}{n-k+1}\cdot\frac{x}{a} \leqq 1,$$

$$\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{a}{x} \leqq 1.$$

Первое из этих неравенств дает:

$$k \leqq \frac{(n+1)a}{x+a}.$$

Из второго же получаем:

$$k \geqq \frac{(n+1)a}{x+a} - 1.$$

Допустим сначала, что $\frac{(n+1)a}{x+a}$ — целое число. Тогда и $\frac{(n+1)a}{x+a} - 1$ будет также целым числом, и так как k есть целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{(n+1)a}{x+a} - 1 \leqq k \leqq \frac{(n+1)a}{x+a},$$

то k может принимать два значения:

$$k = \frac{(n+1)a}{x+a};\quad k = \frac{(n+1)a}{x+a} - 1.$$

В этом случае существуют два смежных члена, которые равны между собою, но больше всех остальных. Обратимся к рассмотрению того случая, когда $\frac{(n+1)a}{x+a}$ — не целое число. Тогда имеем:

$$\frac{(n+1)a}{x+a} = \left[\frac{(n+1)a}{x+a}\right] + \theta,$$

где $0 < \theta < 1$ (о символе [ ] см. задачу 35, § 1). Наши неравенства в этом

случае примут вид:

$$k \leqq \left[\frac{(n+1)a}{x+a}\right] + \theta,$$
$$k \geqq \left[\frac{(n+1)a}{x+a}\right] - (1-\theta).$$

Легко видеть, что в этом случае существует только одно значение k, удовлетворяющее нашим неравенствам, именно:

$$k = \left[\frac{(n+1)a}{x+a}\right].$$

Итак, когда $\frac{(n+1)a}{x+a}$ — не целое число, то существует только один член T_k, больший всех остальных.

55. Пусть i и m — некоторые целые положительные числа. Имеем:

$$(x+1)^m - x^m = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2} + \ldots + mx + 1.$$

Заменяя здесь x через $x+1$, получим:

$$(x+2)^m - (x+1)^m = m(x+1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x+1)^{m-2} + \ldots + m(x+1) + 1.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, найдем:

$$(x+2)^m - 2(x+1)^m + x^m = m(m-1)x^{m-2} + p_1x^{m-3} + \ldots$$

Аналогично получим:

$$(x+3)^m - 3(x+2)^m + 3(x+1)^m - x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + p_2x^{m-4} + \ldots$$

Методом математической индукции можно доказать следующее общее тождество:

$$(x+i)^m - \frac{i}{1}(x+i-1)^m + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}(x+i-2)^m + \ldots + (-1)^i x^m =$$
$$= m(m-1)\ldots(m-i+1)x^{m-i} + px^{m-i-1} + \ldots$$

Отсюда легко получить, что при $i=m$

$$(x+m)^m - \frac{m}{1}(x+m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x+m-2)^m + \ldots + (-1)^m x^m = m!$$

Если же $i > m$, то получаем:

$$(x+i)^m - \frac{i}{1}(x+i-1)^m + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}(x+i-2)^m + \ldots + (-1)^i x^m = 0.$$

Полагая в этих последних равенствах $x=0$, находим искомые тождества.

56. Имеем:

$$(x+ai)^n = x^n + C_n^1x^{n-1}ai + C_n^2x^{n-2}a^2i^2 + C_n^3x^{n-3}a^3i^3 + \ldots =$$
$$= \left\{x^n - C_n^2x^{n-2}a^2 + C_n^4x^{n-4}a^4 - \ldots\right\} + i\left\{C_n^1x^{n-1}a - C_n^3x^{n-3}a^3 + \ldots\right\}.$$

Переходя к сопряженным величинам, получим:

$$(x-ai)^n = \left\{x^n - C_n^2x^{n-2}a^2 + C_n^4x^{n-4}a^4 - \ldots\right\} - i\left\{C_n^1x^{n-1}a - C_n^3x^{n-2}a^3 + \ldots\right\}.$$

Перемножая почленно оба эти равенства, находим искомый результат.

57. 1° Наше произведение мы можем записать следующим способом:

$$\sum_{s=0}^{n} x^s \sum_{t=0}^{n} x^t = \sum_{l=0}^{2n} A_l x^l.$$

Отсюда следует, что

$$A_l = \sum_{\substack{s+t=l;\\ 0\leqq s\leqq n\\ 0\leqq t\leqq n}} 1$$

Допустим сначала $l \leqq n$. Тогда s может принимать значения $s=0, 1, 2\ldots l$ и, следовательно:

$$A_l = l+1,$$

если $l \leqq n$.

Если же $n < l \leqq 2n$, то положим:

$$l = n + l',$$

где $1 \leqq l' \leqq n$; $l' = l - n$.

В этом случае s может принимать только следующие значения:

$$s = l', \qquad l'+1, \ \ldots\ , n.$$

Всего значений будет:

$$n-(l'-1) = n-(l-n-1) = 2n-l+1.$$

Итак:

$$A_l = 2n+1-l, \text{ если } n < l \leqq 2n.$$

Легко видеть, что $A_{n-k} = A_{n+k} = n-k+1$.

В самом деле, развертывая произведение, непосредственно получаем:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+$$
$$+(n+1)x^n+nx^{n+1}+\ldots+2x^{2n-1}+x^{2n}.$$

2° В этом случае имеем:

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s x^s \sum_{t=0}^{n} x^t = \sum_{l=0}^{2n} A_l x^l.$$

Отсюда

$$A_l = \sum_{\substack{l=s+t;\\ 0\leqq s\leqq n\\ 0\leqq t\leqq n}} (-1)^s.$$

Рассматривая опять отдельно случаи, когда $l \leqq n$ и когда $l > n$, приходим к выводу:

если $l \leqq n$, то $A_l = \dfrac{1+(-1)^l}{2}$,

если $l > n$, то $A_l = 0$ при l нечетном и
$A_l = (-1)^n$ при l четном.

Таким образом, $A_l = 0$ при любом нечетном l, т. е. произведение содержит только четные степени x. При этом, если n четное, то все коэффициенты (у четных степеней) равны $+1$, если же n нечетное, то половина

этих коэффициентов равна $+1$, а половина равна -1.

$$(A_0=A_2=\ldots=A_{n-1}=+1;\ A_{n+1}=A_{n+3}=\ldots=A_{2n}=-1)$$

3° Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k\sum_{s=0}^{n}(s+1)x^s=\sum_{l=0}^{2n}A_l x^l.$$

Отсюда

$$A_l=\sum_{\substack{k+s=l\\0\leqq k\leqq n\\0\leqq s\leqq n}}(k+1)(s+1)=\sum_{\substack{k+s=l\\0\leqq k\leqq n\\0\leqq s\leqq n}}(ks+l+1)$$

Предположим сначала, что $l\leqq n$, тогда k может принимать только следующие значения: $0, 1, 2, \ldots, l$. Соответствующие значения s будут: $l, l-1, \ldots, 0$.

Поэтому

$$A_l=\sum_{k=0}^{l}[k(l-k)+l+1]=l\sum_{k=0}^{l}k-\sum_{k=0}^{l}k^2+(l+1)^2=\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6},$$

считая известным, что

$$1^2+2^2+\ldots+l^2=\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}$$

(см. задачу 25, § 7).

Допустим далее, что $n<l\leqq 2n$, и положим $l=n+l'$, где $1\leqq l'\leqq n$. Тогда k может принимать только следующие значения:

$$l',\ l'+1,\ \ldots,\ n$$

и, следовательно:

$$A_l=\sum_{k+s=l}(ks+l+1)=\sum_{k=l-s}[k(l-k)+l+1]=l\sum_{k=l-n}^{n}k-\sum_{k=l-n}^{n}k^2+(l+1)(2n-l+1)=$$

$$=\frac{(2n-l+1)(l^2+2l+2)}{2}+\frac{(l-n-1)(l-n)(2l-2n-1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4° Решается аналогично предыдущему.

58. 1° Имеем:

$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n,$$

$$1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n=(1-1)^n=0.$$

Складывая эти два равенства, а затем вычитая, получаем искомое тождество.

2° и 3° сводится к 1°, если принять во внимание, что $C_{2n}^k=C_{2n}^{2n-k}$.

59. Рассмотрим тождество:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n.$$

Положим в этом тождестве последовательно $x=1, \varepsilon, \varepsilon^2$, где $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

Получаем:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + C_n^3\varepsilon^3 + \ldots$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon^2 + C_n^2\varepsilon^4 + C_n^3\varepsilon^6 + \ldots$$

Но $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=0$, если k не делится на 3, и $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=3$, если k делится на 3.

Следовательно:

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3\left\{C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots\right\}.$$

Так как для ε можно принять значение

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

то

$$1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = -\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Поэтому

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

Отсюда и получаем:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

два другие равенства получатся аналогично предыдущему при рассмотрении сумм:

$$2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n,$$

$$2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n.$$

60. Решение аналогично решению предыдущей задачи. Рассмотреть $(1+i)^n$.

61. Так как $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{1\cdot 2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}$, то

$$2C_k^2 = k^2 - k.$$

Следовательно,

$$2\sum_{k=2}^{n} C_k^2 = \sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k.$$

Отсюда и получается наше тождество.

62. Пусть $a_1 = C_n^k$; $a_2 = C_n^{k+1}$; $a_3 = C_n^{k+2}$; $a_4 = C_n^{k+3}$.

Тогда:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{n-k}{k+1}; \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{n-k-2}{k+3}; \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{n-k-1}{k+2}.$$

Остается только доказать:

$$\frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}}+\frac{1}{1+\frac{a_4}{a_3}}=\frac{2}{1+\frac{a_3}{a_2}}.$$

63. Если переписать наше равенство в виде:

$$\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!\,(n-3)!}+\frac{n!}{5!\,(n-5)!}+\ldots+\frac{n!}{(n-1)!\,1!}=2^{n-1},$$

то задача сводится к доказательству следующего соотношения (см. задачу 58):

$$C_n^1+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}=2^{n-1}.$$

64. Рассмотрим равенство:

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}. \qquad (*)$$

Далее:

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\frac{(-1)^n}{2^n}(1-i\sqrt{3})^n=\frac{(-1)^n}{2^n}\{1+C_n^1(-i\sqrt{3})+$$
$$+C_n^2(-i\sqrt{3})^2+C_n^3(-i\sqrt{3})^3+\ldots\}=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n}\{1-3C_n^2+\ldots-i\sqrt{3}(C_n^1-3C_n^3+3^2C_n^5-3^3C_n^7+\ldots)\}.$$

Приравнивая коэффициенты при i в обеих частях равенства (*), получим:

$$-\sqrt{3}(C_n^1-3C_n^3+3^2C_n^5-3^3C_n^7+\ldots)=(-1)^n\ 2^n\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Отсюда

$$s=C_n^1-3C_n^3+3^2C_n^5-3^3C_n^7+\ldots=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Отсюда легко получаем:

$s=0$, если $n\equiv 0 \pmod 3$,
$s=2^{n-1}$, если $n\equiv 1$ или $2 \pmod 6$,
$s=-2^{n-1}$, если $n\equiv 4$ или $5 \pmod 6$.

65. Рассмотрим выражение:

$$(1+i)^n.$$

Имеем:

$$(1+i)^n=1+C_n^1i+C_n^2i^2+C_n^3i^3+\ldots$$

Отсюда

$$(1+i)^n=(1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots)+i(C_n^1-C_n^3+C_n^5-\ldots).$$

Но

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому

$$\sigma = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4},$$

$$\sigma' = C_1^n - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что, если $n \equiv 0 \pmod 4$, т. е. $n = 4m$, то

$$\sigma = (-1)^m 2^{2m}; \quad \sigma' = 0.$$

Если же $n \equiv 1 \pmod 4$, т. е. $n = 4m + 1$, то

$$\sigma = \sigma' = (-1)^m 2^{2m}.$$

Далее, если $n \equiv 3 \pmod 4$, т. е. $n = 4m + 3$, то

$$\sigma = (-1)^{m+1} 2^{2m+1}; \quad \sigma' = (-1)^m 2^{2m+1}.$$

Наконец, если $n \equiv 2 \pmod 4$, т. е. $n = 4m + 2$, то

$$\sigma = 0, \ \sigma' = (-1)^m 2^{2m+1}.$$

66. 1. Запишем нашу сумму сокращенно:

$$s = 1 \cdot C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1) C_n^n = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1) C_n^k.$$

Введем новую переменную суммирования. Положим: $k = n - k'$. Тогда сумма перепишется так:

$$s = \sum_{k'=n}^{k'=0} (n - k' + 1) C_n^{n-k'} = \sum_{k=0}^{k=n} (n - k + 1) C_n^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} [n + 2 - (k+1)] C_n^k = (n+2) \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k - \sum_{k=0}^{k=n} (k+1) C_n^k =$$

$$= (n+2) 2^n - s.$$

Следовательно:

$$2s = (n+2) 2^n; \quad s = (n+2) 2^{n-1}.$$

Можно поступать для вычисления этой суммы и несколько иначе.

Перепишем ее следующим способом:

$$s = (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n) + (C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) = 2^n + n + 2\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} +$$

$$+ 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + n(n-1) + n \cdot 1 =$$

$$= 2^n + n\left\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \ldots + (n-1) + 1\right\} =$$

$$= 2^n + n\left\{C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right\} = 2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

2. Имеем:

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = n - 2\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} +$$

$$+ 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + (-1)^{n-1} n =$$

$$= n\left\{1 - \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{n-1}{1} +\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1}\right\} = n(1-1)^{n-1} = 0.$$

67. Перепишем нашу сумму следующим способом:

$$\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n=$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{\frac{(n+1)n}{1\cdot2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+(-1)^{n-1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{\left[1-\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1\cdot2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+(-1)^{n+1}\right]-1+\frac{n+1}{1}\right\}=\frac{1}{n+1}\left\{(1-1)^{n+1}+n\right\}=\frac{n}{n+1}.$$

68. 1° Рассмотрим следующий многочлен:

$$(1+x)^{n+1}=1+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+\ldots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}.$$

Отсюда

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0x+\frac{C_n^1}{2}x^2+\frac{C_n^2}{3}x^3+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1}.$$

Полагая здесь $x=1$, получаем искомое тождество.

2° Получается из предыдущего тождества при $x=2$.

69. Положим

$$C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n=u_n.$$

Тогда имеем:

$$u_n-u_{n-1}=\left\{n-\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+\frac{1}{3}\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\right\}-$$

$$-\left\{n-1-\frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}+\frac{1}{3}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3}-\ldots\right\}=$$

$$=\{n-(n-1)\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{3}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3}\right\}+\ldots=$$

$$=1-\frac{n-1}{1\cdot2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{n-\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}-\ldots\right\}=\frac{1}{n}\{1-(1-1)^n\}=\frac{1}{n}.$$

Итак:

$$u_n-u_{n-1}=\frac{1}{n}.$$

Поэтому можем написать ряд равенств:

$$u_2-u_1=\frac{1}{2},$$

$$u_3-u_2=\frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots$$

$$u_n-u_{n-1}=\frac{1}{n}.$$

Складывая эти равенства почленно, найдем:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

70. 1° Можно поступить следующим образом. Выражение, стоящее в левой части, есть коэффициент при x^n, в следующем многочлене:

$$s = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+2} + \ldots + (1+x)^{n+k}.$$

Преобразуем этот многочлен. Имеем:

$$s = (1+x)^n \left\{ 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^k \right\} =$$
$$= (1+x)^n \frac{(1+x)^{k+1} - 1}{x} = \frac{1}{x} \left\{ (1+x)^{n+k+1} - (1+x)^n \right\}.$$

Коэффициент при x^{n+1} в многочлене, стоящем внутри фигурной скобки, равен

$$C_{n+k+1}^{n+1}.$$

Наше предложение доказано.

2° Выражение, стоящее в левой части, есть коэффициент при x^n в следующем многочлене:

$$x^n (1+x)^n - x^{n-1} (1+x)^n + x^{n-2} (1+x)^n + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^h x^{n-h} (1+x)^n = (1+x)^n \left\{ x^n - x^{n-1} + \ldots + (-1)^h x^{n-h} \right\} =$$
$$= (1+x)^{n-1} \left\{ x^{n+1} + (-1)^h x^{n-h} \right\}.$$

Легко видеть, что коэффициент при x^n в последнем выражении равен

$$(-1)^h C_{n-1}^h.$$

71. 1° Рассмотрим следующие многочлены:

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x_n^s; \quad (1+x)^m = \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t.$$

Имеем:

$$(1+x)^n (1+x)^m = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t = (1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} C_{m+n}^p x^p.$$

Отсюда следует искомое равенство.

2° Следует из 1°.

72. 1° Рассмотрим произведение:

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$

Имеем:

$$\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{n} C_n^t x^t = \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^l x^l.$$

Отсюда

$$C_{2n}^l = \sum_{s+t=l} C_n^s C_n^t.$$

Следовательно:

$$C_{2n}^n = \sum_{s+t=n} C_n^s \cdot C_n^t = \sum_{s=0}^{n} C_n^s C_n^{n-s} = \sum_{s=0}^{n} (C_n^s)^2.$$

2° В этом случае рассмотрим следующее произведение:

$$(1+x)^m (1-x)^m = (1-x^2)^m. \qquad (*)$$

Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s C_m^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l C_m^l x^{2l},$$

поэтому

$$\sum_{s+t=2l} (-1)^s C_m^s C_m^t = (-1)^l C_m^l.$$

Допустим сначала, что m четное, и положим $m=2n$. Пусть $l=n$. Тогда:

$$\sum_{s+t=2n} (-1)^s C_{2n}^s C_{2n}^{2n-t} = (-1)^n C_{2n}^n.$$

Отсюда

$$\sum_{s=0}^{2n} (-1)^s (C_{2n}^s)^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$$

3° Если же m нечетное, то полагаем $m=2n+1$. Коэффициент при x^{2n+1} в левой части равенства (*) равен:

$$\sum_{s+t=2n+1} (-1)^s C_{2n+1}^s C_{2n+1}^t = \sum_{s=0}^{2n+1} (-1)^s (C_{2n+1}^s)^2.$$

Но правая часть равенства (*) показывает, что этот коэффициент должен равняться нулю (так как из разложения легко видно, что отсутствуют нечетные степени x). Поэтому

$$\sum_{s=0}^{2n+1} (-1)^s (C_{2n+1}^s)^2 = 0$$

и равенство 3° доказано.

4° Имеем:

$$C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + \ldots + nC_n^n x^n = nx(1+x)^{n-1},$$
$$C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n = (1+x)^n.$$

Перемножая почленно оба эти равенства, найдем:

$$\sum_{s=0}^{n} s\, C_n^s x^s \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = nx(1+x)^{2n-1}.$$

Приравнивая коэффициент при x^n в обеих частях этих равенств, получаем искомое тождество.

73. Так как произведение $(x-a)(x-b)$ есть трехчлен второй степени, то от деления на него многочлена $f(x)$ в остатке будет обязательно многочлен первой степени относительно x: $\alpha x+\beta$. Таким образом, имеет место тождество:

$$f(x) = (x-a)(x-b)\,Q(x) + \alpha x + \beta.$$

Остается только определить α и β. Положим в этом тождестве сначала $x=a$, а затем $x=b$. Получаем:

$$f(a) = \alpha a + \beta,$$
$$f(b) = \alpha b + \beta.$$

Но нам известно, что остаток от деления $f(x)$ на $x-a$ равен $f(a)$. Поэтому

$$f(a)=A,$$
$$f(b)=B.$$

Итак, для определения α и β получаем следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\alpha a+\beta=A,$$
$$\alpha b+\beta=B.$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{1}{a-b}(A-B);$$

$$\beta=\frac{aB-bA}{a-b}.$$

74. Совершенно так же, как и в предыдущей задаче, приходим к выводу, что остаток от деления будет иметь вид:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Для определения же α, β и γ имеем следующую систему:

$$\alpha a^2+\beta a+\gamma=A,$$
$$\alpha b^2+\beta b+\gamma=B,$$
$$\alpha c^2+\beta c+\gamma=C.$$

Определив α, β, γ из этой системы, мы можем искомый остаток αx^2+ $+\beta x+\gamma$ представить в следующей симметричной форме:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}A+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}B+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}C.$$

75. Остаток будет:

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}y_2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}y_m.$$

76. Искомый многочлен (см. предыдущую задачу) будет иметь вид:

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}A_1+\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_m)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_m)}A_2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m-1})}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})}A_m.$$

77. Наше равенство утверждает, что тождественно равны два многочлена. Для этого достаточно установить, что многочлен:

$$f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}+$$
$$+f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}+\ldots$$
$$\ldots+f(x_m)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}-f(x)$$

тождественно равен нулю. Так как степень этого многочлена равна $m-1$, то достаточно установить, что он обращается в нуль при m различных значениях x. В самом деле, легко проверить, что этот многочлен действи-

тельно равен нулю при

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m.$$

78. Получается из предыдущей задачи, если приравнять коэффициенты при x^{m-1}.

79. Если положить в предыдущей задаче $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{m-2}$, то будет доказано, что $s_n = 0$, если $0 \leqq n < m-1$. Для доказательства тождества:

$$s_{m-1} = 1$$

достаточно положить в тождестве задачи 77 $f(x) = x^{m-1}$ и приравнять коэффициенты при x^{m-1} в обеих частях получающегося тождества. Для того чтобы вычислить s_n при $n > m-1$, можно поступить следующим образом. Допустим, что $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ удовлетворяют уравнению степени m:

$$\alpha^m + p_1\alpha^{m-1} + p_2\alpha^{m-2} + \ldots + p_{m-1}\alpha + p_m = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
-p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_m,\\
p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m,\\
-p_3 &= x_1x_2x_3 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(-1)^k p_k &= x_1x_2\ldots x_k + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Умножим обе части нашего уравнения на α^k. Получаем:

$$\alpha^{m+k} + p_1\alpha^{m+k-1} + p_2\alpha^{m+k-2} + \ldots + p_{m-1}\alpha^{k+1} + p_m\alpha^k = 0.$$

Полагая в этом равенстве последовательно $\alpha = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ и складывая найдем:

$$s_{m+k} + p_1s_{m+k-1} + p_2s_{m+k-2} + \ldots + p_{m-1}s_{k+1} + p_ms_k = 0.$$

При $k = 0$ имеем:

$$s_m + p_1s_{m-1} = 0.$$

Следовательно:

$$s_m = -p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m.$$

При $k = 1$ получаем:

$$s_{m+1} + p_1s_m + p_2s_{m-1} = 0.$$

Далее:

$$s_{m+1} = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m)^2 - (x_1x_2 + \ldots + x_{m-1}x_m) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots,$$

т. е. s_{m+1} равняется сумме произведений по два из множителей:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m.$$

При этом множители могут быть как равные, так и неравные. Аналогичные результаты можно получить для s_{m+2}, s_{m+3} и т. д. Эти же результаты могут быть получены с гораздо большим изяществом и другим способом (Gauss, Theoria interpolationis methodo nova tractata). Положим:

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} = \alpha_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} = \alpha_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})} = \alpha_m.$$

Тогда имеем:

$$s_n = x_1^n \alpha_1 + x_2^n \alpha_2 + \ldots + x_m^n \alpha_m.$$

Образуем следующее выражение:

$$P = \frac{\alpha_1}{1 - x_1 z} + \frac{\alpha_2}{1 - x_2 z} + \ldots + \frac{\alpha_m}{1 - x_m z}. \qquad (*)$$

Пользуясь формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии и предполагая, что z выбрано так, что $|x_1 z| < 1$, $|x_2 z| < 1$, ..., $|x_m z| < 1$, развернем сумму P в бесконечный ряд следующим способом:

$$P = \alpha_1 (1 + x_1 z + x_1^2 z^2 + x_1^3 z^3 + \ldots) + \alpha_2 (1 + x_2 z + x_2^2 z^2 + x_2^3 z^3 + \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_m (1 + x_m z + x_m^2 z^2 + x_m^3 z^3 + \ldots).$$

Иначе:

$$P = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) + (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots + x_m \alpha_m) z +$$
$$+ (x_1^2 \alpha_1 + x_2^2 \alpha_2 + \ldots + x_m^2 \alpha_m) z^2 + \ldots,$$

т. е.

$$P = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + s_3 z^2 + \ldots$$

Положим для краткости:

$$(1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \ldots (1 - x_m z) = Q.$$

Располагая Q по степеням z, можем написать:

$$Q = 1 - \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \ldots \pm \sigma_m z^m,$$

где

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m,$$
$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{m-1} x_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Умножая обе части равенства (*) на $(1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \ldots (1 - x_m z)$, имеем:

$$PQ = \alpha_1 (1 - x_2 z)(1 - x_3 z) \ldots (1 - x_m z) + \alpha_2 (1 - x_1 z)(1 - x_3 z) \ldots (1 - x_m z) +$$
$$+ \alpha_3 (1 - x_1 z)(1 - x_2 z)(1 - x_4 z) \ldots (1 - x_m z) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_m (1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \ldots (1 - x_{m-1} z).$$

Таким образом, произведение PQ есть многочлен относительно z степени $m-1$. Покажем, что он просто равен z^{m-1}, т. е. имеет место тождество:

$$PQ = z^{m-1}.$$

В самом деле, выражение $PQ - z^{m-1}$ обращается в нуль при $z = \frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ..., $\frac{1}{x_m}$. Действительно, при $z = \frac{1}{x_1}$ имеем:

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x_3}{x_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_m}{x_1}\right) - \frac{1}{x_1^{m-1}} = \frac{1}{x_1^{m-1}} - \frac{1}{x_1^{m-1}} = 0.$$

Совершенно так же покажем, что $PQ - z^{m-1}$ обращается в нуль при $z = \frac{1}{x_2}$, ..., $\frac{1}{x_m}$. Но если многочлен степени $m-1$ обращается в нуль при m различных значениях переменной, то он равен нулю тождественно. Таким образом, $PQ - z^{m-1} = 0$ тождественно. Следовательно:

$$\frac{z^{m-1}}{Q} = P.$$

Иначе:

$$z^{m-1}\frac{1}{1-\sigma_1 z+\sigma_2 z^2-\sigma_3 z^3+\ldots\pm\sigma_m z^m}=$$
$$=s_0+s_1 z+\ldots+s_{m-2}z^{m-2}+s_{m-1}z^{m-1}+\ldots$$

Если развернуть левую часть в бесконечный ряд, расположенный по степеням z, то этот ряд начнется только с члена, содержащего z^{m-1}. Поэтому коэффициенты при z^0, z^1, ..., z^{m-2} и в правой части должны быть равны нулю, т. е. имеем:

$$s_0=s_1=s_2=\ldots=s_{m-2}=0.$$

Кроме того, коэффициент при z^{m-1} в левой части равен 1. Поэтому

$$s_{m-1}=1.$$

Теперь наше равенство примет следующий вид:

$$\frac{z^{m-1}}{1-\sigma_1 z+\sigma_2 z^2-\sigma_3 z^3+\ldots\pm\sigma_m z^m}=z^{m-1}+s_m z^m+s_{m+1}z^{m+1}+\ldots$$

Сокращая обе части на z^{m-1}, найдем:

$$\frac{1}{1-\sigma_1 z+\sigma_2 z^2-\sigma_3 z^3+\ldots\pm\sigma_m z^m}=1+s_m z+s_{m+1}z^2+\ldots$$

Иначе:

$$1=(1-\sigma_1 z+\sigma_2 z^2-\sigma_3 z^3+\ldots\pm\sigma_m z^m)(1+s_m z+s_{m+1}z^2+\ldots).$$

Располагая правую часть по степеням z и приравнивая коэффициенты при этих степенях нулю (так как левая часть содержит только 1), найдем:

$$s_m-\sigma_1=0,$$
$$\sigma_2-\sigma_1 s_m+s_{m+1}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, мы получаем возможность вычислить s_m, s_{m+1}, $s_{m+2}\ldots$ Однако, для того чтобы установить общее предложение о структуре s_{m+1}, рассмотрим:

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{1-x_1 z}\cdot\frac{1}{1-x_2 z}\ldots\frac{1}{1-x_m z}=\sum_{s=0}^{\infty}x_1^s z^s\sum_{s'=0}^{\infty}x_2^{s'}z^{s'}\ldots=$$
$$=\sum x_1^s x_2^{s'}x_3^{s''}\ldots z^{s+s'+s''}\ldots$$

Но, с другой стороны:

$$\frac{1}{Q}=1+s_m z+s_{m+1}z^2+\ldots+s_{m+k}z^{k+1}+\ldots,$$

поэтому получаем:

$$s_{m+k}=\sum_{s+s'+s''+\ldots=k+1}x_1^s x_2^{s'}x_3^{s''}\ldots$$

Итак, получаем следующий окончательный результат: s_{m+k} *равняется сумме произведений* $k+1$ *равных или неравных величин, взятых из совокупности* x_1, x_2, ..., x_m. В частности:

$$s_{m+1}=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_1x_2+x_1x_3+\ldots$$
$$\ldots+x_1x_m+x_2x_3+\ldots+\ldots+x_{m-1}x_m,$$

$$s_{m+2}=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_m^3+x_1^2x_2+\ldots+x_{m-1}^2x_m+x_1x_2x_3+\ldots$$

80. Введем следующее обозначение:

$$s_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=\frac{x_1^n}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}+$$
$$+\frac{x_2^n}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}+\ldots+\frac{x_m^n}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}.$$

Имеем:

$$\frac{x_1^{-n}}{(x_1-x_2)\ (x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}=$$
$$=\frac{x_1^{-n-m+2}}{x_1x_2\ldots x_m\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)\ldots\left(\frac{1}{x_m}-\frac{1}{x_1}\right)}=$$
$$=(-1)^{m-1}\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n+m-2}}{\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_m}\right)}\cdot\frac{1}{x_1x_2\ldots x_m},$$

поэтому легко видеть, что

$$s_{-n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=\frac{(-1)^{m-1}}{x_1x_2\ldots x_m}\,s_{n+m-2}\left(\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\ \ldots,\ \frac{1}{x_m}\right).$$

81. Справедливость утверждения следует из тождества задачи 77. Это же тождество дает, что

$$A_1=\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)},$$
$$A_2=\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_2)\ \ldots\ (x_2-x_m)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m=\frac{f(x_m)}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}.$$

82. Составим выражение:

$$\frac{x_1}{\lambda-b_1}+\frac{x_2}{\lambda-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{\lambda-b_n}=1-\frac{(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\ldots(\lambda-a_n)}{(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\ldots(\lambda-b_n)}.\qquad(*)$$

Если перенести все члены в левую часть, привести их к общему знаменателю и отбросить его, то получим слева многочлен относительно λ степени $n-1$.

В силу существования данной нам системы уравнений этот многочлен обращается в нуль при n различных значениях λ, а именно при $\lambda=a_1$, a_2, $\ldots$, a_n. Поэтому он равен тождественно нулю, а следовательно, и исходное равенство (*) является тождеством. Но тогда равенство (*) представляет собою разложение на простейшие дроби следующей дроби:

$$\frac{(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\ldots(\lambda-b_n)-(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\ldots(\lambda-a_n)}{(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\ldots(\lambda-b_n)}.$$

Поэтому неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найдутся по формулам предыдущей задачи, и мы получаем:

$$x_1 = -\frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\ldots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_2)\ldots(b_1-b_n)},$$

$$x_2 = -\frac{(b_2-a_1)(b_2-a_3)\ldots(b_2-a_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\ldots(b_2-b_n)}, \ \ldots$$

83. Легко получается, пользуясь результатом задачи 81.

84. Рассмотрим следующую дробь:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}.$$

Легко видеть, что разность

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)} - 1$$

по приведению к общему знаменателю будет такою дробью, у которой степень числителя ниже степени знаменателя. Эта дробь может быть разложена на простейшие дроби. Поэтому имеет место тождество:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)} = 1 + \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{x-b_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-b_n}.$$

Помножая обе части этого тождества на $x-b_1$, найдем:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_n)} = x-b_1+A_1+\frac{A_2}{x-b_2}(x-b_1)+\ldots+\frac{A_n}{x-b_n}(x-b_1).$$

В этом тождестве мы можем положить:

$$x = b_1.$$

Тогда имеем:

$$A_1 = \frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\ldots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots(b_1-b_n)}.$$

Аналогичные выражения получим и для $A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Итак, имеем следующее тождество:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)} = 1 + \frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\ldots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots(b_1-b_n)} \cdot \frac{1}{x-b_1} +$$

$$+ \frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)\ldots(b_2-a_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\ldots(b_2-b_n)} \cdot \frac{1}{x-b_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(b_n-a_1)(b_n-a_2)\ldots(b_n-a_n)}{(b_n-b_1)(b_n-b_2)\ldots(b_n-b_{n-1})} \frac{1}{x-b_n}.$$

При $x=0$ получаем искомое тождество.

85. Так же, как в предыдущей задаче, легко установить, что

$$\frac{(x+\beta)(x+2\beta)\ldots(x+n\beta)}{(x-\beta)(x-2\beta)\ldots(x-n\beta)} = 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{x-r\beta},$$

где

$$A_r=\frac{(r\beta+\beta)(r\beta+2\beta)\ldots(r\beta+n\beta)}{(r\beta-\beta)(r\beta-2\beta)\ldots[r\beta-(r-1)\beta][r\beta-(r+1)\beta]\ldots(r\beta-n\beta)}.$$

Остается только упростить этот коэффициент.

86. Имеем:

$$c_{k+1}-c_k=\Delta c_k, \quad \text{т. е.} \quad c_{k+1}=c+\Delta c_k,$$

и формула 1° справедлива при $n=1$. Предполагая ее справедливость при показателе, равном n, докажем справедливость при показателе, равном $n+1$. Действительно:

$$c_{k+n+1}=c_{k+n}+\Delta c_{k+n}=$$

$$=\left(c_k+\frac{n}{1}\Delta c_k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 c_k+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 c_k+\ldots+\Delta^n c_k\right)+$$

$$+\Delta\left(c_k+\frac{n}{1}\Delta c_k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 c_k+\ldots+\Delta^n c_k\right)=$$

$$=c_k+\left(\frac{n}{1}+1\right)\Delta c_k+\left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n}{1}\right)\Delta^2 c_k+\ldots+\Delta^{n+1}c_k=$$

$$=c_k+\frac{n+1}{1}\Delta c_k+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\Delta^2 c_k+\ldots+\Delta^{n+1}c_k,$$

и предложение доказано.

Аналогично доказывается и формула 2°. Легко видеть, что при $n=1$ она справедлива. Допустим справедливость ее при индексе, равном n. Тогда имеем:

$$\Delta^{n+1}c_k=\Delta c_{k+n}-\frac{n}{1}\Delta c_{k+n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta c_{k+n-2}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\Delta c_k=(c_{k+n+1}-c_{k+n})-\frac{n}{1}(c_{k+n}-c_{k+n-1})+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(c_{k+n-1}-c_{k+n-2})+\ldots+(-1)^n(c_{k+1}-c_k)=$$

$$=c_{k+n+1}-\frac{n+1}{1}c_{k+n}=\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}c_{k+n-1}+\ldots+(-1)^{n+1}c_k.$$

87. Проверить справедливость этой формулы нетрудно. Мы видим, что правая часть является многочленом степени n относительно x. Обозначим его через $\varphi(x)$, т. е. положим:

$$f(0)+\frac{x}{1}\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(0)+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n f(0)=\varphi(x).$$

Пусть в этом равенстве $x=0$. Получаем: $\varphi(0)=f(0)$, при $x=1$ найдем:

$$\varphi(1)=f(0)+\Delta f(0)=f(1).$$

Пользуясь формулой 1° предыдущей задачи, можно утверждать, что вообще:

$$\varphi(k)=f(k) \quad \text{при} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Таким образом, два многочлена [$\varphi(x)$ и $f(x)$] степени n равны при $n+1$ различных значениях независимой переменной x, следовательно, они равны тождественно, и мы имеем:

$$\varphi(x)=f(x)$$

при любом x.

Выше мы дали только проверку справедливости формул. Не трудно и вывести эту формулу.

Пусть $f(x)$ есть многочлен степени n. Прежде всего мы утверждаем, что можно всегда подобрать коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы имело место тождество

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x(x-1)+A_3x(x-1)(x-2)+\ldots$$
$$\ldots+A_nx(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

В самом деле, разделим многочлен $f(x)$ на многочлен $(x-1)(x-2)\ldots$ $\ldots(x-n+1)$. Так как этот последний многочлен также степени n, то в частном мы получим некоторую постоянную, а в остатке многочлен, степень которого будет не выше $n-1$. Деля этот многочлен на $x(x-1)\ldots$ $\ldots(x-n)$, найдем постоянную A_{n-1} и т. д.

Вычислим теперь эти постоянные $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$.

Положим для краткости:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)=\varphi_k(x) \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Тогда имеем:

$$\Delta\varphi_k(x)=\varphi_k(x+1)-\varphi_k(x)=(x+1)x(x-1)\ldots(x-k+2)-$$
$$-x(x-1)\ldots(x-k+1)=k\cdot x(x-1)\ldots(x-k+2)=k\varphi_{k-1}(x).$$

Для определения $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ поступим следующим образом. Положим в нашем тождестве $x=0$. Так как $\varphi_k(0)=0$, то найдем:

$$A_0=f(0).$$

Возьмем теперь разность от обеих частей нашего тождества. Получаем:

$$\Delta f(x)=A_1\Delta\varphi_1(x)+A_2\Delta\varphi_2(x)+\ldots+A_n\Delta\varphi_n(x)=$$
$$=A_1+2A_2\varphi_1(x)+\ldots+nA_n\varphi_{n-1}(x).$$

Полагая здесь $x=0$, имеем:

$$A_1=\Delta f(0).$$

Далее:

$$\Delta^2 f(x)=2A_2\Delta\varphi_1(x)+\ldots+nA_n\Delta\varphi_{n-1}(x)=2A_2+\ldots+n(n-1)A_n\varphi_{n-2}(x).$$

Отсюда

$$A_2=\frac{\Delta^2 f(0)}{1\cdot 2}.$$

Продолжая эту операцию дальше, найдем все коэффициенты:

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n.$$

88. Заменим в нашем равенстве x через $x+1$. Имеем:

$$(x+1)^n=A_0+A_1x+\frac{A_2}{2!}x(x-1)+\frac{A_3}{3!}x(x-1)(x-2)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_n}{n!}x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Полагая $f(x)=(x+1)^n$ и пользуясь результатом предыдущей задачи, находим:

$$A_s=\Delta^s f(0).$$

Из формулы 2° задачи 86 получаем искомое выражение для A_s.

89. Полагая в формуле 2° задачи 86 $k=0$, получаем:

$$\Delta^n C_0=C_n-\frac{n}{1}C_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}C_{n-2}-\ldots+(-1)^n C_0.$$

Положим:

$$C_0=\frac{1}{(x+n)^2}$$

и примем:

$$C_0=\frac{1}{(x+n)^2},\quad C_1=\frac{1}{(x+n-1)^2},\ \ldots,\ C_n=\frac{1}{x^2};$$

для доказательства нашего тождества останется только доказать, что

$$\Delta^n\frac{1}{(x+n)^2}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n}\right\}.$$

Докажем это индукцией. При $n=1$ формула справедлива. Предполагая, как обычно, ее справедливость при индексе, равном n, докажем справедливость ее и при индексе $n+1$. Имеем:

$$\Delta^{n+1}\frac{1}{(x+n+1)^2}=\Delta\left(\Delta^n\frac{1}{(x+n+1)^2}\right)=$$

$$=\Delta\left\{\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\right)\right\}=$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n}\right\}-$$

$$-\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\right\}=$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}\left\{(x+n+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n}\right)-\right.$$

$$\left.-x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\right)\right\}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ldots+\frac{1}{x+n+1}\right\}.$$

При $x=1$ из нашего тождества следует:

$$\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right\}=\frac{1}{1^2}-\frac{C_n^1}{2^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}.$$

90. Выражение $\varphi_n(x+y)$ будет многочленом n-й степени относительно x. Поэтому мы можем представить его следующим образом (см. задачу 87):

$$\varphi_n(x+y)=A_0+A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\ldots+A_n\varphi_n(x),$$

где

$$A_s = \frac{\Delta^s \varphi_n(y)}{s!}$$

(так как $\varphi_n(x+y)$ переходит в $\varphi_n(y)$ при $x=0$).

Но известно (задача 87), что

$$\Delta \varphi_n(y) = n\varphi_{n-1}(y),$$

следовательно:

$$\Delta^2 \varphi_n(y) = n(n-1)\varphi_{n-2}(y),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^s \varphi_n(y) = n(n-1)\ldots(n-s+1)\varphi_{n-s}(y).$$

Итак:

$$A_s = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)\varphi_{n-s}(y)}{s!} = C_n^s \varphi_{n-s}(y),$$

и наша формула справедлива.

Впрочем справедливость этой формулы может быть установлена и из других соображений. Пусть x и y — целые положительные числа бо́льшие n. Тогда имеют место следующие равенства:

$$(1+z)^x = 1 + xz + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \ldots,$$

$$(1+z)^y = 1 + yz + \frac{y(y-1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \ldots,$$

$$(1+z)^{x+y} = 1 + (x+y)z + \frac{(x+y)(x+y-1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \ldots$$

С другой стороны:

$$(1+z)^x \cdot (1+z)^y = (1+z)^{x+y},$$

т. е.

$$\sum \frac{\varphi_k(x)}{k!} z^k \cdot \sum \frac{\varphi_s(y)}{s!} z^s = \sum \frac{\varphi_n(x+y)}{n!} z^n.$$

Приравнивая коэффициент при z^n в обеих частях этого равенства, получим:

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x) + C_n^1 \varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) + \ldots + C_n^{n-1}\varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y).$$

Пусть y_0 есть какое-либо целое положительное число, большее n. Тогда

$$\varphi_n(x+y_0) \quad \text{и} \quad \varphi_n(x) + C_n^1\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y_0) + \ldots + \varphi_n(y_0)$$

будут два многочлена степени n относительно x, и оба эти многочлена равны между собою при всех целых значениях x, больших n. Следовательно, они равны тождественно при всех значениях x. Однако, y_0 может принимать все целые значения, большие n. Следовательно, совершенно аналогично предыдущему, заключаем, что y_0 может принимать любые значения, и равенство

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x) + C_n^1\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) + \ldots + C_n^{n-1}\varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y)$$

справедливо при любых значениях x и y.

91. Прежде всего, оба тождества, как 1° так и 2°, легко могут быть доказаны методом математической индукции. В самом деле, при $n=1$ тождество 1° имеет место. Допустим, что оно имеет место при всех значениях показателя, не превосходящих n, так что имеем:

$$x^n+y^n=p^n-\frac{n}{1}p^{n-2}q+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}p^{n-4}q^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{n-6}q^3+\ldots$$

Умножим обе части этого равенства на $x+y=p$. Получаем:

$$x^{n+1}+y^{n+1}+xy(x^{n-1}+y^{n-1})=$$
$$=p^{n+1}-\frac{n}{1}p^{n-1}q+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}p^{n-3}q^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{n-5}q^3+\ldots$$

Отсюда

$$x^{n+1}+y^{n+1}=p^{n+1}-\frac{n}{1}p^{n-1}q+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}p^{n-3}q^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{n-5}q^3+\ldots$$
$$\ldots-q\left(p^{n-1}-\frac{n-1}{1}p^{n-3}q+\frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}p^{n-5}q^2-\right.$$
$$\left.-\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{n-7}q^3+\ldots\right)=$$
$$=p^{n+1}-\frac{n+1}{1}p^{n-1}q+\left\{\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}+\frac{n-1}{1}\right\}p^{n-3}q^2-$$
$$-\left\{\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}\right\}p^{n-5}q^2+\ldots=$$
$$=p^{n+1}-\frac{n+1}{1}p^{n-1}q+\frac{(n+1)(n-2)}{1\cdot 2}p^{n-3}q^2-$$
$$-\frac{(n+1)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}p^{n-5}q^2+\ldots,$$

и теорема справедлива при показателе, равном $n+1$.

Совершенно так же можно доказать и предложение 2°.

Заметим, что, если x и y суть корни некоторого квадратного уравнения, то обе формулы представляют собою не что иное как выражение симметрических функций корней этого уравнения через его коэффициенты.

Если положить в этих формулах $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$; $y=\cos\varphi-i\sin\varphi$, то

$$x^n+y^n=2\cos n\varphi;\qquad p=x+y=2\cos\varphi;\qquad q=xy=1;$$
$$\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}=\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Таким образом, мы получаем разложение $\cos n\varphi$ и $\dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ по степеням $\cos\varphi$.

92. Положим:

$$x^k+y^k=S_k;\qquad xy=q.$$

Нужно доказать:

$$S_m+C_m^1qS_{m-1}+C_{m+1}^2q^2S_{m-2}+\ldots+C_{2m-2}^{m-1}q^{m-1}S_1=1.$$

Предполагая справедливость этого равенства, докажем, что

$$S_{m+1}+C_{m+1}^1qS_m+C_{m+2}^2q^2S_{m-1}+\ldots+C_{2m-1}^{m-1}q^{m-1}S_2+C_{2m}^mq^mS_1=1.$$

Мы можем считать, что x и y являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$\alpha^2-\alpha+q=0.$$

Отсюда получаем

$$S_{k+1}=S_k-qS_{k-1}$$

при любом целом k.

Следовательно:

$$\begin{aligned} S_{m+1}&=S_m-qS_{m-1},\\ S_m&=S_{m-1}-qS_{m-2},\\ S_{m-1}&=S_{m-2}-qS_{m-3},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ S_3&=S_2-qS_1,\\ S_2&=S_1-qS_0,\\ S_1&=S_1. \end{aligned}$$

Умножаем эти равенства последовательно на

$$1,\ C^1_{m+1}q,\quad C^2_{m+2}q^2,\ \ldots,\ C^{m-1}_{2m-1}q^{m-1},\quad C^m_{2m}q^m$$

и складываем.

Тогда слева получаем:

$$S_{m+1}+C^1_{m+1}qS_m+C^2_{m+2}q^2S_{m-1}+\ldots+C^{m-1}_{2m-1}q^{m-1}S_2+C^m_{2m}q^mS_1.$$

Нужно доказать только, что правая часть равна 1. Правая часть равна

$$S_m+C^1_{m+1}qS_{m-1}+C^2_{m+2}q^2S_{m-2}+\ldots+C^{m-1}_{2m-1}q^{m-1}S_1+C^m_{2m}q^mS_1-$$
$$-qS_{m-1}-C^1_{m+1}q^2S_{m-2}-C^2_{m+2}q^3S_{m-3}-\ldots-C^{m-1}_{2m-1}q^mS_0.$$

Иначе:

$$S_m+(C^1_m+1)qS_{m-1}+(C^2_{m+1}+C^1_{m+1})q^2S_{m-2}+\ldots$$
$$\ldots+(C^{m-1}_{2m-2}+C^{m-2}_{2m-2})q^{m-1}S_1+C^m_{2m}q^mS_1-qS_{m-1}-C^1_{m+1}q^2S_{m-2}-\ldots$$
$$\ldots-C^{m-2}_{2m-2}q^{m-1}S_1-C^{m-1}_{2m-1}q^mS_0=$$
$$=\left\{S_m+C^1_mqS_{m-1}+C^2_{m+1}q^2S_{m-2}+\ldots+C^{m-1}_{2m-2}q^{m-1}S_1\right\}+$$
$$+C^m_{2m}q^mS_1-C^{m-1}_{2m-1}q^mS_0.$$

Но фигурная скобка, по условию, равна 1, а $C^m_{2m}S_1-C^{m-1}_{2m-1}S_0=0$, так как $S_1=1$, а $S_0=2$. Итак, правая часть равна 1. Легко видеть (кроме того), что при $m=1$ наше равенство справедливо. Теперь мы можем утверждать, что оно справедливо при любом m.

93. Если $u+v=1$, то

$$u^m(1+C^1_mv+C^2_{m+1}v^2+\ldots+C^{m-1}_{2m-2}v^{m-1})+$$
$$+v^m(1+C^1_mu+C^2_{m+1}u^2+\ldots+C^{m-1}_{2m-2}u^{m-1})=1.$$

Положим:

$$u=\frac{x-a}{b-a};\qquad v=\frac{x-b}{a-b}.$$

Тогда, действительно, будет: $u+v=1$. Далее:

$$\frac{1}{u^m v^m}=\left(\frac{1}{v^m}+C_m^1\frac{1}{v^{m-1}}+C_{m+1}^2\frac{1}{v^{m-2}}+\ldots+C_{2m-2}^{m-1}\frac{1}{v}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{u^m}+C_m^1\frac{1}{u^{m-1}}+C_{m+1}^2\frac{1}{u^{m-2}}+\ldots+C_{2m-2}^{m-1}\frac{1}{u}\right).$$

Отсюда и получаем наше тождество.

94. Легко видеть, что всегда можно подобрать постоянные $A_1, A_2, \ldots$, чтобы имело место тождество:

$$(1+t)^n=1+t^n+A_1t(1+t^{n-2})+A_2t^2(1+t^{n-4})+\ldots$$

В самом деле, $(1+t)^n$ есть многочлен степени n относительно t. Разделим его на t^n+1. Тогда в остатке получится многочлен степени не выше $n-1$. Его мы разделим на $t(t^{n-2}+1)$ и т. д. Ясно, что частные от деления будут постоянные, однозначно определяющиеся в процессе деления. Если положить в образующемся тождестве $t=\frac{y}{x}$, то найдем:

$$(x+y)^n=x^n+y^n+A_1xy(x^{n-2}+y^{n-2})+A_2x^2y^2(x^{n-4}+y^{n-4})+\ldots$$

Для определения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots$ положим в этом тождестве:

$$x=\cos\varphi+i\sin\varphi; \qquad y=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Тогда имеем:

$$(2\cos\varphi)^n=2\cos n\varphi+2A_1\cos(n-2)\varphi+2A_2\cos(n-4)\varphi+\ldots$$

Припоминая известные формулы, дающие разложение степени косинуса по косинусам кратных дуг (см. задачу 10, 1° и 3°), найдем выражения для $A_1, A_2, \ldots$

95. Пусть y_1 и y_2 будут корнями некоторого квадратного уравнения:

$$y^2+py+q=0.$$

Составим это уравнение, т. е. найдем p и q.

Для этого умножим первое уравнение на q, второе на p, третье на единицу и сложим. Получаем

$$x_1(y_1^2+py_1+q)+x_2(y_2^2+py_2+q)=a_1q+a_2p+a_3=0,$$

так как

$$y_1^2+py_1+q=y_2^2+py_2+q=0.$$

Далее, умножаем второе уравнение на q, третье на p и четвертое на единицу. Имеем:

$$x_1y_1(y_1^2+py_1+q)+x_2y_2(y_2^2+py_2+q)=a_2q+a_3p+a_4=0.$$

Итак, для определения p и q получаем линейную систему:

$$a_1q+a_2p+a_3=0,$$
$$a_2q+a_3p+a_4=0.$$

Найдя отсюда p и q из квадратного уравнения $y^2+py+q=0$, определим y_1 и y_2. Зная же y_1 и y_2, например, из первых двух уравнений, определим x_1 и x_2. Совершенно так же решается и общая система. Именно, допустим, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются корнями некоторого уравнения степени n:

$$y^n+p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}+\ldots+p_{n-1}y+p_n=0.$$

Чтобы составить это уравнение, умножим уравнение (1) на p_n, уравнение (2) на p_{n-1} и т. д. и, наконец, уравнение $(n+1)$ на 1 и сложим. Тогда

получим:

$$a_1 p_n + a_2 p_{n-1} + \ldots + a_{n+1} = 0.$$

Затем умножаем уравнение (2) на p_n, уравнение (3) на p_{n-1} и т. д. и, наконец, уравнение $(n+2)$ на 1. Получаем вторую линейную зависимость для определения p_n, p_{n-1}, ... Продолжая эту операцию дальше, мы получим в конце концов для определения неизвестных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n линейных уравнений. Если же $p_1, p_2, \ldots, p_n$ будут найдены, то для определения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ придется решить уравнение:

$$y^n + py^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y + p_n = 0.$$

Если же $y_1, y_2, \ldots, y_n$ известны, то для нахождения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ останется только решить систему линейных уравнений.

Мы приведем здесь также оригинальный способ решения этой системы, принадлежащий S. Ramanujan'у (Note on a set of simultaneous equations. Collected Papers, p. 18). Рассмотрим следующее выражение:

$$\Phi(\theta) = \frac{x_1}{1-\theta y_1} + \frac{x_2}{1-\theta y_2} + \ldots + \frac{x_n}{1-\theta y_n}.$$

Но

$$\frac{x_1}{1-\theta y_1} = x_1 (1 + \theta y_1 + \theta^2 y_1^2 + \theta^3 y_1^3 + \ldots),$$

$$\frac{x_2}{1-\theta y_2} = x_2 (1 + \theta y_2 + \theta^2 y_2^2 + \theta^3 y_2^3 + \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_n}{1-\theta y_n} = x_n (1 + \theta y_n + \theta^2 y_n^2 + \theta^3 y_n^3 + \ldots).$$

Следовательно:

$$\Phi(\theta) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)\theta + \\ + (x_1 y_1^2 + \ldots + x_n y_n^2)\theta^2 + \ldots + (x_1 y_1^{2n-1} + x_2 y_2^{2n-1} + \ldots + x_n y_n^{2n-1})\theta^{2n-1} + \\ + (x_1 y_1^{2n} + \ldots + x_n y_n^{2n})\theta^{2n} + \ldots$$

Но в силу данных уравнений получим:

$$\Phi(\theta) = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2 + \ldots + a_{2n}\theta^{2n-1} + \ldots$$

Если же привести дроби к общему знаменателю, то найдем:

$$\Phi(\theta) = \frac{A_1 + A_2\theta + A_3\theta^2 + \ldots + A_n\theta^{n-1}}{1 + B_1\theta + B_2\theta^2 + \ldots + B_n\theta^n}.$$

Отсюда

$$(a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2 + \ldots + a_{2n}\theta^{2n-1} + \ldots)(1 + B_1\theta + B_2\theta^2 + \ldots + B_n\theta^n) = \\ = A_1 + A_2\theta + \ldots + A_n\theta^{n-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_2 + a_1 B_1, \\ A_3 &= a_3 + a_2 B_1 + a_1 B_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= a_n + a_{n-1} B_1 + a_{n-2} B_2 + \ldots + a_1 B_{n-1}, \\ 0 &= a_{n+1} + a_n B_1 + \ldots + a_1 B_n, \\ 0 &= a_{n+2} + a_{n+1} B_1 + \ldots + a_2 B_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= a_{2n} + a_{2n-1} B_1 + \ldots + a_n B_n. \end{aligned}$$

Так как величины $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ известны, то из последних уравнений можно найти сначала $B_1, B_2, \ldots, B_n$, а затем $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Зная же величины A_i и B_i, можно построить рациональную дробь $\Phi(\theta)$. Построив эту дробь, разложим ее на простейшие дроби. Пусть, например, имеет место следующее разложение:

$$\Phi(\theta)=\frac{p_1}{1-q_1\theta}+\frac{p_2}{1-q_2\theta}+\frac{p_3}{1-q_3\theta}+\ldots+\frac{p_n}{1-q_n\theta}.$$

Тогда ясно, что

$$\begin{array}{ll} x_1=p_1; & y_1=q_1; \\ x_2=p_2; & y_2=q_2; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_n=p_n; & y_n=q_n, \end{array}$$

и система решена.

Интересно, что Hardy, перечисляя семь наиболее замечательных (по его мнению) из работ Ramanujan'а, причисляет к ним и ту, изложение которой мы только что дали.

96. Для данного случаи имеем:

$$\Phi(\theta)=\frac{2+\theta+3\theta^2+2\theta^3+\theta^4}{1-\theta-5\theta^2+\theta^3+3\theta^4-\theta^5}.$$

Разлагая же эту дробь на простейшие, получим следующие значения неизвестных:

$$\begin{array}{ll} x=-\dfrac{3}{5}; & p=-1; \\ y=\dfrac{18+\sqrt{5}}{10}; & q=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \\ z=\dfrac{18-\sqrt{5}}{10}; & r=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \\ u=-\dfrac{8+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; & s=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ v=\dfrac{8-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; & t=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{array}$$

97. 1° Имеем:

$$(m,\mu)=\frac{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-\mu})(1-x^{m-\mu+1})\ldots(1-x^{m-1})(1-x^m)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\mu})(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-\mu})}.$$

Отсюда ясно, что

$$(m,\mu)=(m,m-\mu).$$

2° Действительно:

$$(m,\mu+1)=\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})(1-x^{m-\mu})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\mu})(1-x^{\mu+1})}=$$

$$=\frac{(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu})(1-x^{m-\mu-1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\mu+1})}\cdot\frac{1-x^m}{1-x^{m-\mu-1}}.$$

Итак:

$$(m, \mu+1)=(m-1, \mu+1)\frac{1-x^m}{1-x^{m-\mu-1}}=$$
$$=(m-1, \mu+1)\frac{1-x^{m-\mu-1}+x^{m-\mu-1}-x^m}{1-x^{m-\mu-1}}=$$
$$=(m-1, \mu+1)\left[1+x^{m-\mu-1}\frac{1-x^{\mu+1}}{1-x^{m-\mu-1}}\right]=$$
$$=(m-1, \mu+1)+x^{m-\mu-1}(m-1, \mu).$$

3° Пользуясь результатом 2°, получаем ряд равенств:

$$(m, \mu+1)=(m-1, \mu+1)+x^{m-\mu-1}(m-1, \mu),$$
$$(m-1, \mu+1)=(m-2, \mu+1)+x^{m-\mu-2}(m-2, \mu),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\mu+2, \mu+1)=(\mu+1, \mu+1)+x(\mu+1, \mu),$$
$$(\mu+1, \mu+1)=(\mu, \mu).$$

Складывая эти равенства почленно, найдем:

$$(m, \mu+1)=(\mu, \mu)+x(\mu+1, \mu)+\ldots+x^{m-\mu-1}(m-1, \mu). \qquad (*)$$

4° Нужно доказать, что (m, μ) есть многочлен. Имеем:

$$(m, 1)=\frac{1-x^m}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{m-1}.$$

Таким образом, наше предложение справедливо при $\mu=1$ и любом m. Предполагая, что (m, k) есть многочлен при $k \leqq \mu$, на основании формулы (*), можем утверждать, что и $(m, \mu+1)$ точно так же многочлен. Итак, наше предложение доказано методом математической индукции.

5° Введем обозначение:

$$f(x, m)=1-(m, 1)+(m, 2)-(m, 3)+\ldots+(-1)^m(m, m).$$

Докажем сначала, что

$$f(x, m)=(1-x^{m-1})f(x, m-2).$$

Имеем:

$$1=1,$$
$$(m, 1)=(m-1, 1)+x^{m-1},$$
$$(m, 2)=(m-1, 2)+x^{m-2}(m-1, 1),$$
$$(m, 3)=(m-1, 3)+x^{m-3}(m-1, 2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(m, m-1)=(m-1, m-1)+x(m-1, m-2),$$
$$(m, m)=(m-1, m-1).$$

Умножая эти равенства последовательно на ± 1 и складывая, получим:

$$f(x, m)=(1-x^{m-1})-(m-1,1)(1-x^{m-2})+(m-1,2)(1-x^{m-3})-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{m-2}(m-1, m-2)(1-x).$$

Но

$$(1-x^{m-2})(m-1, 1)=(1-x^{m-1})(m-2, 1),$$
$$(1-x^{m-3})(m-1, 2)=(1-x^{m-1})(m-2, 2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Поэтому

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})\{1-(m-2,\ 1)+(m-2,\ 2)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{m-2}(m-2,\ m-2)\} = (1-x^{m-1})\,f(x, m-2).$$

Итак:

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})\,f(x, m-2),$$
$$f(x, m-2) = (1-x^{m-3})\,f(x, m-4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Допустим сначала, что m четное. Тогда получим:

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})(1-x^{m-3})(1-x^{m-5})\ldots(1-x^3)\,f(x, 2).$$

Но

$$f(x, 2) = 1-(2, 1)+(2, 2) = 2-\frac{1-x^2}{1-x} = 1-x.$$

Следовательно, действительно,

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})(1-x^{m-3})\ldots(1-x^3)(1-x),$$

если m четное.

Если же m нечетное, то имеем:

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})(1-x^{m-3})\ldots(1-x^2)\,f(x, 1).$$

Но $f(x, 1) = 0$, следовательно $f(x, m) = 0$ при любом нечетном m. Впрочем, этот последний факт легко установить и непосредственно из выражения для $f(x, m)$:

$$f(x, m) = 1-(m, 1)+(m, 2)-(m, 3)+\ldots(-1)^m(m, m).$$

98. 1° Положим:

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\ldots(1-x^{n-k+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}\,x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k = F(n).$$

Тогда:

$$F(n+1) = 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(1-x^{n+1})(1-x^n)\ldots(1-x^{n-k+2})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}\,x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k.$$

Отсюда

$$F(n+1)-F(n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x^n)\ldots(1-x^{n-k+2})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}\,x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k\{1-x^{n+1}-1+x^{n-k+1}\}+$$
$$+x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}z^{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x^n)\ldots(1-x^{n-k+2})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}\,x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k x^{n-k+1}(1-x^k)+$$
$$+x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}z^{n+1} =$$
$$= zx^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\ldots(1-x^{n-k+2})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{k-1})}\,z^{k-1}x^{\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}}+$$
$$+zx^{n+1}x^{\frac{n(n+1)}{2}}z^n = zx^{n+1}F(n).$$

Итак:

$$F(n+1)-F(n)=zx^{n+1}F(n),$$

т. е.

$$F(n+1)=(1+zx^{n+1})F(n).$$

Поэтому

$$\begin{gathered} F(n)=(1+zx^{n})F(n-1), \\ F(n-1)=(1+zx^{n-1})(n-2), \\ \dots\dots\dots \\ F(3)=(1+zx^{3})F(2), \\ F(2)=(1+zx^{2})F(1), \\ F(1)=1+xz. \end{gathered}$$

Перемножая эти равенства, действительно получаем:

$$F(n)=(1+xz)(1+x^2z)\dots(1+x^nz).$$

Аналогично докажется и 2°.

Из равенства 1° следует также, что

$$\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\dots(1-x^{n-k+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$$

есть многочлен относительно x (см. задачу 89).

Точно так же из этого же равенства может быть получена формула бинома Ньютона. В самом деле:

$$\frac{1-x^{n-k+1}}{1-x^k}=\frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-k}}{1+x+x^2+\dots+x^{k-1}}.$$

Поэтому при $x=1$ это последнее выражение принимает значение $\frac{n-k+1}{k}$. Следовательно, можно считать, что выражение:

$$\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\dots(1-x^{n-k+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$$

при $x=1$ переходит в

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}=C_n^k$$

и формула 1° при $x=1$ дает:

$$(1+z)^n=1+\sum_{k=1}^{k=n}C_n^kz^k \qquad \text{(Эйлер).}$$

99. Легко получается из 1° задачи 90 при $z=-1$.

100. Положим:

$$C_0+C_1(z+z^{-1})+C_2(z^2+z^{-2})+\dots+C_n(z^n+z^{-n})=\varphi_n(z).$$

Тогда имеем:

$$\varphi_n(x^2z)=\varphi_n(z)\frac{1+x^{2n+1}z}{xz+x^{2n}}$$

(пользуясь выражением $\varphi_n(z)$ через произведение). Пользуясь представлением $\varphi_n(z)$ в виде суммы, при помощи последнего тождества найдем:

$$C_kx^{2k+1}(1-x^{2n-2k})=C_{k+1}(1-x^{2n+2k+2})$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-1).$$

Кроме того, легко видеть, что $C_n = x^{n^2}$. Полагая в последнем соотношении между C_k и C_{k+1} для k значения: $n-1$, $n-2, \ldots, 0$ и перемножая получающиеся равенства, найдем:

$$C_k = \frac{(1-x^{2n+2k+2})(1-x^{2n+2k+4})\ldots(1-x^{4n})}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n-2k})} x^{k^2}$$

$$(k=0,\ 1, \ldots,\ n-1).$$

101. 1° Положим:

$$\cos x + i \sin x = \varepsilon.$$

Тогда:

$$\cos x - i \sin x = \varepsilon^{-1}.$$

Далее:

$$\cos lx + i \sin lx = \varepsilon^l; \qquad \cos lx - i \sin lx = \varepsilon^{-l}.$$

Следовательно:

$$\sin lx = \frac{\varepsilon^l}{2i}(1-\varepsilon^{-2l}).$$

Подставляя это значение $\sin lx$ в выражение для u_k, найдем:

$$u_k = \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\ldots(1-q^{2n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} \cdot q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)},$$

где $q = \varepsilon^{-2}$.

Искомая сумма перепишется следующим образом:

$$1-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{2n} = 1 +$$
$$+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\ldots(1-q^{2n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} \cdot q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)}.$$

Воспользуемся теперь формулой 1° задачи 90 и, заменив в ней n через $2n$, положим $x=q$ и $z=-q^{-n-\frac{1}{2}}$.

Тогда имеем:

$$1-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{2n} = \prod_{k=1}^{2n}\left(1-q^{k-n-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{2n}(1-\varepsilon^{2n+1-2k}) = \prod_{k=1}^{n}(1-\varepsilon^{2k-1})(1-\varepsilon^{-2k+1}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} 2[1-\cos(2k-1)x] = 2^n \prod_{k=1}^{n}[1-\cos(2k-1)x].$$

2° Положим (как в задаче 97):

$$\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\ldots(1-q^{2n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} = (2n,\ k).$$

Тогда:

$$u_k = (2n,\ k)\, q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)},$$

где $q = \cos 2x - i \sin 2x$.

Нам нужно вычислить следующую сумму:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k^2=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n,\ k)^2 q^{-k(2n-k)},$$

где $(2n,\ 0)=1$.

Из задачи 98, 1° имеем:

$$(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{2n}z)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n,\ k)\,q^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k.$$

Положим:

$$(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{2n}z)=\varphi_n(z,\ q).$$

Тогда имеем:

$$\varphi_n(z,\ q)\cdot\varphi_n(-z,\ q)=\varphi_n(q^2,\ z^2).$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n,\ k)\,q^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k\cdot\sum_{s=0}^{2n}(2n,\ s)\,q^{\frac{s(s+1)}{2}}z^s=$$

$$=\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\left\{2n,\ m\right\}q^{m(m+1)}z^{2m},$$

где $\left\{2n,\ m\right\}$ получается из $(2n,\ m)$ путем замены q через q^2. Рассмотрим коэффициент при z^{2n} в обеих частях этого равенства. В правой части этот коэффициент равен

$$(-1)^n\left\{2n,\ n\right\}q^{n(n+1)}.$$

В левой же части для этого коэффициента получаем следующее выражение:

$$\sum_{k+s=2n}(-1)^k(2n,\ k)(2n,\ s)\,q^{\frac{k(k+1)}{2}+\frac{s(s+1)}{2}}.$$

Но

$$(2n,\ 2n-k)=(2n,\ k),$$

поэтому последняя сумма равна

$$q^{2n^2+n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n,\ k)^2 q^{k^2-2nk}.$$

Итак, имеем:

$$q^{2n^2+n}\cdot\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n,\ k)^2 q^{k^2-2nk}=(-1)^n\left\{2n,\ n\right\}q^{n^2+n}.$$

Но

$$(2n,\ k)^2=u_k^2 q^{2nk-k^2},$$

отсюда

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k^2=(-1)^n q^{-n^2}\left\{2n,\ n\right\}.$$

Далее:

$$(2n,\ n)=u_n q^{\frac{1}{2}n^2},$$
$$\left\{2n,\ n\right\}=\overline{u}_n q^{-n^2},$$

где $\overline{u}_n$ получается из u_n путем замены x через $2x$.

Окончательно:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k^2=(-1)^n\frac{\sin(2n+2)x\sin(2n+4)x\ldots\sin 4nx}{\sin 2x\sin 4x\ldots\sin 2nx}.$$

Отметим, что мы имели при выводе следующую формулу:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2n,\ k)^2 q^{k^2-2nk}=(-1)^n\left\{2n,\ n\right\}q^{-n^2}.$$

Совершенно так же можно получить следующую формулу:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k(2n+1,\ k)^2 q^{k^2-(2n+1)k}=0.$$

Если положить $q=1$, то $(n,\ k)$ перейдет в C_n^k и мы получаем формулы:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(C_{2n}^k)^2=(-1)^n C_{2n}^n,$$
$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k(C_{2n+1}^k)^2=0.$$

Равным образом, если воспользоваться тождеством:

$$\varphi_n(z,\ q)\cdot\varphi_n(q^n z,\ q)=\varphi_{2n}(z,\ q),$$

то получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}(n,\ k)^2 q^{k^2}=(2n,\ n),$$

и отсюда

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$$

(см. задачу 72).

§ 7. ПРОГРЕССИИ И СУММЫ

1. Нужно доказать, что

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}.$$

Это же равенство равносильно следующему:

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(a+c)},$$

или

$$\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b},$$

т. е.

$$b^2-a^2=c^2-b^2.$$

Последнее же равенство следует непосредственно из данных задачи.

2. Если a_n есть n-й член, а a_m есть m-й член арифметической прогрессии, то имеем:

$$a_n=a_1+d(n-1),$$
$$a_m=a_1+d(m-1),$$

где d — разность прогрессии.

Отсюда

$$a_n-a_m=(n-m)d.$$

Из условий задачи имеем:

$$b-c=(q-r)d$$
$$c-a=(r-p)d$$
$$a-b=(p-q)d.$$

Умножим первое из этих равенств на a, второе на b и третье на c, получим:

$$d[(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c]=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0,$$

откуда

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0.$$

3. Имеем:

$$a_p-a_q=(p-q)d$$

(d — разность прогрессии).

Так как по условию:

$$a_p=q;\ a_q=p, \quad \text{то} \quad a_p-a_q=q-p,$$

поэтому

$$q-p=(p-q)d,$$

и, следовательно:

$$d=-1$$

(предполагаем $p-q\neq 0$).

Далее:

$$a_m-a_p=(m-p)d,$$

отсюда

$$a_m=a_p+(m-p)d=q-m+p.$$

4. Имеем:

$$a_{p+k}=a_k+pd.$$

Пусть k в этом равенстве пробегает значения: 1, 2, 3, ..., q. Сложим почленно полученные q равенств. Получаем:

$$a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_{p+q}=a_1+a_2+\ldots+a_q+pqd.$$

Но

$$a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_{p+q}=S_{p+q}-S_p,$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_q=S_q,$$

поэтому имеем:

$$S_{p+q}=S_p+S_q+pqd.$$

С другой стороны, известно:

$$S_p=\frac{a_1+a_p}{2}p; \qquad S_q=\frac{a_1+a_q}{2}q.$$

Отсюда

$$\frac{2S_p}{p}-\frac{2S_q}{q}=a_p-a_q=(p-q)d,$$

или

$$\frac{2(qS_p-pS_q)}{p-q}=pqd.$$

Следовательно:

$$S_{p+q}=S_p+S_q+\frac{2(qS_p-pS_q)}{p-q}=\frac{(p+q)S_p-(p+q)S_q}{p-q}.$$

Окончательно:

$$S_{p+q}=\frac{p+q}{p-q}(S_p-S_q)=-(p+q).$$

5. Следует из 4. Впрочем можно и следующим способом. Имеем:

$$S_p=\frac{a_1+a_p}{2}p; \qquad S_q=\frac{a_1+a_q}{2}q,$$

отсюда

$$\frac{a_1+a_p}{2}p=\frac{a_1+a_q}{2}q,$$

или

$$[2a_1+d(p-1)]\,p=[2a_1+d(q-1)]\,q,$$
$$2a_1(p-q)+d(p^2-p-q^2+q)=0,$$
$$2a_1+d(p+q-1)=0.$$

Отсюда

$$a_1+a_{p+q}=0,$$

так как

$$a_{p+q}=a_1+d(p+q-1).$$

Но

$$S_{p+q}=\frac{a_1+a_{p+q}}{2}(p+q).$$

Следовательно, действительно:

$$S_{p+q}=0.$$

6. Имеем:

$$S_m=\frac{a_1+a_m}{2}m; \qquad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n.$$

Из данных задачи следует:

$$\frac{a_1+a_m}{a_1+a_n}=\frac{m}{n},$$

т. е.

$$\frac{2a_1+(m-1)d}{2a_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}.$$

Отсюда

$$2a_1(n-m)+\{(m-1)n-(n-1)m\}d=0,$$

поэтому

$$a_m=a_1+(m-1)d=\frac{d}{2}+(m-1)d=\frac{2m-1}{2}d,$$

$$a_n=\frac{2n-1}{2}d$$

и окончательно:

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

7. Нужно доказать, что при данных n и k (целых положительных $k\geqslant 2$) можно найти такое целое s, чтобы имело место равенство:

$$(2s+1)+(2s+3)+\ldots+(2s+2n-1)=n^k.$$

Но левая часть равна:

$$(2s+n)n.$$

Поэтому остается доказать, что можно подобрать такое целое число s, чтобы имело место равенство:

$$(2s+n)n=n^k,$$

$$s=\frac{n(n^{k-2}-1)}{2}.$$

Но n может быть четным или нечетным. В обоих случаях s будет целым, и наше предложение доказано.

8. Пусть $a_2=d$. Тогда $a_k=a_1+d(k-1)=d(k-1)$, так как по условию $a_1=0$.

Следовательно:

$$S=\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n-1}{n-2}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-3}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k+1}{k}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n-2}=\sum_{k=1}^{n-2}\left(1+\frac{1}{k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n-2}=\sum_{k=1}^{n-2}1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n-2}=$$

$$=n-2+\frac{1}{n-2}=\frac{(n-2)d}{d}+\frac{d}{(n-2)d}=\frac{a_{n-1}}{a_2}+\frac{a_2}{a_{n-1}}.$$

9. Умножая числитель и знаменатель каждой дроби, стоящей в левой части, на выражение, сопряженное со знаменателем, получаем:

$$S=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{d}(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d},$$

так как

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=d.$$

Отсюда

$$S=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.$$

10. Имеем:

$$a_1^2-a_2^2=(a_1-a_2)(a_1+a_2)=-d(a_1+a_2),$$
$$a_3^2-a_4^2=(a_3-a_4)(a_3+a_4)=-d(a_3+a_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2k-1}^2-a_{2k}^2=(a_{2k-1}-a_{2k})(a_{2k-1}+a_{2k})=-d(a_{2k-1}+a_{2k}).$$

Поэтому

$$S=-d(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k})=-d\frac{a_1+a_{2k}}{2}2k.$$

Но

$$a_{2k}=a_1+d(2k-1);\quad a_1-a_{2k}=-d(2k-1),$$

следовательно:

$$S=-d(2k-1)\frac{a_1+a_{2k}}{2k-1}k=\frac{k}{2k-1}(a_1^2-a_{2k}^2).$$

11. 1° Имеем:

$$S(n+2)-S(n+1)=a_{n+2},$$
$$S(n+3)-S(n)=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}.$$

Следовательно, нужно только доказать:

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}-3a_{n+2}=0.$$

Но можно доказать, что

$$\frac{a_r+a_s}{2}=a_{\frac{s+r}{2}}$$

(если r и s одинаковой четности).

В самом деле:

$$a_r+a_s=2a_1+(s-1)d+(r-1)d=2\left[a_1+\left(\frac{r+s}{2}-1\right)d\right]=2a_{\frac{r+s}{2}},$$

поэтому

$$a_{n+1}+a_{n+3}=2a_{n+2},$$

и следовательно, действительно:

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}-3a_{n+2}=0.$$

2° Прежде всего:

$$S(2n)-S(n)=a_{n+1}+\ldots+a_{2n}=\frac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}\cdot n.$$

Теперь имеем:

$$S(3n)=a_1+a_2+\ldots+a_n+(a_{n+1}+\ldots+a_{2n})+a_{2n+1}+\ldots+a_{3n}=$$
$$=\frac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}n+(a_n+a_{2n+1})+(a_{n-1}+a_{2n+2})+\ldots+(a_1+a_{3n}).$$

Но так как сумма двух членов арифметической прогрессии, равноудаленных от ее концов, есть величина постоянная, то

$$a_n + a_{2n+1} = a_{n-1} + a_{2n+2} = \ldots = a_1 + a_{3n} = a_{n+1} + a_{2n}.$$

Поэтому

$$S(3n) = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} n + (a_{n+1} + a_{2n}) \cdot n = 3 \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} n = 3(S(2n) - S(n)).$$

12. В силу наших обозначений будет:

$$S_k = a_{(k-1)n+1} + a_{(k-1)n+2} + \ldots + a_{kn},$$
$$S_{k+1} = a_{kn+1} + a_{kn+2} + \ldots + a_{(k+1)n}.$$

Рассмотрим разность:

$$S_{k+1} - S_k.$$

Имеем:

$$S_{k+1} - S_k = [a_{kn+n} - a_{kn}] + \ldots + [a_{kn+2} - a_{(k-1)n+2}] + [a_{kn+1} - a_{(k-1)n+1}].$$

Но так как

$$a_m - a_l = (m - l) d,$$

то

$$S_{k+1} - S_k = nd + \ldots + nd + nd = n^2 d.$$

13. Имеем:

$$b - a = d(q - p); \quad c - b = d(r - q); \quad c - a = d(r - p);$$

с другой стороны:

$$a = u_1 \omega^{p-1}; \quad b = u_1 \omega^{q-1}; \quad c = u_1 \omega^{r-1},$$

где u_1 есть первый член геометрической прогрессии, а ω — ее знаменатель.

Поэтому

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = a^{d(q-r)} \cdot b^{d(r-p)} \cdot c^{d(p-q)} =$$
$$= u_1^{d(q-r) + d(r-p) + d(p-q)} \cdot \omega^{d\{(q-r)(p-1) + (r-p)(q-1) + (p-q)(r-1)\}}.$$

Но легко видеть, что

$$d(q-r) + d(r-p) + d(p-q) = 0,$$
$$(q-r)(p-1) + (r-p)(q-1) + (p-q)(r-1) = 0.$$

Итак, действительно:

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1.$$

14. Имеем:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Следовательно:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)^2 - x^n =$$
$$= \frac{(x^{n+1} - 1)^2 - x^n (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^{2n+2} - 2x^{n+1} + 1 - x^{n+2} + 2x^{n+1} - x^n}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(x^n - 1)(x^{n+2} - 1)}{(x-1)(x-1)} = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1}).$$

15. Пусть рассматриваемая геометрическая прогрессия будет:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1}, \ldots, u_{3n}.$$

Отсюда

$$S_{3n}-S_{2n}=u_{2n+1}+\ldots+u_{3n},$$
$$S_{2n}-S_n=u_{n+1}+\ldots+u_{2n}.$$

Но

$$u_k=u_1\,q^{k-1};\quad u_s=u_1\,q^{s-1}.$$

Поэтому

$$u_k=u_s\cdot q^{k-s},$$
$$u_{2n+k}=u_kq^n,$$

следовательно:

$$S_{3n}-S_{2n}=u_{2n+1}+\ldots+u_{3n}=q^{2n}\,(u_1+u_2+\ldots+u_n)=q^{2n}S_n,$$
$$S_{2n}-S_n=u_{n+1}+\ldots+u_{2n}=q^n\,(u_1+u_2+\ldots+u_n)=q^nS_n.$$

Поэтому

$$S_n\,(S_{3n}-S_{2n})=q^{2n}S_n^2,$$
$$(S_{2n}-S_n)^2=q^{2n}S_n^2,$$

и рассматриваемая задача решена.

16. Пользуясь формулой суммы членов геометрической прогрессии, получаем:

$$S=\frac{a_nq-a_1}{q-1},$$
$$S'=\frac{\frac{1}{a_n}\frac{1}{q}-\frac{1}{a_1}}{\frac{1}{q}-1}=\frac{a_nq-a_1}{q-1}\cdot\frac{1}{a_na_1}.$$

Следовательно:

$$\frac{S}{S'}=a_na_1.$$

Но, с другой стороны:

$$P^2=(a_1a_2\ldots a_n)^2=(a_1a_n)^n,$$

отсюда

$$P=\left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

17. Рассмотрим известное уже нам тождество Лагранжа (см. задачу 5, § 1):

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)\,(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{n-1}^2)-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_{n-1}y_{n-1})^2=$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+\ldots+(x_{n-2}y_{n-1}-y_{n-2}x_{n-1})^2.$$

Положим:

$$x_1=a_1;\ x_2=a_2;\ \ldots;\ x_{n-1}=a_{n-1};$$
$$y_1=a_2;\ y_2=a_3;\ \ldots;\ y_{n-1}=a_n.$$

Тогда имеем:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2)\,(a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)-(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)^2=$$
$$=(a_1a_3-a_2^2)^2+(a_1a_4-a_3a_2)^2+\ldots+(a_{n-2}a_n-a_{n-1}^2)^2\qquad(*)$$

Скобки, стоящие во второй части равенства, имеют следующую структуру:

$$a_k a_s - a_{k'} a_{s'},$$

причем $k+s=k'+s'$. Легко видеть, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют геометрическую прогрессию, то (при условии $k+s=k'+s'$)

$$a_k a_s - a_{k'} a_{s'} = 0.$$

В самом деле:

$$a_k = a_1 q^{k-1}; \qquad a_s = a_1 q^{s-1};$$
$$a_{k'} = a_1 q^{k'-1}; \qquad a_{s'} = a_1 q^{s'-1}.$$

Поэтому, действительно:

$$a_k a_s = a_1^2 q^{k+s-2}$$

и

$$a_{k'} a_{s'} = a_1^2 q^{k'+s'-2}$$
$$a_k a_s = a_{k'} a_{s'}.$$

Итак, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют геометрическую прогрессию, то все скобки, стоящие во второй части равенства, равны нулю и, действительно, имеет место соотношение:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2.$$

Допустим теперь, что это соотношение имеет место. Нужно доказать, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют геометрическую прогрессию. В этом случае все скобки, стоящие во второй части равенства (*), равны нулю. Но среди этих скобок имеют место следующие:

$$(a_1 a_k - a_2 a_{k-1})^2 \qquad (k=3, 4, \ldots, n).$$

Поэтому имеем:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (k=3, 4, \ldots, n),$$

т. е. числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ действительно составляют геометрическую прогрессию.

18. 1° Известно, что

$$S_m = \frac{a_m q - a_1}{q-1}.$$

Составим искомую сумму. Имеем:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \frac{a_1 q - a_1}{q-1} + \frac{a_2 q - a_1}{q-1} + \ldots + \frac{a_n q - a_1}{q-1} =$$
$$= \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) q}{q-1} - \frac{a_1 n}{q-1} = \frac{(a_n q - a_1) q}{(q-1)^2} - \frac{a_1 n}{q-1}.$$

2°

$$\frac{1}{a_1^2 - a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2 - a_n^2} = \frac{1}{1-q^2}\left\{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{1-q^2} \frac{\frac{1}{a_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{q^2} - \frac{1}{a_1^2}}{\frac{1}{q^2} - 1} = q^2 \frac{\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2}\right)}{(1-q^2)^2}.$$

3°

$$\frac{1}{a_1^k+a_2^k}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}^k+a_n^k}=\frac{1}{1+q^k}\,\frac{q^k\left(\frac{1}{a_n^k}-\frac{1}{a_1^k}\right)}{1-q^k}=\frac{q^k}{1-q^{2k}}\left(\frac{1}{a_n^k}-\frac{1}{a_1^k}\right).$$

19. Пусть данная прогрессия будет: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через $a_{\bar{k}}$ k-й член от конца прогрессии. Тогда:

$$a_{\bar{k}}=a_n-(k-1)\,d,$$
$$a_k=a_1+(k-1)\,d.$$

Рассмотрим произведение $a_ka_{\bar{k}}$. Имеем:

$$a_ka_{\bar{k}}=a_1a_n-(k-1)^2d^2+(k-1)\,d\,(a_n-a_1)=$$
$$=a_1a_n-(k-1)^2d^2+(k-1)(n-1)\,d^2.$$

Итак:

$$a_ka_{\bar{k}}=a_1a_n+d^2\left\{(k-1)(n-1)-(k-1)^2\right\}.$$

Остается только доказать, что выражение:

$$P_n=(k-1)(n-1)-(k-1)^2$$

возрастает при возрастании n от 1 до $\frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$.

Имеем:

$$P_k=(k-1)(n-k),$$
$$P_{k+1}=k\,(n-k-1).$$

Отсюда

$$P_{k+1}-P_k=n-2k.$$

Следовательно, $P_{k+1}>P_k$, если $n-2k>0$, т. е. если $k<\frac{n}{2}$, и наше предложение доказано.

20. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть арифметическая прогрессия, а $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$—геометрическая. По условию $a_1=u_1$; $a_n=u_n$. Пусть знаменатель геометрической прогрессии равен q. Тогда:

$$u_n=u_1q^{n-1}=a_n.$$

Положим:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=s_n;\quad u_1+u_2+\ldots+u_n=\sigma_n.$$

Докажем, что

$$s_n\geqq\sigma_n.$$

Имеем:

$$s_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_1+a_1q^{n-1}}{2}\,n=a_1\,\frac{1+q^{n-1}}{2}\cdot n,$$
$$\sigma_n=\frac{u_nq-u_1}{q-1}=a_1\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Так как по условию $a_1>0$, то остается доказать только:

$$\frac{q^n-1}{q-1}\leqq\frac{1+q^{n-1}}{2}\,n.$$

Левую часть предполагаемого неравенства запишем следующим образом:

$$\frac{q^n-1}{q-1}=1+q+q^2+\ldots+q^{n-3}+q^{n-2}+q^{n-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(1+q^{n-1})+(q+q^{n-2})+\ldots+(q^k+q^{n-k-1})+\ldots+(q^{n-1}+1)\right\}.$$

Докажем, что

$$q^k+q^{n-k-1}\leqq 1+q^{n-1}.$$

В самом деле:

$$q^k+q^{n-k-1}-1-q^{n-1}=(q^k-1)+q^{n-k-1}(1-q^k)=(q^k-1)(1-q^{n-k-1})\leqq 0,$$

так как если $q>1$, то $q^k-1\geqq 0$, $1-q^{n-k-1}\leqq 0$, если же $q<1$, то $q^k-1\leqq 0$, $1-q^{n-k-1}\geqq 0$. При $q=1$ ясно, что произведение, стоящее в левой части нашего неравенства, равно нулю. Итак, действительно:

$$q^k+q^{n-k-1}\leqq 1+q^{n-1}.$$

Фигурная скобка содержит n простых скобок, каждая из которых не превосходит $1+q^{n-1}$. Поэтому, действительно:

$$\frac{q^n-1}{q-1}\leqq n\,\frac{1+q^{n-1}}{2},$$

т. е.

$$\sigma_n\leqq s_n,$$

что решает поставленную задачу.

21. Пусть первый общий член прогрессий будет a, а второй b. Тогда n-й член арифметической прогрессии будет равен:

$$a+(b-a)(n-1),$$

а соответствующий член геометрической прогрессии имеет вид:

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

Итак, нужно доказать:

$$a+(b-a)(n-1)\leqq a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

Иначе нужно доказать, что

$$a+(b-a)(n-1)-a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\leqq 0,$$

или

$$a\left\{\left(\frac{b}{a}-1\right)(n-1)-\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}-1\right]\right\}\leqq 0.$$

Левую часть этого неравенства перепишем следующим образом:

$$a\left(\frac{b}{a}-1\right)\left\{(n-1)-\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)+1\right]\right\}.$$

Рассматривая порознь три случая: $\frac{b}{a}>1$, $\frac{b}{a}<1$, $\frac{b}{a}=1$, легко докажем справедливость нашего неравенства.

22. Нам нужно вычислить:

$$S_n = 1\cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n.$$

Умножим обе части этого равенства на x. Имеем:

$$S_n x = 1\cdot x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + (n-1)\,x^n + nx^{n+1}.$$

Легко видеть, что правая часть равна:

$$S_n - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n + nx^{n+1}.$$

Таким образом, имеем тождество:

$$S_n x = S_n + nx^{n+1} - x\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}),$$

$$S_n\,(x-1) = nx^{n+1} - x\,\frac{x^n - 1}{x-1},$$

$$S_n\,(x-1)^2 = x\,\{nx^{n+1} + 1 - (n+1)\,x^n\}.$$

Окончательно:

$$S_n = \frac{x}{(x-1)^2}\,\{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1\}.$$

23. Имеем:

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k.$$

Умножим обе части этого равенства на q (где q — знаменатель геометрической прогрессии). Получаем:

$$sq = \sum_{k=1}^{n} a_k u_{k+1}$$

(так как $u_k q = u_{k+1}$).

Отнимем от обеих частей равенства по s. Имеем:

$$sq - s = \sum_{k=1}^{n} a_k u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} u_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k u_k - a_1 u_1 + a_{n+1} u_{n+1} =$$

$$= -\sum_{k=2}^{n+1} (a_k - a_{k-1})\,u_k - a_1 u_1 + a_{n+1} u_{n+1} = -\sum_{k=2}^{n+1} d u_k + a_{n+1} u_{n+1} - a_1 u_1,$$

где d — разность арифметической прогрессии.

Итак:

$$s\,(q-1) = -\,d\sum_{k=2}^{n+1} u_k + a_{n+1} u_{n+1} - a_1 u_1,$$

$$s\,(q-1) = a_{n+1} u_{n+1} - a_1 u_1 - d\,\frac{u_{n+1} q - u_2}{q-1}.$$

Окончательно:

$$s = \frac{a_{n+1} u_{n+1} - a_1 u_1}{q-1} - d\,\frac{u_{n+1} q - u_2}{(q-1)^2}.$$

24. Искомую сумму можно переписать следующим способом:

$$x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+2n.$$

Суммируя в отдельности каждую из геометрических прогрессий и объединяя полученные частные суммы, будем иметь:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2=\frac{(x^{2n+2}+1)(x^{2n}-1)}{(x^2-1)\,x^{2n}}+2n.$$

25. Сумма S_1 легко вычисляется по формуле суммирования арифметической прогрессии. Перейдем к вычислению S_2. Рассмотрим следующее тождество:

$$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1.$$

Положим в этом тождестве последовательно $x=1, 2, 3, \ldots, n$ и просуммируем почленно получающиеся равенства. Имеем тогда:

$$\sum_{x=1}^{n}(x+1)^3-\sum_{x=1}^{n}x^3=3\sum_{x=1}^{n}x^2+3\sum_{x=1}^{n}x+n.$$

Иначе:

$$\left\{2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\right\}-\left\{1^3+2^3+\ldots+n^3\right\}=3S_2+3S_1+n.$$

Итак:

$$3S_2+3S_1+n=(n+1)^3-1.$$

Но

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Теперь легко находим:

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Аналогично выводится формула и для S_3. Нужно только рассмотреть тождество:

$$(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$$

и воспользоваться прежде найденными выражениями для S_1 и S_2.

26. Имеем тождественно:

$$(x+1)^{k+1}-x^{k+1}=(k+1)\,x^k+\frac{(k+1)\,k}{1\cdot 2}\,x^{k-1}+$$
$$+\frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^{k-2}+\ldots+(k+1)\,x+1.$$

Полагая здесь последовательно $x=1, 2, 3, \ldots, n$ и суммируя, получаем искомую формулу.

27. Рассмотрим следующую квадратную таблицу:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
1^k & 2^k & 3^k & 4^k\ldots n^k \\
1^k & 2^k & 3^k & 4^k\ldots n^k \\
1^k & 2^k & 3^k & 4^k\ldots n^k \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1^k & 2^k & 3^k & 4^k\ldots n^k
\end{array}$$

Сумма членов, содержащихся в каждой строке, равна: $1^k+2^k+\ldots+n^k=S_k(n)$. Таким образом, сумма членов всей таблицы будет

$$nS_k(n).$$

С другой стороны, суммируя по ломаным линиям для суммы всех членов таблицы, получаем:

$$1^k+(1^k+2\cdot 2^k)+(1^k+2^k+3\cdot 3^k)+(1^k+2^k+3^k+4\cdot 4^k)+\ldots$$
$$\ldots+(1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k+n\cdot n^k)=1+[S_k(1)+2^{k+1}]+$$
$$+[S_k(2)+3^{k+1}]+[S_k(3)+4^{k+1}]+\ldots+[S_k(n-1)+n^{k+1}]=$$
$$=1+S_k(1)+S_k(2)+\ldots+S_k(n-1)+$$
$$+(1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\ldots+n^{k+1}).$$

Итак:

$$nS_k(n)=S_{k+1}(n)+S_k(n-1)+S_k(n-2)+\ldots+S_k(2)+S_k(1).$$

28. Как 1° так и 2° предложения легко получить из формулы задачи 26. Перепишем ее следующим образом:

$$S_k=-\frac{k}{2}S_{k-1}-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}S_{k-2}-\ldots-S_1-\frac{S_0}{k+1}+\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}. \qquad (*)$$

При $k=1$:

$$S_1=1+2+3+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$$

Таким образом, оба предложения (1° и 2°) справедливы при $k=1$. Предположим, что они справедливы при любом значении индекса, меньшем k, и докажем, что они будут справедливы и при индексе, равном k. Так как по предположению S_{k-1} есть многочлен относительно n степени k, S_{k-2} многочлен степени $k-1$, ..., то легко видеть из формулы (*), что действительно S_k будет многочленом степени $k+1$. Далее, так как S_{k-1}, S_{k-2}, ..., S_0 не содержат члена, не зависящего от n, то и S_k не содержит подобного члена $\left(\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}\right.$ при разложении по степеням n не будет содержать свободного члена$\left.\right)$. Из этой же формулы (*) легко видеть, что коэффициент при старшем члене в разложении S_k по степеням n будет $\frac{1}{k+1}$. Остается только доказать, что коэффициент при втором члене, т. е. B, равен $\frac{1}{2}$. В разложении (*) существует только два члена, содержащих n^k. Один из них содержится в $-\frac{k}{2}S_{k-1}$, а другой в $\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}$. По доказанному, имеем:

$$-\frac{k}{2}S_{k-1}=-\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{k}n^k+\ldots\right\}=-\frac{1}{2}n^k+\ldots$$

Далее:

$$\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+n^k+\ldots$$

Отсюда легко видеть, что

$$B=\frac{1}{2}.$$

Относительно структуры остальных коэффициентов $C, \ldots, L$ можно утверждать следующее: коэффициент при n^{k+1-l} будет равен:

$$C_{k+1} \frac{A}{k+1},$$

где A от k не зависит. Это предложение доказывают методом индукции, пользуясь формулой (*).

29. Для вычисления S_4 можно воспользоваться, например, формулой задачи 26.

Можно поступить и следующим образом. Из результата предыдущей задачи следует, что

$$S_4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + Cn^3 + Dn^2 + En.$$

Остается определить только C, D и E. Так как последнее равенство является тождеством, то оно справедливо при всех значениях n. Полагая здесь последовательно $n=1$, 2 и 3, получаем систему уравнений для трех неизвестных C, D и E. Именно имеем:

$$C+D+E=\frac{3}{10},$$

$$8C+4D+2E=\frac{13}{5},$$

$$27+C+9D+3E=\frac{89}{10}.$$

Отсюда найдем:

$$C=\frac{1}{3};\ D=0;\ E=-\frac{1}{30}.$$

Остается только разложить выражение:

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

на множители, и искомый результат будет найден.

Аналогично получим и остальные три формулы.

30. Справедливость тождеств устанавливают непосредственной проверкой, пользуясь прежде полученными выражениями для S_n.

31. Положим $k=1$. Имеем:

$$(B+1)^2-B^2=2.$$

Иначе:

$$B_2+2B_1+1-B_2=2.$$

Следовательно, $B_1=\frac{1}{2}$.

Далее примем $k=2$. Получаем:

$$(B+1)^3-B^3=3,$$

т. е.

$$B_3+3B_2+3B_1+1-B_3=3, \quad \text{т. е. } B_2=\frac{1}{6}.$$

10*

Продолжая дальше, получим следующую таблицу:

$$\begin{array}{llll}
B_1=\frac{1}{2}; & B_6=\frac{1}{42}; & B_{11}=0; & B_{16}=-\frac{3617}{510}; \\
B_2=\frac{1}{6}; & B_7=0; & B_{12}=-\frac{691}{2730}; & B_{17}=0; \\
B_3=0; & B_8=-\frac{1}{30}; & B_{13}=0; & B_{18}=\frac{43867}{798}; \\
B_4=-\frac{1}{30}; & B_9=0; & B_{14}=\frac{7}{6}; & B_{19}=0. \\
B_5=0; & B_{10}=\frac{5}{66}; & B_{15}=0; &
\end{array}$$

Зная эту таблицу, можно легко решить задачу 29, т. е. расположить S_4, S_5, S_6 и S_7 по степеням n. Числа эти играют весьма важную роль во многих вопросах математики и обладают рядом интересных свойств. Они носят название чисел Бернулли (J. Bernoulli, Ars Conjectandi). Можно показать, что B_k при k нечетном и большем 1 будет равно нулю. Числа же Бернулли с четным значком будут довольно быстро возрастать. Приведем значение B_{196}. Если положить $B_{196}=-\frac{Z}{N}$, то оказывается, что

$$N=171390,$$

$$\begin{aligned}
Z=\,&62753\ 13511\ 04611\ 93672\ 55310\ 66998\\
&93713\ 60315\ 30541\ 53311\ 89530\ 55906\\
&39107\ 01782\ 46402\ 41378\ 48048\ 46255\\
&54578\ 57614\ 21158\ 35788\ 96086\ 55345\\
&32214\ 56098\ 29255\ 49798\ 68376\ 27052\\
&31316\ 61171\ 66687\ 49347\ 22145\ 80056\\
&71217\ 06735\ 79434\ 16524\ 98443\ 87718\\
&31115
\end{aligned}$$

Таким образом, числитель этого числа содержит 215 цифр. (D. H. Lehmer, 1935.) Переходим к доказательству соотношения 2°.

На основании результатов задачи 28 можно положить:

$$(k+1)(1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k)=n^{k+1}+\frac{k+1}{2}n^k+Cn^{k-1}+Dn^{k-2}+\ldots+Ln,$$

где C, D, ..., L от n не зависят, но несомненно зависят от k. Положим:

$$(k+1)(1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k)=n^{k+1}+C_{k+1}^1\alpha_1 n^k+$$
$$+C_{k+1}^2\alpha_2 n^{k-1}+\ldots+C_{k+1}^{k-1}\alpha_{k-1}n^2+C_{k+1}^k\alpha_k n.$$

Тогда мы можем написать следующее символическое равенство:

$$(k+1)(1^k+2^k+\ldots+n^k)=(n+\alpha)^{k+1}-\alpha^{k+1}.$$

Переход от символического к обыкновенному происходит после раскрытия скобок в правой части путем замены α^s через α_s ($s=0, 1, 2, \ldots$).

Так как это равенство тождественно относительно n, то мы можем положить в нем вместо n $n+1$ и получить:

$$(k+1)[1^k+2^k+\ldots+(n+1)^k]=(n+1+\alpha)^{k+1}-\alpha^{k+1}.$$

Вычитая же из последнего равенства предыдущее, найдем:

$$(k+1)(n+1)^k=(n+1+\alpha)^{k+1}-(n+\alpha)^{k+1}.$$

Полагая здесь $n=0$, имеем:

$$(\alpha+1)^{k+1}-\alpha^{k+1}=k+1.$$

Кроме того, напомним (см. задачу 28, решение), что α от k не зависят и что $\alpha_1=\frac{1}{2}$.

Итак, числа α_k и B_k определяются одним и тем же соотношением и $\alpha_1=B_1$. Поэтому

$$\alpha_k=B_k$$

при любом k.

32. Пусть разность нашей прогрессии есть d. Тогда:

$$x_k=x_1+d(k-1).$$

Из первого равенства имеем:

$$\frac{x_1+x_n}{2}n=a; \quad nx_1+d\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=a. \qquad (*)$$

С другой стороны:

$$x_k^2=x_1^2+2x_1d(k-1)+d^2(k-1)^2.$$

Поэтому из второго соотношения получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2=nx_1^2+2x_1d\sum_{k=1}^{n}(k-1)+d^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=b^2.$$

Отсюда

$$nx_1^2+2x_1d\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+d^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=b^2 \qquad (1)$$

(см. задачу 25).

Возводя обе части равенства (*) в квадрат и деля на n, находим:

$$nx_1^2+2x_1d\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+d^2\frac{n(n-1)^2}{4}=\frac{a^2}{n}. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим:

$$\frac{d^2n(n^2-1)}{12}=\frac{b^2n-a^2}{n}.$$

Следовательно:

$$d=\pm\frac{2\sqrt{3(b^2n-a^2)}}{n\sqrt{n^2-1}}.$$

По найденному значению d из равенства (*) находим x_1, а следовательно, можем построить и всю арифметическую прогрессию.

33. 1° Положим:

$$s=\sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1}.$$

Отсюда

$$x\cdot s=\sum_{k=1}^{n} k^2x^k.$$

Вычитая из второго равенства первое, найдем:

$$s(x-1)=\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2x^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}.$$

Следовательно:

$$s(x-1)=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2x^{k-1}+n^2x^n-\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1},$$

$$s(x-1)=n^2x^n-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1}=n^2x^n-2\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=$$

$$=n^2x^n-2\frac{1}{(x-1)^2}\{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1\}+\frac{x^n-1}{x-1}$$

(см. задачу 22).

Окончательно:

$$1+4x+9x^2+\ldots+n^2x^{n-1}=\frac{n^2x^n(x-1)^2-2nx^n(x-1)+(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}.$$

2° И в этом случае поступают аналогично предыдущему. Положим:

$$s=1^3+2^3x+3^3x^2+\ldots+n^3x^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k^3x^{k-1}.$$

Составим разность:

$$sx-s=n^3x^n-3\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}+3\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}.$$

Подставляя вместо сумм, стоящих справа, выражения, полученные прежде, будем иметь:

$$s(x-1)=n^3x^n-3\frac{n^2x^n(x-1)^2-2nx^n(x-1)+(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}+$$

$$+3\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}-\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Окончательно:

$$s(x-1)^4=n^3x^n(x-1)^3-3n^2x^n(x-1)^2+3nx^n(x^2-1)-(x^n-1)(x^2+4x+1).$$

34. Для определения величин искомых сумм вычислим предварительно следующую сумму:

$$1+3x+5x^2+\ldots+(2n-1)x^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1}=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\frac{2nx^n(x-1)-(x+1)(x^n-1)}{(x-1)^2}.$$

Для вычисления первой из сумм положим в выведенной формуле $x=\frac{1}{2}$. Тогда имеем:

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\{3(2^n-1)-2n\}.$$

Полагая же $x=-\frac{1}{2}$, найдем:

$$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}=\frac{2^n+(-1)^{n+1}(6n+1)}{9\cdot 2^{n-1}}.$$

35. 1° Допустим сначала, что n четное. Положим $n=2m$. Тогда:

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n=1-2+3-4+\ldots$$
$$\ldots+(2m-1)-2m=(1+3+\ldots+2m-1)-$$
$$-(2+4+\ldots+2m)=-m=-\frac{n}{2}.$$

Теперь пусть n — нечетное и положим $n=2m-1$. Тогда наша сумма примет вид:

$$[1-2+3-4+\ldots-(2m-2)]+(2m-1)=-(m-1)+2m-1=m=\frac{n+1}{2}.$$

Итак, если положить:

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n=S,$$

то

$$S=-\frac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четное,}$$

$$S=\frac{n+1}{2}, \text{ если } n \text{ нечетное.}$$

Впрочем, этот результат может быть получен гораздо проще. В самом деле, в случае четного n имеем:

$$S=[1-2]+[3-4]+[5-6]+\ldots+[(2m-1)-2m]=-1\cdot m=-m=-\frac{n}{2}.$$

Отсюда получается результат и для нечетного n.

2° Допустим сначала, что n четное и положим $n=2m$. Имеем:

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(1^2-2^2)+$$
$$+(3^2-4^2)+\ldots+[(2m-1)^2-(2m)^2]=-(1+2)-$$
$$-(3+4)-\ldots-(2m-1+2m)=-[1+2+3+4+\ldots$$
$$\ldots+2m-1+2m]=-\frac{(2m+1)\,2m}{2}=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Итак, если n четное, то

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2=-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.$$

Если $n=2m+1$ нечетное, то

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^3=1^2-2^2+3^2-4^2-\ldots$$
$$\ldots-(2m)^2+(2m+1)^2=\frac{-2m(2m+1)}{2}+(2m+1)^2=$$
$$=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.$$

3° Искомая сумма равна $-8n^2$. Результат получается аналогично предыдущему.

4° Искомую сумму перепишем так:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$$

(см. задачу 25).

36. Рассматриваемая сумма может быть переписана так:

$$\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}.$$

Отсюда легко находим, что величина ее будет равна:

$$\frac{1}{9}\left\{10\,\frac{10^n-1}{9}-n\right\}.$$

37. Рассмотрим первую из скобок, стоящих в правой части, и перепишем ее следующим способом:

$$2x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2+2x^{2n-3}y^4-\ldots\pm 2xy^{2n}-x^{2n+1}=2x\,\frac{x^{2n+2}+y^{2n+2}}{x^2+y^2}-x^{2n+1}.$$

Вторая скобка возникает из первой путем перестановок букв x и y, поэтому она равна:

$$2y\,\frac{x^{2n+2}+y^{2n+2}}{x^2+y^2}-y^{2n+1}.$$

Возведя в квадрат оба полученные выражения и складывая результат легко докажем справедливость тождества.

38. Искомое произведение равно:

$$\begin{aligned}(1\cdot a+1\cdot a^2+\ldots+1\cdot a^{n-1})+(a\cdot a^2+\ldots+aa^{n-1})+\\+(a^2a^3+\ldots+a^2\cdot a^{n-1})+\ldots+a^{n-2}\cdot a^{n-1}=\\=a(1+a+\ldots+a^{n-2})+a^3(1+a+\ldots+a^{n-3})+\\+a^5(1+a+\ldots+a^{n-4})+\ldots+a^{2n-5}(1+a)+a^{2n-3}=\\=a\,\frac{a^{n-1}-1}{a-1}+a^3\,\frac{a^{n-2}-1}{a-1}+a^5\,\frac{a^{n-3}-1}{a-1}+\ldots\\\ldots+a^{2n-5}\,\frac{a^2-1}{a-1}+a^{2n-3}\,\frac{a-1}{a-1}=\frac{1}{a-1}\{(a^n+a^{n+1}+\\+a^{n+2}+\ldots+a^{2n-3}+a^{2n-2})-(a+a^3+a^5+\ldots+a^{2n-5}+\\+a^{2n-3})\}=\frac{(a^n-1)(a^n-a)}{(a-1)(a^2-1)}.\end{aligned}$$

39. Сумму, стоящую в левой части, можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{2}{x^{n-2}}+\ldots+\frac{n-1}{x}\right)+[x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+(n-1)x]+n.$$

Первая из скобок равна:

$$\frac{1}{x^n}[x+2x^2+\ldots+(n-1)x^{n-1}]=\frac{x[(n-1)x^n-nx^{n-1}+1]}{x^n(x-1)^2}$$

(см. задачу 22).

Вторая же скобка получается из первой путем замены x через $\frac{1}{x}$. Отсюда легко следует искомый результат.

40. 1° Имеем:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Складывая правые и левые части, получим искомый результат.

2° Искомая сумма может быть переписана следующим способом:

$$s=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Но

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}.$$

Поэтому

$$s=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-$$
$$-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

3° Решение совершенно аналогично решению предыдущей задачи.

41. Сумма наша равна:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{4k^2-1}.$$

Отсюда

$$16S=\sum_{k=1}^{n}\frac{16k^4-1+1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k^2+1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)},$$

$$16S=4\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

$$16S=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+n+\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right\},$$

$$16S=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+n+\frac{n}{2n+1}.$$

Окончательно:

$$16S=\frac{m(m^2+2)}{6}-\frac{1}{2m},$$

где $m=2n+1$.

42. Имеем:

$$\frac{1}{a_1a_n}=\frac{1}{a_1+a_n}\cdot\frac{a_1+a_n}{a_1a_n}=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right),$$

$$\frac{1}{a_2a_{n-1}}=\frac{1}{a_2+a_{n-1}}\,\frac{a_2+a_{n-1}}{a_2a_{n-1}}=\frac{1}{a_2+a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{a_na_1}=\frac{1}{a_1+a_n}\,\frac{a_1+a_n}{a_1a_n}=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right).$$

Но

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots$$

Поэтому, складывая почленно ряд наших равенств, найдем:

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

43. 1° Легко видеть, что имеет место тождество:

$$\frac{1}{(n+k-1)!}-\frac{1}{(n+k)!}=\frac{n+k-1}{(n+k)!}.$$

Полагая в этом тождестве $k=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1$ и складывая почленно получающиеся равенства, докажем, что действительно:

$$\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+p+1)!}.$$

2° Имеем:

$$\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n}{(n+2)!}+\ldots+\frac{n}{(n+p+1)!}<\frac{n}{(n+1)!}+$$

$$+\frac{n+1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+p+1)}$$

(см. 1°).

Поэтому действительно:

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+p+1)!}<\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+p+1)!}\right\}.$$

44. Справедливо следующее тождество:

$$\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{z^2-1}.$$

В нашем случае имеем:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1},\qquad(1)$$

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{2}{x^4-1},\qquad(2)$$

$$\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{x^4+1}=\frac{2}{x^8-1},\qquad(3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^n}+1}=\frac{2}{x^{2^{n+1}}-1}.\qquad(n+1)$$

Умножаем обе части равенства (1) на 1, равенства (2) на 2, равенства (3) на 2^2 и т. д., наконец, умножаем обе части равенства $(n+1)$ на 2^n. Полученные результаты складываем и находим:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\ldots+\frac{2^n}{x^{2^n}+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

45. Имеем:

$$\frac{n+p+1}{n-p+1}\sum_{k=1}^{n-p}\frac{n-p-k+1}{(p+k)(n-k+1)}=$$

$$=\frac{1}{n-p+1}\sum_{k=1}^{n-p}\left(\frac{1}{p+k}+\frac{1}{n-k+1}\right)(n-p-k+1)=$$

$$=\frac{1}{n-p+1}\sum_{k=1}^{n-p}\left(\frac{n+1}{p+k}-\frac{p}{n-k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n-p+1}\left[(n+1)\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-p\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{p+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n-p+1}\left(\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(n+1-p)=$$

$$=\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}\right)=S_n-S_p.$$

46. Имеем:

$$S_n'=\frac{n+1}{2}-\left\{\frac{1}{n(n-1)}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}+\ldots+\frac{n-2}{2\cdot 3}\right\}=$$

$$=\frac{n+1}{2}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k}{(n-k+1)(n-k)}=$$

$$=\frac{n+1}{2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{-k}{(n-k+1)(n-k)}.$$

Разобьем дробь $\frac{-k}{(n-k+1)(n-k)}$ на две простейшие дроби. Именно положим:

$$\frac{-k}{(n-k+1)(n-k)}=\frac{A}{n-k+1}+\frac{B}{n-k},$$

$$-k=A(n-k)+B(n-k+1).$$

Отсюда, полагая сначала $k=n$, а затем $k=n+1$, найдем:

$$A=n+1;\quad B=-n.$$

Поэтому

$$S=\frac{n+1}{2}+(n+1)\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{n-k+1}-n\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{n-k}=$$

$$=\frac{n+1}{2}+(n+1)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{3}\right)-$$

$$-n\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{n+1}{2}+n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{3}\right)-$$

$$-n\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{n+1}{2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{3}\right)+1-\frac{n}{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

47. Пусть n-й член искомой прогрессии будет a_n, разность же прогрессии примем равной d. Тогда:

$$S_x=\frac{a_1+a_x}{2}\cdot x,$$

$$S_{kx}=\frac{a_1+a_{kx}}{2}kx.$$

Отсюда

$$\frac{S_{kx}}{S_x}=\frac{a_1+a_{kx}}{a_1+a_x}\cdot k=\frac{2a_1+d(kx-1)}{2a_1+d(x-1)}k=\frac{2a_1-d+kxd}{2a_1-d+dx}\cdot k.$$

Для того чтобы последнее отношение имело значение, не зависящее от x, необходимо и достаточно, чтобы

$$2a_1-d=0,$$

т. е. в искомой прогрессии разность должна равняться удвоенному первому члену.

48. Можно доказать следующее предложение:

$$a_k+a_l=a_{k'}+a_{l'},$$

если $k+l=k'+l'$.

В самом деле:

$$a_k=a_1+(k-1)d;\quad a_l=a_1+(l-1)d;$$
$$a_{k'}=a_1+(k'-1)d;\quad a_{l'}=a_1+(l'-1)d.$$

Отсюда

$$a_k+a_l=2a_1+(k+l-2)d,$$
$$a_{k'}+a_{l'}=2a_1+(k'+l'-2)d.$$

Но так как по условию

$$k+l=k'+l',$$

то из последних равенств действительно следует, что

$$a_k+a_l=a_{k'}+a_{l'}.$$

Пользуясь этим замечанием, имеем:

$$a_i+a_{i+2}=a_{i+1}+a_{i+1}=2a_{i+1}.$$

Данная сумма преобразуется поэтому следующим образом:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i+a_{i+2}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+2}.$$

Но

$$a_i=a_{i+1}-d;\quad a_{i+2}=a_{i+1}+d,$$

поэтому

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}^2-d^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[a_1^2+2a_1di+(i^2-1)d^2]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a_1^2n+2a_1d\frac{n(n+1)}{2}-nd^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}d^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}n\left\{a_1^2+a_1d(n+1)+\frac{(n-1)(2n+5)}{6}d^2\right\}.$$

49. Известно, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+k\beta)-\operatorname{tg}[\alpha+(k-1)\beta]=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+k\beta)\cos[\alpha+(k-1)\beta]}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(\alpha+k\beta)\cos[\alpha+(k-1)\beta]}=$$

$$=\frac{1}{\sin\beta}\sum_{k=1}^{n}\{\operatorname{tg}(\alpha+k\beta)-\operatorname{tg}[\alpha+(k-1)\beta]\}=$$

$$=\frac{1}{\sin\beta}\{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\ldots$$

$$\ldots+\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+(n-1)\beta)\}=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}.$$

50. Имеем:

$$2\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$2\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-2}}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Умножая эти равенства последовательно на 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{2^{n-1}}$ и складывая почленно, получаем искомый результат.

51. Рассмотрим следующую формулу:

$$\cos[a+(k-2)h]-\cos[a+kh]=2\sin h\sin[a+(k-1)h].$$

Полагая в этой формуле $k=1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, найдем:

$$2\sin h\sin a=\cos(a-h)-\cos(a+h),$$
$$2\sin h\sin(a+h)=\cos a-\cos(a+2h),$$
$$2\sin h\sin(a+2h)=\cos(a+h)-\cos(a+3h),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\sin h\sin[a+(n-2)h]=\cos[a+(n-3)h]-\cos[a+(n-1)h],$$
$$2\sin h\sin[a+(n-1)h]=\cos[a+(n-2)h]-\cos[a+nh].$$

Складывая эти равенства почленно, находим:

$$\begin{aligned}2\sin h\left\{\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]\right\}=\\ =\cos a+\cos(a-h)-\cos(a+nh)-\cos[a+(n-1)h]=\\ =\left\{\cos a-\cos[a+(n-1)h]\right\}+\left\{\cos(a-h)-\cos(a+nh)\right\}=\\ =2\sin\frac{n-1}{2}h\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)+2\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h=\\ =2\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cdot 2\sin\frac{nh}{2}\cos\frac{h}{2}.\end{aligned}$$

Отсюда и получаем действительно:

$$\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]=$$
$$=\frac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Аналогично получается и вторая формула. Впрочем она может быть очень легко получена из только что выведенной путем замены a через $\frac{\pi}{2}-a$.

52. Полагая в предыдущих формулах $a=0$; $h=\frac{\pi}{n}$, легко получим:

$$S=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n},\quad S'=0.$$

53. На основании результатов задачи 51, имеем:

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin[(2n-1)\alpha]=\frac{\sin n\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha},$$
$$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos[(2n-1)\alpha]=\frac{\sin n\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Остальное очевидно.

54. Для вычисления искомых сумм можно поступить, например, следующим образом. Составляем сумму S_n' и S_n''. Легко видеть, что

$$S_n'+S_n''=2n.$$

С другой стороны,

$$S_n'-S_n''=\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 4nx.$$

Применяя вторую из формул задачи 51, найдем:

$$\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 4nx=\frac{\sin 2nx\cos(2n+1)x}{\sin x}.$$

Итак:

$$S'_n - S''_n = \frac{\sin 2nx \cos (2n+1)x}{\sin x},$$

$$S'_n + S''_n = 2n.$$

Отсюда

$$S'_n = n + \frac{\sin 2nx \cos (2n+1)x}{2\sin x},$$

$$S''_n = n - \frac{\sin 2nx \cos (2n+1)x}{2\sin x}.$$

55. Воспользуемся формулой:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos (A-B) - \cos (A+B)].$$

Тогда имеем:

$$S = \sum_{i=1}^{p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \cdot \sin \frac{n\pi i}{p+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi i}{p+1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \cos \frac{(m+n)\pi i}{p+1}.$$

Но если $m+n$ делится на $2(p+1)$, то $\cos \frac{(m+n)\pi i}{p+1} = 1$ и

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi i}{p+1} - \frac{1}{2}p.$$

Пользуясь формулой 2° задачи 51, легко найдем:

$$\sum_{i=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi i}{p+1} = -1.$$

Отсюда

$$S = -\frac{p+1}{2}.$$

Аналогично доказываются и остальные случаи.

56. Имеем:

$$\operatorname{arc\,tg} (k+1)x + \operatorname{arc\,tg} (-kx) =$$
$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{kx + x - kx}{1-(k+1)x(-kx)} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1+k(k+1)x^2},$$

так как $(k+1)x(-kx) < 1$ (см. задачу 25, § 3).

Отсюда

$$\operatorname{arc\,tg} 2x - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1+1\cdot 2x^2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} 3x - \operatorname{arc\,tg} 2x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1+2\cdot 3x^2},$$

. . . .

$$\operatorname{arc\,tg} (n+1)x - \operatorname{arc\,tg} nx = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1+n(n+1)x^2}.$$

Складывая почленно эти равенства, находим, что искомая сумма равна:

$$\operatorname{arc\,tg} (n+1)x - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{nx}{1+(n+1)x^2}.$$

57. Легко видеть, что

$$\operatorname{arc\,tg} a_k + \operatorname{arc\,tg}(-a_{k-1}) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a_k - a_{k-1}}{1 + a_k a_{k-1}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{1 + a_k a_{k-1}}.$$

Теперь легко найдем, что наша сумма равна:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a_{n+1} - a_1}{1 + a_1 a_{n+1}}.$$

58. Положим:

$$1 + k^2 + k^4 = -xy; \quad x + y = 2k.$$

(Это делается для того, чтобы применить формулу

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y, \text{ если } xy < 1.)$$

Тогда:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2k}{2 + k^2 + k^4} = \operatorname{arc\,tg}(k^2 + k + 1) - \operatorname{arc\,tg}(k^2 - k + 1),$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg}\frac{2k}{2 + k^2 + k^4} = \operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 7 - \operatorname{arc\,tg} 3 + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{arc\,tg}(n^2 + n + 1) - \operatorname{arc\,tg}(n^2 - n + 1) = \operatorname{arc\,tg}(n^2 + n + 1) - \frac{\pi}{4}.$$

59. Пусть k есть одно из чисел: $1, 2, \ldots, n-1$. Умножим первое из уравнений на $\sin k\frac{\pi}{n}$, второе на $\sin k\frac{2\pi}{n}$, третье на $\sin k\frac{3\pi}{n}$ и т. д., наконец последнее на $\sin k\frac{(n-1)\pi}{n}$. Сложив полученные произведения почленно, найдем:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_{n-1}x_{n-1} = a_1 \sin k\frac{\pi}{n} + a_2 \sin k\frac{2\pi}{n} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}\sin k\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

При этом

$$A_l = \sin l\frac{\pi}{n}\sin k\frac{\pi}{n} + \sin l\frac{2\pi}{n}\sin k\frac{2\pi}{n} + \sin l\frac{3\pi}{n}\sin k\frac{3\pi}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \sin l\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin k\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Пользуясь формулой 2° задачи 51, докажем, что

$$A_l = 0, \quad \text{если } l \neq k,$$

$$A_l = \frac{n}{2}, \text{ если } l = k.$$

Отсюда получаем:

$$x_k = \frac{2}{n}\left(a_1 \sin k\frac{\pi}{n} + a_2 \sin k\frac{2\pi}{n} + \ldots + a_{n-1}\sin k\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

§ 8. НЕРАВЕНСТВА

1. Имеем:

$$\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n};\ \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n};\ \ldots;\ \frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n};\ \frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n}.$$

Складывая эти неравенства почленно, найдем:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

2. Легко видеть, что

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)}<\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}.$$

Но

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)}=\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1},$$

$$\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k},$$

поэтому

$$\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}<\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}.$$

Суммируя эти неравенства от $k=1$ до $k=p$, получим искомое соотношение.

3. Пусть имеем n дробей ($n\geqq 1$):

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{d},\ \ldots,\ \frac{1}{k},\ \frac{1}{l}.$$

Допустим:

$$2\leqq a<b<c<d<\ldots<k<l.$$

Тогда:

$$b\geqq a+1;\quad c\geqq b+1;\quad d\geqq c+1;\ \ldots;\ l\geqq k+1.$$

Следовательно:

$$b\geqq a+1;\quad c\geqq a+2;\quad d\geqq a+3;\ \ldots;\ l\geqq a+n-1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\ldots+\frac{1}{l^2}\leqq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)^2}<\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+n-1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\ldots+\frac{1}{l^2}<\frac{n}{(a-1)(a+n-1)}.$$

Но

$$a-1\geqq 1;\quad a+n-1\geqq n+1;\quad (a-1)(a+n-1)\geqq n+1$$

и

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\ldots+\frac{1}{l^2}\leqq\frac{n}{n+1}<1.$$

4. Действительно:

$$(n!)^2=(1\cdot n)\cdot(2(n-1))\ \ldots\ (n\cdot 1).$$

Но

$$k(n-k+1) \geqq n,$$

так как

$$k(n-k+1)-n=(n-k)(k-1) \geqq 0.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} 1 \cdot n=n, \\ 2 \cdot(n-1) \geqq n, \\ 3 \cdot(n-2) \geqq n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ n \cdot 1=n. \end{gathered}$$

Отсюда

$$(n!)^2 \geqq n^n \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{n!} \geqq \sqrt{n}.$$

5. Так как

$$a<\sqrt{A}<a+1,$$

то

$$\sqrt{A}+a<2a+1; \quad \frac{\sqrt{A}+a}{2a+1}<1; \quad \sqrt{A}-a>0.$$

Отсюда

$$\frac{(\sqrt{A}+a)(\sqrt{A}-a)}{2a+1}<\sqrt{A}-a;$$

$$\frac{A-a^2}{2a+1}<\sqrt{A}-a; \quad \sqrt{A}>a+\frac{A-a^2}{2a+1}.$$

Перейдем теперь к доказательству второго неравенства. Заметим, что при любом x имеет место неравенство:

$$x(1-x)=x-x^2 \leqq \frac{1}{4}.$$

В самом деле, имеем:

$$x-x^2-\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq 0.$$

При этом очевидно, что знак равенства может иметь место лишь при $x=\frac{1}{2}$.

Так как можно предположить, что $\sqrt{A}-a \neq \frac{1}{2}$, то

$$[1-(\sqrt{A}-a)](\sqrt{A}-a)<\frac{1}{4},$$

$$1-(\sqrt{A}-a)<\frac{1}{4(\sqrt{A}-a)},$$

$$(2a+1)-(\sqrt{A}+a)<\frac{1}{4(\sqrt{A}-a)}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\sqrt{A}-a>0$, найдем:

$$(2a+1)(\sqrt{A}-a)-(A-a^2)<\frac{1}{4}.$$

Отсюда, наконец:

$$\sqrt{A} < a + \frac{A-a^2}{2a+1} + \frac{1}{4(2a+1)}.$$

6. Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n},$$

так как

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Следовательно:

$$1 > 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}.$$

Складывая эти неравенства, получаем искомый результат.

7. Положим:

$$A = \frac{1}{4^s} C_{2s}^s = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2s-1}{2s}.$$

Тогда

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2s}{2s+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2s}{2s-1} \cdot \frac{1}{2s+1},$$

т. е.

$$A < \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2s+1}.$$

Отсюда

$$A^2 < \frac{1}{2s+1}; \quad A < \frac{1}{\sqrt{2s+1}}.$$

Но, с другой стороны:

$$A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2s-2}{2s-1},$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2s-1}{2s}.$$

Перемножая почленно эти два соотношения, найдем:

$$A > \frac{1}{2\sqrt{s}}.$$

8. Так как

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

то

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}}}{2\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}}}=\frac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}}.$$

Следовательно:

$$1+\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=1+\frac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}}-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=$$

$$=\frac{-1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}}\left\{\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+1\right\}=-\frac{\left(1-\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}}\leqq 0,$$

так как

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}>0\quad(0<\theta<\pi).$$

9. Имеем:

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\operatorname{tg}(\pi-C)=-\operatorname{tg}C>0,$$

так как C тупой угол.

Итак:

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}>0.$$

Но так как A и B меньше $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B>0$, а следовательно:

$$1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>0;\quad \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B<1.$$

10. Действительно:

$$\operatorname{tg}(\theta-\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}=\frac{(n-1)\operatorname{tg}\varphi}{1+n\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}^2(\theta-\varphi)=\frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\varphi+n\operatorname{tg}\varphi)^2}=\frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\varphi-n\operatorname{tg}\varphi)^2+4n}\leqq\frac{(n-1)^2}{4n}.$$

11. Имеем:

$$\cos 2\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Для того чтобы доказать, что $\cos 2\gamma\leqq 0$, достаточно доказать, что

$$1-\operatorname{tg}^2\gamma\leqq 0.$$

Но имеем:

$$1-\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1+\sin\alpha\sin\beta)^2}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$$

Остается доказать, что

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1+\sin\alpha\sin\beta)^2\leqq 0.$$

Но

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1+\sin\alpha\sin\beta)^2=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)-$$
$$-(1+\sin\alpha\sin\beta)^2=-(\sin\alpha+\sin\beta)^2\leqq 0.$$

12. Пусть m есть наименьшая, а M наибольшая из данных дробей. Тогда:

$$m\leqq\frac{a_i}{b_i}\leqq M\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда

$$mb_i\leqq a_i\leqq Mb_i.$$

Суммируя все эти неравенства (при значениях i от 1 до n), найдем:

$$m\sum b_i\leqq\sum a_i\leqq M\sum b_i.$$

Итак, действительно:

$$m\leqq\frac{\sum a_i}{\sum b_i}\leqq M.$$

13. Мы предполагаем, конечно, что все величины $a,\ b,\ \ldots,\ l$ положительны и везде берется арифметическое значение корня. Кроме того, m, n, ..., p — целые положительные числа. Возьмем логарифмы наших корней, т. е. рассмотрим величины:

$$\frac{\lg a}{m},\ \frac{\lg b}{n},\ \ldots,\ \frac{\lg l}{p}.$$

Пусть μ наименьшая, а M наибольшая из этих дробей. На основании результатов задачи 12 имеем:

$$\mu<\frac{\lg a+\lg b+\ldots+\lg l}{m+n+\ldots+p}<M.$$

Следовательно:

$$\mu<\lg\sqrt[m+n+\ldots+p]{ab\ldots l}<M,$$

и наше предложение легко отсюда следует.

14. См. задачу 12.

15. Имеем:

$$x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda=y^2(x^{\lambda-2}-y^{\lambda-2})+z^2(x^{\lambda-2}-z^{\lambda-2}),$$

так как

$$x^2=y^2+z^2.$$

Из того же равенства следует: $x>y$; $x>z$. Поэтому, если

$$\lambda-2>0,$$

то

$$z^{\lambda-2}-y^{\lambda-2}>0\quad\text{и}\quad x^{\lambda-2}-z^{\lambda-2}>0,$$

а следовательно, при $\lambda>2$:

$$x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda>0,\ \text{т. е.}\ x^\lambda>y^\lambda+z^\lambda.$$

Совершенно так же докажем, что

$$x^\lambda<y^\lambda+z^\lambda,\ \text{если}\ \lambda<2.$$

16. (См. задачу 7, § 1). Для доказательства можно поступить, например, следующим способом. Если $a^2+b^2=1$, то, очевидно, можно найти такой угол φ, что

$$a=\cos\varphi;\quad b=\sin\varphi.$$

Совершенно так же можно отыскать угол φ' такой, что

$$m=\cos\varphi',\quad n=\sin\varphi'.$$

Тогда имеем:

$$|am+bn|=|\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'|=|\cos(\varphi-\varphi')|\leqq 1.$$

17. Имеем:

$$a^2\geqq a^2-(b-c)^2,$$
$$b^2\geqq b^2-(c-a)^2,$$
$$c^2\geqq c^2-(a-b)^2.$$

Перемножая, получим:

$$a^2b^2c^2\geqq(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2.$$

Отсюда и следует искомое неравенство.

18. Известно, что если $A+B+C=\pi$, то

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

(см. задачу 40, 4°, § 2).

Положим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x;\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=y;\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=z.$$

Тогда остается доказать, что

$$x^2+y^2+z^2\geqq 1,$$

если

$$xy+xz+yz=1.$$

Но имеем:

$$2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)=(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geqq 0.$$

Отсюда

$$2(x^2+y^2+z^2)-2\geqq 0,$$
$$x^2+y^2+z^2\geqq 1.$$

19. Имеем:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}};$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Следовательно, достаточно доказать:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\leqq\frac{1}{8}.$$

Но

$$p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2};\quad p-b=\frac{a+c-b}{2};$$
$$p-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

Поэтому нужно только доказать:

$$\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc} \leqq 1,$$

при условии, что $b+c-a>0$, $a+c-b>0$ и $a+b-c>0$ (см. задачу 17). Можно доказать это неравенство и иначе. Положим:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\xi;$$

имеем тогда:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2}.$$

Отсюда

$$\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+2\xi=0.$$

Следовательно:

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}\pm\sqrt{\cos^2\frac{A-B}{2}-8\xi}}{2}.$$

Так как $\cos\frac{A+B}{2}$ и $\cos\frac{A-B}{2}$ вещественны, то должно быть:

$$\cos^2\frac{A-B}{2}-8\xi\geqq 0;$$

$$8\xi\leqq\cos^2\frac{A-B}{2};\quad 8\xi\leqq 1;\quad \xi\leqq\frac{1}{8}.$$

20. 1° Имеем соотношение (см. задачу 40, 2°, § 2):

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Пользуясь результатом предыдущей задачи, получаем искомое неравенство.

2° Так как существует соотношение:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C),$$

то данная задача представляет собою частный случай задачи 48 этого параграфа.

21. Достаточно доказать, что

$$(a+c)(b+d)\geqq ab+cd+2\sqrt{abcd},$$

т. е. что

$$cb+ad\geqq 2\sqrt{cbad}.$$

Но

$$cb+ad-2\sqrt{cbad}=(\sqrt{cb}-\sqrt{ad})^2\geqq 0.$$

22. Имеем:

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqq 0.$$

Отсюда

$$a^2-ab+b^2 \geqq ab,$$

$$a^3+b^3 \geqq ab(a+b).$$

Следовательно:

$$3a^3+3b^3 \geqq 3a^2b+3ab^2.$$

Прибавим к обеим частям этого последнего неравенства по a^3+b^3. Имеем:

$$4a^3+4b^3 \geqq (a+b)^3.$$

Итак, действительно:

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

23. 1° Нужно доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического. В самом деле:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0.$$

2° Для того чтобы доказать, что

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leqq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} \qquad (a>b),$$

достаточно доказать:

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \leqq \frac{(a-b)^2}{b}.$$

Следовательно, нужно доказать:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b} \geqq \frac{1}{2}.$$

Имеем:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \geqq \frac{1}{2},$$

так как $\frac{a}{b}>1$.

Аналогично доказывается и второе неравенство.

24. Положим $a=x^3$; $b=y^3$; $c=z^3$. Тогда остается только доказать, что

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq 0$$

при любых неотрицательных x, y и z.

Однако имеем (см. задачу 20, § 1):

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

Итак, остается доказать только, что

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqq 0.$$

Но мы имеем (см. задачу 10, § 5):

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geqq 0.$$

25. Имеем:

$$\sqrt{a_1a_2} \leqq \frac{a_1+a_2}{2}; \quad \sqrt{a_1a_3} \leqq \frac{a_1+a_3}{2}; \ \ldots; \ \sqrt{a_{n-1}a_n} \leqq \frac{a_{n-1}+a_n}{2}.$$

Складывая эти неравенства почленно, получаем искомое.

26. Имеем:

$$\frac{1+a_1}{2} \geqq \sqrt{a_1}; \quad \frac{1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_2}; \ \ldots; \ \frac{1+a_n}{2} \geqq \sqrt{a_n}.$$

Перемножая эти неравенства почленно, имеем:

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{2^n} \geqq \sqrt{a_1a_2\ldots a_n} = 1..$$

Итак, действительно:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqq 2^n.$$

27. 1° Воспользуемся следующим тождеством:

$$(a+b)(a+c)(b+c) = (ab+ac+bc)(a+b+c) - abc.$$

Но

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}; \quad \frac{ab+ac+bc}{3} \geqq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Поэтому

$$(a+b+c)(ab+ac+bc) \geqq 9abc,$$

и следовательно:

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqq 8abc.$$

2° Имеем:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1 + \frac{b+a+c}{a+c} - 1 +$$
$$+ \frac{c+a+b}{a+b} - 1 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3.$$

Но

$$(b+c)+(a+c)+(c+b) \geqq 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)},$$

т. е.

$$a+b+c \geqq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

Далее:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{(b+c)(a+c)(a+b)}\{(b+c)(a+c) +$$
$$+ (b+c)(a+b) + (a+b)(a+c)\} \geqq$$
$$\geqq \frac{3}{(b+c)(a+c)(a+b)}\sqrt[3]{(b+c)^2(a+c)^2(a+b)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)} \times$$
$$\times \frac{3}{(b+c)(a+c)(a+b)}\sqrt[3]{(b+c)^2(a+c)^2(a+b)^2} - 3.$$

Итак, действительно:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqq\frac{3}{2}.$$

28. Достаточно доказать:

$$(a+k)(b+l)(c+m)\geqq\left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}\right)^3.$$

Имеем:

$$(a+k)(b+l)(c+m)=abc+klm+(alc+kbc+abm)+(klc+alm+kbm),$$

$$\left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}\right)^3=abc+klm+3\sqrt[3]{a^3b^2c^2klm}+3\sqrt[3]{k^2l^2m^2abc.}$$

Но

$$\frac{alc+kbc+abm}{3}\geqq\sqrt[3]{a^2b^2c^2klm};\qquad \frac{klc+alm+kbm}{3}\geqq\sqrt[3]{k^2l^2m^2abc.}$$

Отсюда и следует справедливость нашего неравенства.

29. Имеем:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Но

$$\sqrt[3]{abc}\leqq\frac{a+b+c}{3},$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqq\frac{3}{a+b+c}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqq\frac{9}{a+b+c}.$$

30. Нужно доказать, что среднее арифметическое n положительных чисел не меньше ($\geqq$) среднего геометрического этих чисел. Мы приведем несколько доказательств этого предложения. Начнем с наиболее изящного из них. Оно принадлежит Коши.

Итак, нам нужно доказать, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

При $n=1$ справедливость этого неравенства очевидна. При $n=2$ и при $n=3$ предложение нами было доказано (см. задачи 23, 24).

Покажем сначала, как доказать справедливость нашего утверждения при $n=4$. Имеем:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\geqq\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}}.$$

Но

$$\frac{x_1+x_2}{2}\geqq\sqrt{x_1x_2};\qquad \frac{x_3+x_4}{2}\geqq\sqrt{x_3x_4}.$$

Поэтому

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Докажем теперь вообще, что, если теорема справедлива при $n=m$, то она справедлива и при $n=2m$.

В самом деле:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2m-1}+x_{2m}}{2m} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots+\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}}{m} \geqq \sqrt[m]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\ldots\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}}$$

(так как мы предполагаем справедливость теоремы при $n=m$).

Далее:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2m}}{2m} \geqq \sqrt[m]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}\ldots\sqrt{x_{2m-1}x_{2m}}} = \sqrt[2m]{x_1x_2x_3x_4\ldots x_{2m}}.$$

Итак, предполагая, что теорема справедлива при $n=m$, мы доказали, что она справедлива и при $n=2m$. А так как мы доказали справедливость теоремы для $n=2$, то она справедлива при $n=4$, 8, 16, ..., т. е. справедлива при n, равном любой степени двух. Однако нам нужно доказать, что теорема справедлива при любом целом значении n. Возьмем некоторое значение n. Если n является степенью двух, то для такого n теорема справедлива, если же нет, то всегда можно прибавить к n некоторое q, такое, что $n+q$ будет степенью двух.

Положим:

$$n+q=2^m.$$

Тогда имеем

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+q}}{n+q} \geqq \sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\cdot x_{n+1}\ldots x_{n+q}}$$

при любых положительных x_i $(i=1, 2, \ldots, n+q)$.

Положим:

$$x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{n+q}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Получаем:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\cdot q}{n+q} \geqq \sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q}.$$

Отсюда

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q},$$

или

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{n+q} \geqq x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q,$$

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n \geqq x_1x_2\ldots x_n$$

и, окончательно:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Итак, теорема справедлива для любого целого показателя n. Очевидно, что если $x_1=x_2=\ldots=x_n$, то в нашей теореме имеет место знак равенства. Докажем, что знак равенства может быть только тогда, когда все величины x_1, x_2, ..., x_n равны между собой. Предположим, что хотя бы две из величин, например x_1 и x_2, не равны между собою. Докажем, что тогда обязательно будет иметь место знак неравенства, т. е. будет:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

В самом деле:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\ldots x_n}.$$

Но если x_1 не равно x_2, то

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2};$$

следовательно,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\ldots x_n} > \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n},$$

а потому и

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

если хотя бы две из величин x_1, x_2, ..., x_n не равны между собою. Мы дадим еще несколько доказательств этой теоремы. Перейдем ко второму. Пусть n — положительное число, большее или равное единице ($n \geqq 1$). Допустим, что a и b — два вещественных положительных числа. Тогда имеет место неравенство:

$$(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b) \geqq 0.$$

Отсюда

$$a^n+b^n \geqslant a^{n-1}b+b^{n-1}a.$$

Рассмотрим n положительных чисел: a, b, c, ..., k, l. Применим это неравенство для всевозможных пар чисел, образующихся из данных n чисел. Сложим образующиеся неравенства. Находим:

$$\begin{aligned}(a^n+b^n)+(a^n+c^n)+\ldots+(a^n+l^n)&+\\ +(b^n+c^n)+\ldots+(b^n+l^n)+\ldots+(k^n+l^n) &\geqq (a^{n-1}b+b^{n-1}a)+\\ +(a^{n-1}c+c^{n-1}a)+\ldots&+(a^{n-1}l+l^{n-1}a)+\ldots+(k^{n-1}l+l^{n-1}k).\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$(n-1)(a^n+b^n+\ldots+l^n) \geqq$$
$$\geqq a(b^{n-1}+c^{n-1}+\ldots+l^{n-1})+b(a^{n-1}+c^{n-1}+\ldots+l^{n-1})+$$
$$+c(a^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+l^{n-1})+\ldots$$
$$\ldots+l(a^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+k^{n-1}). \quad (*)$$

Пользуясь этим неравенством, можно методом индукции доказать нашу теорему о соотношении между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел. Нам нужно доказать, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Положим:

$$x_1=a^n; \quad x_2=b^n; \quad x_3=c^n; \ \ldots; \ x_{n-1}=k^n; \ x_n=l^n.$$

Тогда достаточно доказать, что

$$\frac{a^n+b^n+\ldots+k^n+l^n}{n} \geqq ab\ldots kl.$$

Допустим, что это неравенство справедливо при значении показателя, равном $n-1$, т. е.

$$b^{n-1}+\ldots+k^{n-1}+l^{n-1} \geqq (n-1)\, b\cdot k\ldots l,$$
$$a^{n-1}+c^{n-1}+\ldots+l^{n-1} \geqq (n-1)\, a\cdot c\ldots l,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+k^{n-1} \geqq (n-1)\, a\cdot b\ldots k.$$

Пользуясь неравенством (*), находим:

$$(n-1)(a^n+b^n+\ldots+k^n+l^n) \geqq$$
$$\geqq a(n-1)\,bk\ldots l+b(n-1)\,a\cdot c\ldots l+\ldots+l(n-1)\,ab\ldots k.$$

Отсюда

$$(n-1)(a^n+b^n+\ldots+k^n+l^n) \geqq (n-1)\cdot n\cdot a\cdot b\cdot c\ldots kl,$$

т. е.

$$\frac{a^n+b^n+\ldots+l^n}{n} \geqq abc\ldots kl.$$

Итак, наша теорема вторично доказана. Переходим к **третьему** доказательству этой теоремы. Оно опять будет проведено методом математической индукции. Пусть имеется n положительных чисел $a, b, \ldots, k, l$. Нужно доказать:

$$a+b+\ldots+k+l \geqq n\sqrt[n]{ab\ldots kl}.$$

Предполагая, что теорема справедлива для $n-1$ чисел, имеем:

$$a+b+\ldots+k+l \geqq (n-1)\sqrt[n-1]{ab\ldots k}+l.$$

Итак, теорема будет доказана, если будет доказано неравенство:

$$(n-1)\sqrt[n-1]{ab\ldots k}+l \geqq n\sqrt[n]{ab\ldots k\cdot l}.$$

Отсюда следует, что нужно доказать неравенство:

$$(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{ab\ldots kl}{l^n}}+1 \geqq n\sqrt[n]{\frac{ab\ldots kl}{l^n}}.$$

Положим:

$$\frac{ab\ldots kl}{l^n}=\xi^{n(n-1)}.$$

Поэтому нужно доказать:

$$(n-1)\xi^n+1\geqq n\xi^{n-1}.$$

Итак, доказательство нашей теоремы сводится к доказательству неравенства:

$$n\xi^{n-1}(\xi-1)\geqq\xi^n-1,$$

где ξ — любое вещественное положительное число, а n — целое положительное. Докажем это неравенство. При $\xi=1$, очевидно, имеем знак равенства. Допустим теперь, что $\xi>1$. Нужно доказать:

$$\frac{\xi^n-1}{\xi-1}\leqq n\xi^{n-1}.$$

Имеем:

$$\frac{\xi^n-1}{\xi-1}=\xi^{n-1}+\xi^{n-2}+\ldots+\xi^2+\xi+1.$$

Но

$$1<\xi<\xi^2<\xi^3<\ldots<\xi^{n-2}<\xi^{n-1}.$$

Поэтому

$$\xi^{n-1}+\xi^{n-2}+\ldots+\xi+1<n\xi^{n-1},$$

и, следовательно, действительно:

$$\frac{\xi^n-1}{\xi-1}<n\xi^{n-1}.$$

Если же $\xi<1$, то нужно доказать, что

$$\frac{\xi^n-1}{\xi-1}>n\xi^{n-1}.$$

Этот результат устанавливается совершенно аналогично предыдущему, и теорема доказана. Заметим, что все рассмотренные нами доказательства были проведены методом математической индукции. Поэтому желательно было бы получить такое доказательство, которое устанавливало бы непосредственно, что

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

если a_1, a_2, $\ldots$, a_n — любые положительные величины, не равные одновременно между собою. Положим $a_i=x_i^n$. Тогда нужно доказать, что

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{n}-x_1x_2\ldots x_n>0,$$

т. е. вопрос сводится к тому, чтобы установить, что некоторая функция (форма) от n переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n положительна. Известно, что n букв x_1, x_2, $\ldots$, x_n можно переставить $n!$ способом. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть некоторая функция от n переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, то символом $\sum f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы будем обозначать сумму $n!$ величин, возникающих из

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ путем применения всех возможных перестановок. Так, например,

$$\sum x_1 x_2 \ldots x_n = n!\, x_1 x_2 \ldots x_n,$$

$$\sum x_1^n = (n-1)!\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right).$$

Введем обозначение:

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \ldots x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Легко видеть, что при применении любой из перестановок функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не меняется. Поэтому имеем:

$$n!\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right) - \sum x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Но

$$\sum x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = n!\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right).$$

С другой стороны:

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = \frac{1}{(n-1)!}\sum x_1^n,$$

поэтому

$$n!\,\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum x_1^n - \sum x_1 x_2 \ldots x_n. \qquad (*)$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sum\left(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}\right)(x_1 - x_2),\\
\varphi_2 &= \sum\left(x_1^{n-2} - x_2^{n-2}\right)(x_1 - x_2)\, x_3,\\
\varphi_3 &= \sum\left(x_1^{n-3} - x_2^{n-3}\right)(x_1 - x_2)\, x_3 x_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{n-1} &= \sum (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)\, x_3 x_4 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 2\sum x_1^n - 2\sum x_1^{n-1} x_2,\\
\varphi_2 &= 2\sum x_1^{n-1} x_2 - 2\sum x_1^{n-2} x_2 x_3,\\
\varphi_3 &= 2\sum x_1^{n-2} x_2 x_3 - 2\sum x_1^{n-3} x_2 x_3 x_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{n-1} &= 2\sum x_1^2 x_2 x_3 \ldots x_n - 2\sum x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Складывая эти выражения почленно, находим:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{n-1} = 2\sum x_1^n - 2\sum x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (*), получим:

$$n!\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{n-1}).$$

Итак:

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \ldots x_n = \frac{1}{2\cdot n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}).$$

Однако легко видеть, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ обращаются все в нуль тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Если же переменные не все одновременно равны между собою, то все $\varphi_i>0$. Действительно, имеем:

$$\varphi_1=\sum(x_1-x_2)^2\left(x_1^{n-2}+\ldots+x_2^{n-2}\right)\geqq 0,$$
$$\varphi_2=\sum(x_1-x_2)^2\left(x_1^{n-3}+\ldots+x_2^{n-3}\right)x_3\geqq 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}=\sum(x_1-x_2)^2\,x_3x_4\ldots x_n\geqq 0.$$

Поэтому

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{n}-x_1x_2\ldots x_n\geqq 0,$$

причем равенство возможно только в том случае, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Итак, теорема доказана. Изложенное только что доказательство принадлежит А. Гурвицу (Werke, Bd. II).

31. Имеем (пользуясь предыдущей задачей):

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2n}\,n=\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Для того чтобы доказать второе неравенство, рассмотрим произведение:

$$(a_1a_2\ldots a_n)^2=(a_1a_n)(a_2a_{n-1})\ldots(a_na_1).$$

Но можно доказать, что

$$a_ka_{n-k+1}\geqq a_1a_n \qquad \text{(см. задачу 19, § 7).}$$

Поэтому

$$(a_1a_2\ldots a_n)^2\geqq(a_1a_n)^n$$

и

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\geqq\sqrt{a_1a_n}.$$

32. Рассмотрим a величин, равных $\frac{1}{a}$, b величин, равных $\frac{1}{b}$, и c величин, равных $\frac{1}{c}$. Среднее арифметическое этих величин будет:

$$\frac{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}}{a+b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

Среднее геометрическое:

$$\sqrt[a+b+c]{\frac{1}{a^a}\cdot\frac{1}{b^b}\cdot\frac{1}{c^c}}.$$

Следовательно:

$$\frac{3}{a+b+c}\geqq\sqrt[a+b+c]{\frac{1}{a^a}\cdot\frac{1}{b^b}\cdot\frac{1}{c^c}},$$

т. е.

$$a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}\geqq\frac{1}{3}(a+b+c).$$

33. Положим

$$a=\frac{\alpha}{m};\quad b=\frac{\beta}{m};\quad c=\frac{\gamma}{m},$$

где α, β, γ и m — целые положительные.

Рассмотрим произведение:

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c=$$

$$=\sqrt[m]{\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^\alpha\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^\beta\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^\gamma}.$$

Так как α, β и γ — целые положительные числа, то подкоренное выражение можно рассматривать как произведение α сомножителей, равных $1+\frac{b-c}{a}$, β сомножителей, равных $1+\frac{c-a}{b}$, и γ сомножителей, равных $1+\frac{a-b}{c}$.

Тогда имеем:

$$\sqrt[\alpha+\beta+\gamma]{\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^\alpha\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^\beta\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^\gamma}\leqq$$

$$\leqq\frac{\alpha\left(1+\frac{b-c}{a}\right)+\beta\left(1+\frac{c-a}{b}\right)+\gamma\left(1+\frac{a-b}{c}\right)}{\alpha+\beta+\gamma}=1.$$

Возводя обе части этого неравенства в степень $a+b+c$, получаем искомый результат.

34. Имеем:

$$\frac{\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\ldots+\frac{s}{s-l}}{n}\geqq$$

$$\geqq\sqrt[n]{\frac{s^n}{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)}}=\frac{s}{\sqrt[n]{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)}}.$$

Но

$$\sqrt[n]{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)}\leqq\frac{(s-a)+(s-b)+\ldots+(s-l)}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot s.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(s-a)(s-b)\ldots(s-l)}}\geqq\frac{n}{(n-1)s}.$$

Дальнейшее очевидно.

35. Прежде всего это неравенство может быть получено из тождества Лагранжа (см. задачу 5, § 1). Однако можно поступить для доказательства и несколько иначе. Составим следующее выражение:

$$(\lambda a_1+\mu b_1)^2+(\lambda a_2+\mu b_2)^2+\ldots+(\lambda a_n+\mu b_n)^2=A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2,$$

где

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2;\quad C=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2;$$

$$B=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Так как левая часть этого неравенства представляет собою сумму квадратов, то

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 \geqq 0$$

при всех значениях λ и μ.

Следовательно, трехчлен

$$Ax^2 + 2Bx + C$$

при всех вещественных значениях x больше или равен нулю. Поэтому корни этого трехчлена либо вещественные равные, либо мнимые, и дискриминант его меньше или равен нулю, т. е.

$$B^2 - AC \leqq 0.$$

Итак:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \leqq 0.$$

Отсюда следует также, что знак равенства возможен только при условии:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

36. Положим в неравенстве предыдущей задачи $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$. Тогда имеем:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

Отсюда, действительно:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

37. Результат получается из формулы задачи 35, если положить:

$$a_1^2 = x_1;\quad a_2^2 = x_2;\quad \ldots;\quad a_n^2 = x_n,$$

$$b_1^2 = \frac{1}{x_1};\quad b_2^2 = \frac{1}{x_2};\quad \ldots;\quad b_n^2 = \frac{1}{x_n}.$$

Однако можно воспользоваться и теоремой о среднем арифметическом. Именно, имеем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}}.$$

Перемножая эти два неравенства, получаем искомый результат.

38. Докажем сначала, что

$$p^2 - \frac{2n}{n-1}q \geqq 0.$$

Имеем:

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

$$0 \leqq (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_n - x_{n-1})^2.$$

Следовательно:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2q \geqq 0.$$

Но

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = p^2 - 2q.$$

Отсюда и получаем:

$$p^2-\frac{2n}{n-1}q\geqq 0.$$

Рассмотрим теперь вместо n величин $n-1$ величину: $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, исключив из рассматриваемых одну из величин x_i, и положим:

$$p-x_i=p',$$
$$q-(x_ix_1+x_ix_2+\ldots+x_ix_{i-1}+x_ix_{i+1}+\ldots+x_ix_n)=q'.$$

Применяя только что выведенное неравенство, можем утверждать, что

$$p'^2-\frac{2(n-1)}{n-2}q'\geqq 0.$$

Но

$$q'=q-x_i(x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n)=q-x_i(p-x_i).$$

Поэтому

$$(p-x_i)^2-\frac{2(n-1)}{n-2}(q-px_i+x_i^2)\geqq 0.$$

Следовательно:

$$nx_i^2-2px_i+2(n-1)q-(n-2)p^2\leqq 0.$$

Рассмотрим трехчлен второй степени:

$$nx^2-2px+2(n-1)q-(n-2)p^2$$

и обозначим его корни через α и β.

Решая квадратное уравнение, найдем:

$$\alpha=\frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q},$$
$$\beta=\frac{p}{n}+\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}\qquad(\beta>\alpha).$$

Тогда имеем тождество:

$$nx_i^2-2px_i+2(n-1)q-(n-2)p^2=n(x_i-\alpha)(x_i-\beta)\leqq 0.$$

Отсюда следует, что x_i лежит между α и β, т. е.

$$\alpha<x_i<\beta.$$

39. Пусть a и b — два вещественных положительных числа. Если $p>0$, то при $a>b$, $a^p-b^p>0$, если же $p<0$, то при $a>b$ $a^p-b^p<0$. Поэтому мы можем утверждать: $(a^p-b^p)(a^q-b^q)\geqq 0$, если p и q одного знака; $(a^p-b^p)\times\times(a^q-b^q)\leqq 0$, если p и q разных знаков и при любых вещественных a и b. Рассмотрим сначала тот случай, когда p и q одного знака. Имеем:

$$a^{p+q}+b^{p+q}\geqq a^pb^q+a^qb^p,$$
$$a^{p+q}+c^{p+q}\geqq a^pc^q+a^qc^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{p+q}+l^{p+q}\geqq a^pl^q+a^ql^p,$$
$$b^{p+q}+c^{p+c}\geqq b^pc^q+b^qc^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем:

$$(n-1)(a^{p+q}+b^{p+q}+\ldots+l^{p+q})\geqq\sum a^pb^q,$$

где a и b в последней сумме принимают все значения из ряда $a, b, c, \ldots, l$. Прибавим к обеим частям этого неравенства:

$$\sum a^{p+q}.$$

Получаем:

$$n(a^{p+q}+b^{p+q}+\ldots+l^{p+q}) \geqq (a^p+b^p+\ldots+l^p)(a^q+b^q+\ldots+l^q).$$

Совершенно аналогично получается и второе неравенство. Легко получить из этих неравенств результаты задач 36 и 37.

40. 1° Пусть $\lambda=\frac{m}{n}$; $m>n$. Имеем:

$$\sqrt[m]{\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)\ldots\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)1\cdot 1\ldots 1}<$$

$$<\frac{\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)+\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)+\ldots+\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)+m-n}{m}$$

$\left(\text{множитель } 1+\alpha\frac{m}{n}\right.$ берется под корнем n раз, а множитель 1 берется $m-n$ раз$\Big)$. Отсюда

$$\left(1+\alpha\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}<1+\alpha,$$

или

$$(1+\alpha)^{\frac{m}{n}}>1+\alpha\frac{m}{n}.$$

2° Положим $\lambda=\frac{m}{n}$ и допустим сначала $m>n$, т. е. $\lambda>1$. Имеем:

$$\sqrt[m]{\left(1-\alpha\frac{m}{n}\right)\left(1-\alpha\frac{m}{n}\right)\ldots\left(1-\alpha\frac{m}{n}\right)\cdot 1\cdot 1\ldots 1}<$$

$$<\frac{\left(1-\alpha\frac{m}{n}\right)n+m-n}{m}.$$

Множитель $1-\alpha\frac{m}{n}$ берется под знаком корня n раз, а множитель 1 берется $m-n$ раз. Отсюда

$$\left(1-\alpha\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}<1-\alpha<\frac{1}{1+\alpha},$$

$$1-\alpha\frac{m}{n}<\frac{1}{(1+\alpha)^{\frac{m}{n}}},$$

$$(1+\alpha)^{\frac{m}{n}}<\frac{1}{1-\alpha\cdot\frac{m}{n}}.$$

Предположим теперь, что $m<n$. Имеем:

$$\sqrt[n]{(1+\alpha)^m}=\sqrt[n]{(1+\alpha)(1+\alpha)\,\ldots\,(1+\alpha)\cdot 1\cdot 1\,\ldots\,1}<$$
$$<\frac{(1+\alpha)\,m+n-m}{n}=1+\frac{\alpha m}{n}<\frac{1}{1-\frac{\alpha m}{n}}.$$

Итак, и в этом случае

$$(1+\alpha)^{\frac{m}{n}}<\frac{1}{1-\frac{\alpha m}{n}}.$$

Отметим, что мы предполагали $\frac{\alpha m}{n}<1$.

41. 1° Положим в неравенстве 1° предыдущей задачи $\alpha=\frac{1}{n+1}$; $\lambda=\frac{n+1}{n}$. Получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}>1+\frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

т. е. $u_{n+1}>u_n$.

Приведем еще одно из доказательств. Не пользуясь теоремой о среднем арифметическом, докажем, что

$$\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{a}{n}\right)^n,$$

если $a>0$ и n — целое положительное.

Рассмотрим тождество:

$$1+nx=\frac{1+nx}{1+(n-1)\,x}\cdot\frac{1+(n-1)\,x}{1+(n-2)\,x}\,\ldots\,\frac{1+3x}{1+2x}\cdot\frac{1+2x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1}$$
$$(x>0).$$

Но

$$\frac{1+(k+1)\,x}{1+kx}=1+\frac{x}{1+kx}>1+\frac{x}{1+nx}=\frac{1+(n+1)\,x}{1+nx}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Поэтому

$$1+nx>\left[\frac{1+(n+1)\,x}{1+nx}\right]^n,$$
$$(1+nx)^{n+1}>[1+(n+1)\,x]^n.$$

Полагая здесь $x=\frac{a}{n\,(n+1)}$, получим:

$$\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{a}{n}\right)^n.$$

В частности, при $a=1$, найдем:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2° Имеем:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k<\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}\frac{n}{k}}\right)^k=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}.$$

Итак,

$$u_n<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}$$

при любом целом положительном k.

Если принять $k=6$, то найдем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{6}{5}\right)^6<3.$$

42. Имеем:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}}<\sqrt[n(n+1)]{\frac{3}{n}}$$

(см. задачу 41).

Но дробь

$$\frac{3}{n}\leqq 1, \text{ если } n\geqq 3.$$

Поэтому

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}<1, \text{ если } n\geqq 3.$$

43. Нужно доказать:

$$\frac{\sqrt[n]{(n+1)}}{\sqrt[n-1]{n}}<1 \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Имеем:

$$\sqrt[n(n-1)]{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}=\sqrt[n(n-1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n}}=$$

$$=\sqrt[n(n-1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}}<\sqrt[n(n-1)]{\frac{3}{n+1}}\leqq 1.$$

44. Докажем, что

$$\lg y_i\geqq a_{i1}\lg x_1+a_{i2}\lg x_2+\ldots+a_{in}\lg x_n \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для этого достаточно доказать:

$$\lg(ax+by+cz+\ldots+lu)\geqq a\lg x+b\lg y+\ldots+l\lg u, \qquad (*)$$

если $a+b+\ldots+l=1$ и a, b ... l — рациональные положительные числа.

Положим:

$$a=\frac{\alpha}{N}; \quad b=\frac{\beta}{N}; \ \ldots; \ l=\frac{\lambda}{N}.$$

Тогда:

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=N.$$

Для доказательства же неравенства (*) достаточно доказать:

$$ax+by+cz+\ldots+lu \geqq x^a y^b \ \ldots \ u^l.$$

Но мы имеем:

$$x^a y^b \ \ldots \ u^l = \sqrt[N]{x^\alpha y^\beta \ \ldots \ u^\lambda} = \sqrt[N]{x \ \ldots \ xy \ \ldots \ y \ \ldots \ u \ \ldots \ u} \leqq$$
$$\leqq \frac{\alpha x+\beta y+\ldots+\lambda u}{N} = ax+by+\ldots+lu.$$

Итак доказано:

$$\lg y_i \geqq a_{i1}\lg x_1 + a_{i2}\lg x_2 + \ldots + a_{in}\lg x_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \lg y_1 \geqq (\lg x_1)\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + (\lg x_2)\sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \ldots + (\lg x_n)\sum_{i=1}^{n} a_{in},$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \lg y_1 \geqq \lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n = \lg x_1 x_2 \ \ldots \ x_n.$$

Наконец:

$$y_1 y_2 \ \ldots \ y_n \geqq x_1 x_2 \ \ldots \ x_n.$$

45. Положим $\frac{b_i}{a_i}=x_i \ (i=1, 2, \ldots, n)$. Тогда нужно будет доказать неравенство:

$$\sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2) \ \ldots \ (1+x_n)} \geqq 1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ \ldots \ x_n}.$$

Теорема справедлива при $n=1, 2, 3$ (см. задачи 21, 28). Допустим, что она справедлива при $n=m$, и докажем, что она справедлива и при $n=2m$.

Имеем:

$$\sqrt[2m]{(1+x_1)(1+x_2) \ \ldots \ (1+x_{2m-1})(1+x_{2m})} =$$
$$= \sqrt[m]{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} \cdot \sqrt{(1+x_3)(1+x_4)} \ \ldots \ \sqrt{(1+x_{2m-1})(1+x_{2m})}} \geqq$$
$$\geqq \sqrt[m]{(1+\sqrt{x_1x_2})(1+\sqrt{x_3x_4}) \ \ldots \ (1+\sqrt{x_{2m-1}x_{2m}})} \geqq 1 +$$
$$+ \sqrt[m]{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4} \ \ldots \ \sqrt{x_{2m-1}x_{2m}}} = 1 + \sqrt[2m]{x_1x_2 \ \ldots \ x_{2m}}.$$

Итак, теорема справедлива для любого показателя, равного степени двух. Докажем теперь, что она справедлива для любого целого показателя n. Пусть $n+q=2^m$. Тогда:

$$\sqrt[n+q]{(1+x_1)(1+x_2) \ \ldots \ (1+x_n)(1+y_1)(1+y_2) \ \ldots \ (1+y_q)} \geqq 1 +$$
$$+ \sqrt[n+q]{x_1x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ \ldots \ y_q}.$$

Положим:

$$1+y_1 = 1+y_2 = \ldots = 1+y_q = \sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2) \ \ldots \ (1+x_n)} = Y.$$

Имеем:

$$\sqrt[n+q]{(1+x_1)(1+x_2)\ \ldots\ (1+x_n)\cdot Y^q} \geqq 1+\sqrt[n+q]{x_1x_2\ \ldots\ x_n(Y-1)^q}.$$

Но

$$(1+x_1)(1+x_2)\ \ldots\ (1+x_n)=Y^n.$$

Поэтому

$$\sqrt[n+q]{Y^nY^q} \geqq 1+\sqrt[n+q]{x_1\ \ldots\ x_n(Y-1)^q},$$

т. е.

$$Y \geqq 1+\sqrt[n+q]{x_1x_2\ \ldots\ x_n(Y-1)^q},$$

или

$$(Y-1)^{n+q} \geqq x_1x_2\ \ldots\ x_n(Y-1)^q.$$

Отсюда

$$(Y-1)^n \geqq x_1x_2\ \ldots\ x_n,$$

$$Y-1 \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\ \ldots\ x_n}.$$

Окончательно:

$$Y=\sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2)\ \ldots\ (1+x_n)} \geqq 1+\sqrt[n]{x_1x_2\ \ldots\ x_n},$$

и теорема доказана.

Знак равенства возможен лишь при условии $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$.

46. Доказательство этой теоремы, так же как и предыдущей, проводится методом Коши. Предложение справедливо при $n=1$; докажем сначала, что оно справедливо при $n=2$, т. е. докажем, что

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k \leqq \frac{x_1^k+x_2^k}{2} \qquad (*)$$

при любом целом положительном k. При $k=1$ это последнее неравенство действительно имеет место. Предполагая справедливость этого неравенства при $k=l$, докажем справедливость его при $k=l+1$. Итак, имеем (согласно предположению):

$$\frac{(x_1+x_2)^l}{2^l} \leqq \frac{x_1^l+x_2^l}{2}.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\frac{x_1+x_2}{2}$. Находим:

$$\frac{(x_1+x_2)^{l+1}}{2^{l+1}} \leqq \frac{(x_1^l+x_2^l)(x_1+x_2)}{4}=\frac{x_1^{l+1}+x_2^{l+1}+x_1x_2^l+x_2x_1^l}{4}.$$

Но

$$x_1^lx_2+x_2^lx_1 \leqq x_1^{l+1}+x_2^{l+1},$$

так как

$$x_1^{l+1}+x_2^{l+1}-x_1^lx_2-x_2^lx_1=(x_1-x_2)(x_1^l-x_2^l) \geqq 0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{l+1} \leqq \frac{x_1^{l+1}+x_2^{l+1}}{2}$$

и неравенство (*) доказано при любом целом k. Итак, иаше основное предложение справедливо при $n=2$. Докажем теперь, что если оно справедливо при $n=m$, то оно справедливо и при $n=2m$. В самом деле:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_{2m-1}+x_{2m}}{2m}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots+\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}}{m}\right)^k\leqq$$

$$\leqq\frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right)^k+\ldots+\left(\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}\right)^k}{m}\leqq$$

$$\leqq\frac{\frac{x_1^k+x_2^k}{2}+\frac{x_3^k+x_4^k}{2}+\ldots+\frac{x_{2m-1}^k+x_{2m}^k}{2}}{m}=$$

$$=\frac{x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k+\ldots+x_{2m-1}^k+x_2^k}{2m}$$

Таким образом, нами установлено, что теорема справедлива при n, равном степени двух. Остается доказать ее справедливость при любом целом n. Положим $n+p=2^m$.

Тогда:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+y_2+\ldots+y_p}{n+p}\right)^k\leqq$$

$$\leqq\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k+y_1^k+y_2^k+\ldots+y_p^k}{n+p}.$$

Положим:

$$y_1=y_2=\ldots=y_p=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Имеем:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+y_2+\ldots+y_p=\frac{(x_1+\ldots+x_n)(n+p)}{n}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^k\leqq\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k+\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k p}{n+p}.$$

Окончательно:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k\leqq\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n},$$

и предложение доказано полностью. Легко установить, что знак равенства возможен только при условии:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

47. Это предложение является обобщением предыдущих теорем (см. задачи 30, 45, 46). Доказательство проводится совершенно так же, как

и в упомянутых теоремах. Именно, предполагая справедливость теоремы при $n=m$, докажем ее справедливость при $n=2m$. Имеем:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_{2m}}{2m}\right)=\varphi\left(\frac{\frac{t_1+t_2}{2}+\ldots+\frac{t_{2m-1}+t_{2m}}{2}}{m}\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{t_{2m-1}+t_{2m}}{2}\right)}{m}<$$

$$<\frac{\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}+\ldots+\frac{\varphi(t_{2m-1})+\varphi(t_{2m})}{2}}{m}=$$

$$=\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(i_{2m-1})+\varphi(t_{2m})}{2m}$$

(так как по условию $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{2m}$ не равны все между собою, то их можно сгруппировать так, что, например, $t_1\neq t_2$). Таким образом, теорема справедлива при $n=2^m$. Положим теперь $n+p=2^m$. Тогда:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n+\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_p}{n+p}\right)<$$

$$<\frac{\varphi(t_1)+\ldots+\varphi(t_n)+\varphi(\tau_1)+\ldots+\varphi(\tau_p)}{n+p}$$

(при этом $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ не равны все между собою). Положим:

$$\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_p=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n},$$

$$\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_p=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}p.$$

Следовательно:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n+\tau_1+\ldots+\tau_p}{n+p}\right)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right).$$

С другой стороны:

$$\frac{\varphi(t_1)+\ldots+\varphi(t_n)+\varphi(\tau_1)+\ldots+\varphi(\tau_p)}{n+p}=$$

$$=\frac{\varphi(t_1)+\ldots+\varphi(t_n)+p\varphi\left(\frac{t_1+\ldots+t_n}{n}\right)}{n+p}.$$

Из последнего неравенства, действительно, получаем:

$$\varphi\left(\frac{t_1+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\ldots+\varphi(t_n)}{n}.$$

Прежде выведенные теоремы (см. задачи 30, 45, 46) получаются, как мы уже утверждали, из этого более общего предложения. Покажем это.

1° Пусть

$$\varphi(t)=-\lg(1+t);$$

тогда:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=-\lg\left(1+\frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Далее:

$$\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}=-\frac{\lg(1+t_1)+\lg(1+t_2)}{2}=-\lg\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

Но

$$\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}<\frac{1+t_1+1+t_2}{2}=1+\frac{t_1+t_2}{2}\ (t_1\neq t_2).$$

Поэтому

$$\lg\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}<\lg\left(1+\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

(основание логарифмов больше единицы)

$$-\lg\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}>-\lg\left(1+\frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Таким образом, функция:

$$\varphi(t)=-\lg(1+t)$$

действительно обладает свойством:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2},$$

а потому должно быть:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(t_n)}{n},$$

т. е.

$$-\lg\left(1+\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)<-\frac{\lg(1+t_1)+\lg(1+t_2)+\ldots+\lg(1+t_n)}{n},$$

$$\lg\sqrt[n]{(1+t_1)(1+t_2)\ \ldots\ (1+t_n)}<\lg\left(1+\frac{t_1+\ldots+t_n}{n}\right).$$

Далее:

$$\sqrt[n]{(1+t_1)(1+t_2)\ \ldots\ (1+t_n)}<1+\frac{t_1+\ldots+t_n}{n}=$$
$$=\frac{(1+t_1)+(1+t_2)+\ldots+(1+t_n)}{n}.$$

Полагая $1+t_i=x_i$, находим окончательно:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ \ldots\ x_n}<\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Очевидно, что если допустить возможность $x_1=x_2=\ldots=x_n$, то будет:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ \ldots\ x_n}\leqq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

2° Если положить:

$$\varphi(t)=t^k,$$

то

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^k.$$

Предполагая установленным неравенство

$$\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^k<\frac{t_1^k+t_2^k}{2},$$

получаем результат задачи 46.

3° Положим:

$$\varphi(t)=\lg(1+e^t)$$

(логарифм берется при основании $e>1$).

Тогда:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=\lg(1+e^{\frac{t_1+t_2}{2}}),$$

$$\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}=\lg\sqrt{(1+e^{t_1})(1+e^{t_2})}.$$

Так как

$$\sqrt{(1+e^{t_1})(1+e^{t_2})}>1+e^{\frac{t_1+t_2}{2}},$$

то для функции $\varphi(t)$ выполняется неравенство:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}\quad(t_1\neq t_2).$$

Поэтому

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\ldots+\varphi(t_n)}{n},$$

т. е.

$$\lg(1+e^{\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}})<\frac{\lg(1+e^{t_1})+\ldots+\lg(1+e^{t_n})}{n},$$

$$1+e^{\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}}<\sqrt[n]{(1+e^{t_1})\ \ldots\ (1+e^{t_n})}.$$

Положим:

$$e^t=\lambda;\quad t=\lg_e\lambda.$$

Тогда:

$$\sqrt[n]{(1+e^{t_1})\ \ldots\ (1+e^{t_n})}=\sqrt[n]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ \ldots\ (1+\lambda_n)}>1+e^{\frac{\lg\lambda_1+\ldots+\lg\lambda_n}{n}}.$$

Окончательно:

$$\sqrt[n]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ \ldots\ (1+\lambda_n)}>1+\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ \ldots\ \lambda_n}.$$

48. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ заключены в промежутке от 0 до π

$$(0<t_i<\pi).$$

Докажем, что

$$-\sin\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}<-\frac{\sin t_1+\sin t_2+\ldots+\sin t_n}{n}.$$

Для этого достаточно доказать (см. задачу 47):

$$-\sin\frac{t_1+t_2}{2}<-\frac{\sin t_1+\sin t_2}{2}.$$

В самом деле:

$$\sin\frac{t_1+t_2}{2}-\frac{\sin t_1+\sin t_2}{2}=\sin\frac{t_1+t_2}{2}-\sin\frac{t_1+t_2}{2}\cos\frac{t_1-t_2}{2}=$$

$$=\sin\frac{t_1+t_2}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t_1-t_2}{4}>0$$

(в нашем случае $\varphi(t)=-\sin t$).

Итак:

$$\frac{\sin t_1+\sin t_2+\ldots+\sin t_n}{n}<\sin\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}$$

(если $0<t_i<\pi$).

Поэтому, если $a_1+a_2+\ldots+a_n=\pi$, то

$$\sin a_1+\sin a_2+\ldots+\sin a_n<n\sin\frac{\pi}{n},$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не равны все между собой.

С другой стороны, если

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{\pi}{n},$$

то величина суммы:

$$\sin a_1+\ldots+\sin a_n$$

становится равной:

$$n\sin\frac{\pi}{n}.$$

Итак, действительно, наибольшим значением суммы:

$$\sin a_1+\sin a_2+\ldots+\sin a_n$$

при условии

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\pi \qquad (a_i>0)$$

будет:

$$n\sin\frac{\pi}{n},$$

и это наибольшее значение суммы достигается при значениях

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{\pi}{n}.$$

49. Докажем, что разность:

$$\frac{x^p-1}{p}-\frac{x^q-1}{q}$$

(если $x\neq 1$ и $p>q$) больше нуля. Для этого достаточно доказать:

$$\Delta=q(x^p-1)-p(x^q-1)>0.$$

Допустим сначала, что $x>1$. Имеем:

$$\Delta=q(x^p-1)-p(x^q-1)=(x-1)\{q(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)-$$
$$-p(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+x+1)\}=(x-1)\{q(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x^q)-$$
$$-(p-q)(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+x+1)\}.$$

Если $x>1$, то

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x^q>(p-q)x^q.$$

Поэтому

$$\Delta = q(x^p-1) - p(x^q-1) > (x-1)\{q(p-q)x^q - (p-q)qx^{q-1}\} =$$
$$= qx^{q-1}(p-q)(x-1)^2 > 0.$$

Итак, если $x > 1$, то теорема доказана. Предположим теперь, что $x < 1$. В этом случае имеем:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^q < (p-q)x^q,$$
$$x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1 > qx^{q-1},$$
$$q(x^{p-1} + \ldots + x^q) - (p-q)(x^{q-1} + \ldots + x + 1) < (p-q)qx^q - q(p-q)x^{q-1} =$$
$$= q(p-q)x^{q-1}(x-1).$$

Следовательно:

$$\Delta > q(p-q)x^{q-1}(x-1)^2 > 0.$$

Впрочем, это предложение можно доказать, исходя из теоремы о среднем арифметическом. Напомним, что мы имеем неравенство (см. задачу 40):

$$(1+\alpha)^\lambda > 1 + \alpha\lambda$$

($\lambda > 1$, рациональное; $\alpha > 0$, вещественное).

Совершенно аналогично тому, как было получено это неравенство, можно вывести следующее:

$$(1-\alpha)^\lambda > 1 - \alpha\lambda,$$

если $0 < \alpha < 1$; $\lambda > 1$, рациональное. Пользуясь этими неравенствами, мы докажем, что

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q},$$

если $p > q$ $(x \neq 1)$.

Положим $x^q = \xi$; $\frac{p}{q} = \lambda$. Тогда нужно доказать:

$$\xi^\lambda - 1 > \lambda(\xi - 1),$$

или

$$\xi^\lambda - 1 - \lambda(\xi - 1) > 0.$$

Допустим сначала $x > 1$; $\xi > 1$. Положим $\xi = 1 + \alpha$. Тогда имеем:

$$\xi^\lambda - 1 - \lambda(\xi - 1) = (1+\alpha)^\lambda - 1 - \lambda\alpha > 0.$$

Если же $x < 1$, то и $\xi < 1$. Полагаем в этом случае

$$\xi = 1 - \alpha \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Легко находим:

$$\xi^\lambda - 1 - \lambda(\xi - 1) = (1-\alpha)^\lambda - 1 - \lambda(-\alpha) > 0.$$

50. Допустим сначала, что $m > 1$. Положим $m = \frac{p}{q}$ ($p > q$, целое, положительное). Имеем тогда (см. задачу 49):

$$\frac{\xi^p - 1}{p} > \frac{\xi^q - 1}{q} \qquad (\xi \neq 1).$$

Положим $\xi^q = x$; $\xi = x^{\frac{1}{q}}$. Тогда получаем:

$$x^m - 1 > m(x - 1).$$

Заменим в этом неравенстве x через $\frac{1}{x}$. Находим:

$$\frac{1}{x^m}-1>m\left(\frac{1}{x}-1\right).$$

Умножая обе части этого неравенства на $-x^m$, получим:

$$x^m-1<mx^{m-1}(x-1).$$

Итак, если $m>1$, то действительно:

$$mx^{m-1}(x-1)>x^m-1>m(x-1). \qquad (1)$$

Допустим теперь, что $0<m<1$. Полагая $\xi^q=x$, $\frac{q}{p}=m$, находим:

$$x^{\frac{1}{m}}-1>\frac{1}{m}(x-1).$$

Заменяя здесь x через x^m, найдем:

$$x^m-1<m(x-1).$$

Заменяя в этом последнем неравенстве x через $\frac{1}{x}$ и делая необходимые преобразования, найдем:

$$mx^{m-1}(x-1)<x^m-1<m(x-1) \qquad (0<m<1). \qquad (2)$$

Перейдем теперь к рассмотрению отрицательных значений m. Положим $m=-n$, где $n>0$, рациональное. Докажем сначала, что при отрицательном m

$$x^m-1>m(x-1).$$

Так как $n>0$, то $n+1>1$ и можно воспользоваться неравенствами (1). Именно, имеем:

$$x^{n+1}-1<(n+1)x^n(x-1).$$

Отсюда

$$nx^n(x-1)>x^n-1.$$

Заменяя здесь n через $-m$, найдем:

$$-mx^{-m}(x-1)>x^{-m}-1.$$

Умножая обе части этого неравенства на $-x^m$, получаем, действительно:

$$x^m-1>m(x-1).$$

Если же заменить в этом неравенстве x через $\frac{1}{x}$, то находим:

$$x^m-1<mx^{m-1}(x-1).$$

Итак, действительно:

$$mx^{m-1}(x-1)<x^m-1<m(x-1),$$

если $0<m<1$,

$$m(x-1)<x^m-1<mx^{m-1}(x-1),$$

если m — любое рациональное, не лежащее в промежутке от 0 до 1, а x — любое вещественное положительное число, не равное единице.

51. Неравенства этой задачи непосредственно следуют из результатов предыдущей.

52. Положим:

$$x_i^p = y_i; \qquad \frac{q}{p} = m.$$

Тогда предполагаемое неравенство перепишется так:

$$\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)^m \leqq \frac{y_1^m+y_2^m+\ldots+y_n^m}{n},$$

где $m \geqq 1$, рациональное. На основании результатов задачи 47 достаточно доказать, что

$$\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^m \leqq \frac{t_1^m+t_2^m}{2}$$

при любом рациональном $m > 1$ и при любых вещественных положительных t_1 и t_2. Иначе, достаточно доказать:

$$\left(\frac{2t_1}{t_1+t_2}\right)^m + \left(\frac{2t_2}{t_1+t_2}\right)^m \geqq 2. \tag{1}$$

Воспользуемся результатами задачи 51:

$$(1+x)^m \geqq 1+mx,$$

если $m > 1$ рациональное и $1+x > 0$. Имеем:

$$\left(\frac{2t_1}{t_1+t_2}\right)^m \geqq 1+m\left(\frac{2t_1}{t_1+t_2}-1\right),$$
$$\left(\frac{2t_2}{t_1+t_2}\right)^m \geqq 1+m\left(\frac{2t_2}{t_1+t_2}-1\right).$$

Складывая эти два неравенства, получим неравенство (1), и решение задачи окончено. Решение нашей задачи может быть получено и непосредственно из неравенств задачи 51. Покажем, что таким путем можно вывести даже более общее неравенство. Именно докажем:

$$\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)^\lambda \leqq \frac{y_1^\lambda+y_2^\lambda+\ldots+y_n^\lambda}{n},$$

если λ — рациональное число, не лежащее в промежутке от нуля до единицы, и

$$\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)^\lambda \geqq \frac{y_1^\lambda+y_2^\lambda+\ldots+y_n^\lambda}{n},$$

если $0 < \lambda < 1$. Легко видеть, что для доказательства первого неравенства достаточно доказать:

$$\left(\frac{ny_1}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)^\lambda + \left(\frac{ny_2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)^\lambda + \ldots + \left(\frac{ny_n}{y_1+\ldots+y_n}\right)^\lambda \geqq n. \tag{2}$$

Однако, имеем (см. задачу 51):

$$\left(\frac{ny_i}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)^\lambda \geqq 1+\lambda\left(\frac{ny_i}{y_1+y_2+\ldots+y_n}-1\right).$$

Полагая здесь $i=1, 2, \ldots, n$ и складывая возникающие неравенства, получим, действительно, неравенство (2). Совершенно аналогично проводится доказательство и для случая $0 < \lambda < 1$.

53. Положим:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=p; \qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=p'.$$

Имеем:

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2=nx^2-2px+p'=n\left[x^2-\frac{2p}{n}x+\frac{p'}{n}\right]=$$
$$=n\left[\left(x-\frac{p}{n}\right)^2+\frac{p'}{n}-\frac{p^2}{n^2}\right].$$

Наименьшее значение наше выражение может принять лишь тогда, когда принимает наименьшее значение $\left(x-\frac{p}{n}\right)^2$ (так как величина $\frac{p'}{n}-\frac{p^2}{n^2}$ от x не зависит). Но величина $\left(x-\frac{p}{n}\right)^2$ не может быть отрицательной, поэтому ее наименьшее значение будет равно нулю. Отсюда следует:

$$x=\frac{p}{n}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

Итак, сумма

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2$$

принимает наименьшее значение при

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

54. Положим:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=S_2.$$

Тогда:

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2=(n-1)S_2-2q,$$

где

$$q=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n.$$

Далее:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=S_2+2q.$$

Итак:

$$(n-1)S_2=2q+\sum_{j>i}(x_i-x_j)^2,$$
$$C^2=S_2+2q.$$

Отсюда находим:

$$nS_2=C^2+\sum_{j>i}(x_i-x_j)^2.$$

Последнее равенство показывает, что S_2 примет наименьшее значение тогда, когда принимает наименьшее значение $\sum\limits_{j>i}(x_i-x_j)^2$. Наименьшее значение этой суммы равно нулю и достигается при

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Но так как

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=C,$$

то

$$x_1^2+\ldots+x_n^2$$

принимает наименьшее значение при

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{C}{n}.$$

55. Допустим сначала, что λ не лежит в промежутке от 0 до 1. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\frac{x_1^\lambda+x_2^\lambda+\ldots+x_n^\lambda}{n}\geqq\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^\lambda,$$

причем знак равенства (как это легко установить) будет иметь место лишь при условии:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Если дано, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=C,$$

то при всех значениях x_1, x_2, ..., x_n, связанных этой зависимостью, будем иметь:

$$x_1^\lambda+x_2^\lambda+\ldots+x_n^\lambda\geqq n\left(\frac{C}{n}\right)^\lambda.$$

Отсюда видно, что наименьшее значение выражения

$$x_1^\lambda+x_2^\lambda+\ldots+x_n^\lambda$$

будет $n\left(\frac{C}{n}\right)$ и достигается оно при $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{C}{n}$. Если же $0<\lambda<1$, то имеет место неравенство:

$$\frac{x_1^\lambda+x_2^\lambda+\ldots+x_n^\lambda}{n}\leqq\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^\lambda.$$

Тогда при

$$x_1=x_2=\ldots=x_n$$

мы имеем наименьшее значение величины

$$x_1^\lambda+x_2^\lambda+\ldots+x_n^\lambda.$$

56. Имеем неравенство (см. задачу 30):

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{C}{n}.$$

Отсюда

$$x_1x_2\ldots x_n\leqq\left(\frac{C}{n}\right)^n.$$

Таким образом, произведение $x_1x_2\ldots x_n$ не превосходит величины $\left(\frac{C}{n}\right)^n$ и достигает ее только при $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{C}{n}$ (см. задачу 30). Итак, дей-

ствительно наибольшее значение произведение $x_1x_2\ldots x_n$ примет тогда, когда

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{C}{n}.$$

57. Имеем:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Следовательно:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\geqq n\sqrt[n]{C}.$$

При этом знак равенства возможен лишь при условии $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Отсюда ясно, что наименьшее значение сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ принимает при условии:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt[n]{C}.$$

58. Допустим сначала, что μ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ целые. Имеем:

$$\sqrt[\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_n]{\left(\frac{x_1}{\mu_1}\right)^{\mu_1}\left(\frac{x_2}{\mu_2}\right)^{\mu_2}\ldots\left(\frac{x_n}{\mu_n}\right)^{\mu_n}}=$$

$$=\sqrt[\mu_1+\ldots+\mu_n]{\frac{x_1}{\mu_1}\cdot\frac{x_1}{\mu_1}\ldots\frac{x_1}{\mu_1}\cdot\frac{x_2}{\mu_2}\ldots\frac{x_2}{\mu_2}\ldots\frac{x_n}{\mu_n}\ldots\frac{x_n}{\mu_n}}\leqq$$

$$\leqq\frac{\mu_1\dfrac{x_1}{\mu_1}+\mu_2\dfrac{x_2}{\mu_2}+\ldots+\mu_n\dfrac{x_n}{\mu_n}}{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n}=\frac{C}{\mu_1+\ldots+\mu_n}.$$

Следовательно:

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}\leqq\left(\frac{C}{\mu_1+\ldots+\mu_n}\right)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n}\cdot\mu_1^{\mu_1}\mu_2^{\mu_2}\ldots\mu_n^{\mu_n};$$

причем знак равенства достигается лишь при условии:

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\ldots=\frac{x_n}{\mu_n}.$$

Пусть теперь μ_i могут быть и дробные. Приведя дроби к одному знаменателю, положим:

$$\mu_i=\frac{\lambda_i}{\mu},$$

где λ_i и μ — целые положительные.

Так как

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}=\sqrt[\mu]{x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}},$$

то наибольшего значения произведение $x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}$ достигает одновременно с произведением $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}$, где λ_i — целые. На основании прежде доказанного это будет тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{\lambda_1}=\frac{x_2}{\lambda_2}=\ldots=\frac{x_n}{\lambda_n}.$$

Деля знаменатели на μ, получим:

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\ldots=\frac{x_n}{\mu_n}.$$

Итак, если $x_i > 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$, то произведение $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots$ $\ldots x_n^{\mu_n}$ ($\mu_i > 0$, рациональные) достигает наибольшего значения тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{\mu_1} = \frac{x_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{x_n}{\mu_n}.$$

59. Имеем:

$$\sqrt[n]{a_1x_1 \cdot a_2x_2 \ldots a_nx_n} \leqq \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{n} = \frac{C}{n}.$$

Отсюда следует, что произведение:

$$a_1x_1 \cdot a_2x_2 \ldots a_nx_n$$

достигает наибольшего значения лишь при условии:

$$a_1x_1 = a_2x_2 = \ldots = a_nx_n.$$

Но так как

$$a_1x_1 \cdot a_2x_2 \ldots a_nx_n = (a_1a_2 \ldots a_n)(x_1x_2 \ldots x_n),$$

то, действительно, произведение $x_1x_2 \ldots x_n$ достигает наибольшего значения тогда и только тогда, когда

$$a_1x_1 = a_2x_2 = \ldots = a_nx_n = \frac{C}{n}.$$

60. Положим:

$$a_ix_i^{\lambda} = y_i \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда:

$$x_i = \left(\frac{y_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{\lambda_i}}$$

и

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = C.$$

Далее:

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} = \left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} \left(\frac{y_2}{a_2}\right)^{\frac{\mu_2}{\lambda_2}} \ldots \left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}.$$

Задача сводится к тому, чтобы выяснить, когда произведение

$$y_1^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} \cdot y_2^{\frac{\mu_2}{\lambda_2}} \ldots y_n^{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

достигает наибольшего значения, если $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = C$. На основании результата задачи 58, это будет иметь место при условии:

$$\frac{y_1}{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} = \frac{y_2}{\frac{\mu_2}{\lambda_2}} = \ldots = \frac{x_n}{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}.$$

Итак, если

$$a_1x_1^{\lambda_1} + a_2x_2^{\lambda_2} + \ldots + a_nx_n^{\lambda_n} = C,$$

то наибольшего значения произведение:

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$$

достигнет при условии:

$$\frac{\lambda_1 a_1 x_1^{\lambda_1}}{\mu_1}=\frac{\lambda_2 a_2 x_2^{\lambda_2}}{\mu_2}=\ldots=\frac{\lambda_n a_n x_n^{\lambda_n}}{\mu_n}.$$

61. Положим:

$$a_1 x_1^{\mu_1}=y_1;\quad a_2 x_2^{\mu_2}=y_2;\quad \ldots;\quad a_n x_n^{\mu_n}=y_n.$$

Отсюда

$$x_1=\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}},\quad x_2=\left(\frac{y_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{\mu_2}},\quad \ldots,\quad x_n=\left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\mu_n}},$$

и задача переходит в следующую: при каком условии

$$y_1+y_2+\ldots+y_n$$

принимает наименьшее значение, если

$$y_1^{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}\cdot y_2^{\frac{\lambda_2}{\mu_2}}\ldots y_n^{\frac{\lambda_n}{\mu_n}}=C_1,$$

где C_1 — новая постоянная.

Так как $\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\mu_n}$ рациональны, то положим:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{\alpha_1}{N};\quad \frac{\lambda_2}{\mu_2}=\frac{\alpha_2}{N},\quad \ldots,\quad \frac{\lambda_n}{\mu_n}=\frac{\alpha_n}{N}.$$

Тогда получим такую формулировку задачи: узнать, когда $y_1+y_2+\ldots+y_n$ принимает наименьшее значение, если

$$y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\ldots y_n^{\alpha_n}=C_2\qquad (\alpha_i \text{ — целые положительные}).$$

Наконец, примем

$$y_1=\alpha_1 u_1;\quad y_2=\alpha_2 u_2;\quad \ldots;\quad y_n=\alpha_n u_n$$

и приходим к задаче: при каких условиях сумма

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n$$

принимает наименьшее значение, если

$$u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_n^{\alpha_n}=C_3.$$

Но

$$\frac{\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\geqq \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n]{u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_n^{\alpha_n}}=\sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n]{C_3}.$$

Следовательно, $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n$ принимает наименьшее значение тогда, когда

$$u_1=u_2=\ldots=u_n.$$

Итак, если

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}=C,$$

то

$$a_1 x_1^{\mu_1}+a_2 x_2^{\mu_2}+\ldots+a_n x_n^{\mu_n}$$

принимает наименьшее значение при условии:

$$\frac{x_1^{\mu_1}}{\frac{\lambda_1}{a_1\mu_1}}=\frac{x_2^{\mu_2}}{\frac{\lambda_2}{a_2\mu_2}}=\ldots=\frac{x_n^{\mu_n}}{\frac{\lambda_n}{a_n\mu_n}}.$$

62. Применяя формулу Лагранжа (см. задачу 5, § 1), имеем:

$$(x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2)(a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2)=$$
$$=(ax+by+\ldots+kt)^2+(xb-ya)^2+(xc-za)^2+\ldots$$

Так как

$$a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2$$

постоянно и

$$ax+by+\ldots+kt=A$$

(по условию) и, следовательно, также постоянно, то сумма:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2$$

принимает наименьшее значение тогда, когда наименьшее значение принимает сумма:

$$(xb-ya)^2+(xc-za)^2+\ldots$$

Но эта сумма наименьшим значением имеет 0 и достигает его при условии:

$$xb-ya=0; \quad xc-za=0\ldots,$$

т. е. тогда, когда

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots=\frac{t}{k}.$$

Положим это общее отношение равным λ, так что:

$$x=a\lambda,$$
$$y=b\lambda,$$
$$z=c\lambda,$$
$$\ldots\ldots$$
$$t=k\lambda.$$

Подставляя эти значения для $x, y, z, \ldots, t$ в равенство

$$ax+by+\ldots+kt=A,$$

найдем:

$$\lambda=\frac{A}{a^2+b^2+\ldots+k^2},$$

и, следовательно, искомые значения $x, y, \ldots, t$, при которых выражение $x^2+y^2+\ldots+t^2$ принимает наименьшее значение, будут:

$$x=\frac{aA}{a^2+b^2+\ldots+k^2};$$

$$y=\frac{bA}{a^2+b^2+\ldots+k^2}; \quad \ldots; \quad t=\frac{kA}{a^2+b^2+\ldots+k^2}.$$

63. Имеем:

$$u=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F,$$

где

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2; \qquad B=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n;$$
$$C=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2; \qquad D=a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n;$$
$$E=b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n; \qquad F=c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2.$$

Положим:

$$x=x'+\alpha; \quad y=y'+\beta.$$

Тогда получаем:

$$u=A(x'+\alpha)^2+2B(x'+\alpha)(y'+\beta)+C(y'+\beta)^2+2D(x'+\alpha)+E(y'+\beta)+F.$$

Развернем это выражение по степеням x' и y'. Получаем:

$$u=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(A\alpha+B\beta+D)x'+2(B\alpha+C\beta+E)y'+F_1.$$

Выберем теперь α и β так, чтобы коэффициенты при x' и y' в последнем разложении равнялись нулю. Для этого нужно только подобрать α и β как решения следующей системы:

$$A\alpha+B\beta+D=0,$$
$$B\alpha+C\beta+E=0.$$

Тогда будем иметь:

$$u=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F'.$$

Далее:

$$u=\frac{1}{A}\left\{A^2x'^2+2BAx'y'+ACy'^2\right\}+F'=\frac{1}{A}\left\{(Ax'+By')^2+(AC-B^2)y'^2\right\}+F'.$$

Но

$$AC-B^2=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\geqq 0,\quad A>0.$$

Поэтому u принимает наименьшее значение тогда, когда

$$Ax'+By'=0 \text{ и } y'=0.$$

Отсюда

$$x'=y'=0 \quad \text{и} \quad x=\alpha,\ y=\beta.$$

Итак, значения x и y, при которых u принимает наименьшее значение, получаются как решения следующей системы уравнений:

$$Ax+By+D=0,$$
$$Bx+Cy+E=0.$$

Впрочем, этот результат может быть получен и несколько иным способом. Положим:

$$a_1x+b_1y+c_1=X_1;\ a_2x+b_2y+c_2=X_2;\ \ldots;\ a_nx+b_ny+c_n=X_n.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — какие-либо постоянные, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\ldots+a_n\lambda_n&=0,\\ b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\ldots+b_n\lambda_n&=0,\\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\ldots+c_n\lambda_n&=k, \end{aligned} \qquad (*)$$

где k — произвольное число.

Тогда имеем:

$$\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\ldots+\lambda_nX_n=k$$

и, следовательно, нужно найти наименьшее значение выражения

$$X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2,$$

при условии, что

$$\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\ldots+\lambda_nX_n=k \text{ (постоянно).}$$

На основании результата задачи 62 имеем, что наименьшее значение получается при условии:

$$\frac{X_1}{\lambda_1}=\frac{X_2}{\lambda_2}=\ldots=\frac{X_n}{\lambda_n}.$$

Иначе:

$$\lambda_1 = X_1\mu; \quad \lambda_2 = X_2\mu; \quad \ldots; \quad \lambda_n = X_n\mu.$$

Подставляя эти значения для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в первые два из уравнений (*), найдем:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = 0,$$
$$b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n = 0.$$

Отсюда приходим к системе, полученной нами в предыдущем способе решения.

64. Известно, что имеет место следующее тождество (см. задачу 77, § 6):

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \\ + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots \\ \ldots + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})},$$

где $f(x)$ есть любой многочлен степени n.

Приравнивая коэффициенты при x_n в обеих частях этого равенства, находим:

$$1 = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \\ + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Обозначим через M наибольшую из величин:

$$|f(x_0)|, \quad |f(x_1)|, \quad \ldots, \quad |f(x_n)|.$$

Тогда:

$$1 \leqq M\left\{\frac{1}{|(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)|} + \frac{1}{|(x_1-x_0)\ldots(x_1-x_n)|} + \ldots \right. \\ \left. \ldots + \frac{1}{|(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})|}\right\}.$$

Легко видеть, что, в силу наших условий, имеем:

$$|(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)| \geqq k!\,(n-k)!.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_n)|} \leqq \frac{1}{k!\,(n-k)!}.$$

Следовательно:

$$1 \leqq M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!} = \frac{M}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k = M\frac{2^n}{n!}.$$

Наконец,

$$M \geqq \frac{n!}{2^n}.$$

65. Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, т. е. сумма двух величин $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ постоянна, то произведение этих величин $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ достигает наибольшего значения, когда эти величины равны между собою. Это будет при $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Впрочем, это же легко усмотреть из тождества:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

66. Известно, что если

$$x + y + z = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 1$$

(см. задачу 40,4°, § 2). Итак, сумма трех величин:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$$

постоянна. Поэтому произведение этих величин, т. е.

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \operatorname{tg}^2 z,$$

достигает наибольшего значения при условии:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z,$$

т. е. при условии:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$$

и, следовательно, при

$$x = y = z = \frac{\pi}{6}.$$

67. Имеем:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n}\right) + \ldots + \frac{1}{2n+1} = \frac{4n+2}{(n+1)(3n+1)} + \frac{4n+2}{(n+2)\,3n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{4n+2}{2(2n+1)^2} > (4n+2)\left\{\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{1}{2(2n+1)^2}\right\} = 1.$$

68. Положим:

$$a = \alpha^2.$$

Нужно доказать:

$$\alpha^{2n} - 1 \geqq n(\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1}).$$

Иначе:

$$\alpha^{2n} - 1 \geqq n\alpha^{n-1}(\alpha^2 - 1) \quad \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} \geqq n\alpha^{n-1}.$$

Но

$$\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \alpha^{2(n-1)} + \alpha^{2(n-2)} + \ldots + \alpha^2 + 1 \geqq n\sqrt[n]{\alpha^2 \cdot \alpha^4 \ldots \alpha^{2n-2}}$$

(пользуясь теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом нескольких чисел).

Так как

$$2 + 4 + \ldots + (2n-2) = n(n-1),$$

то, действительно:

$$\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} \geqq n\alpha^{n-1}.$$

69. Перепишем нашу сумму следующим образом:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-2}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}.$$

Каждая из скобок больше половины и, следовательно, вся сумма больше $\frac{n}{2}$. С другой стороны, сумма может быть переписана так:

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\right).$$

Но каждая из скобок меньше единицы, следовательно, вся сумма меньше n.

70. После преобразования приходим к неравенству:

$$(a+c)(a+b)(b+d)(c+d)-(a+b+c+d)(c+d)ab-$$
$$-(a+b+c+d)cd(a+b)\geqq 0,$$

или к следующему:

$$(ad-bc)^2\geqq 0.$$

§ 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

1. Полагая в основной формуле $n=1$, найдем:

$$v_2=3v_1-2v_0=3\cdot 3-2\cdot 2=5=2^2+1.$$

Предположим, что

$$v_k=2^k+1 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и докажем, что

$$v_{n+1}=2^{n+1}+1.$$

Действительно:

$$v_{n+1}=3v_n-2v_{n-1}=3(2^n+1)-2(2^{n-1}+1)=$$
$$=3\cdot 2^n+3-2^n-2=2^n(3-1)+1=2^{n+1}+1.$$

2. Аналогично предыдущей задаче.

3. Легко видеть, что искомое соотношение, действительно, справедливо при $n=1$.

Предполагая его справедливость при показателе, равном n, докажем справедливость и при показателе, равном $n+1$. В самом деле:

$$\frac{a_{n+1}-\sqrt{A}}{a_{n+1}+\sqrt{A}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right)-\sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right)+\sqrt{A}}=\frac{a_n^2-2\sqrt{A}a_n+A}{a_n^2+2\sqrt{A}a_n+A}=\left(\frac{a_n-\sqrt{A}}{a_n+\sqrt{A}}\right)^2.$$

Но, по предположению:

$$\frac{a_n-\sqrt{A}}{a_n+\sqrt{A}}=\left(\frac{a_1-\sqrt{A}}{a_1+\sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$\frac{a_{n+1}-\sqrt{A}}{a_{n+1}+\sqrt{A}}=\left(\frac{a_n-\sqrt{A}}{a_n+\sqrt{A}}\right)^2=\left(\frac{a_1-\sqrt{A}}{a_1+\sqrt{A}}\right)^{2\cdot 2^{n-1}}=\left(\frac{a_1-\sqrt{A}}{a_1+\sqrt{A}}\right)^{2^n}.$$

4. Имеем:

$$a_2=\frac{a_0+a_1}{2};\quad a_3=\frac{a_1+a_2}{2};\quad a_4=\frac{a_2+a_3}{2};\quad a_5=\frac{a_3+a_4}{2};\quad \ldots$$

Отсюда

$$a_2-a_1=\frac{a_0-a_1}{2};\quad a_3-a_2=\frac{a_1-a_2}{2};\quad a_4-a_3=\frac{a_2-a_3}{2};\quad \ldots$$

Следовательно:

$$a_2-a_1=-\frac{a_1-a_0}{2},$$

$$a_3-a_2=\frac{a_1-a_2}{2}=\frac{a_1-a_0}{2^2},$$

$$a_4-a_3=-\frac{a_1-a_0}{2^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Легко видеть, что имеет место следующая общая формула:

$$a_n-a_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{a_1-a_0}{2^{n-1}}.$$

Складывая почленно все последние найденные формулы, имеем:

$$a_n-a_1=-\frac{a_1-a_0}{2}+\frac{a_1-a_0}{2^2}-\frac{a_1-a_0}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a_1-a_0}{2^{n-1}}=$$

$$=-\frac{a_1-a_0}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right)=$$

$$=\frac{a_1-a_0}{3}\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}-1\right\}.$$

Отсюда окончательно:

$$a_n=\frac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{n-1}\frac{(a_1-a_0)}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

5. Рассмотрим соотношение:

$$a_k=3a_{k-1}+1.$$

Будем давать здесь k значения 2, 3, 4, ..., n. Получаем:

$$\sum_{k=2}^{n}a_k=3\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}+n-1.$$

Положим

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=S.$$

Тогда имеем:

$$S-a_1=3\,(S-a_n)+n-1.$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\left\{3a_n-a_1-n+1\right\}.$$

Остается выразить a_n через a_1. Имеем:

$$a_n = 3a_{n-1} + 1,$$
$$a_{n-1} = 3a_{n-2} + 1.$$

Отсюда

$$a_n - a_{n-1} = 3(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

Поэтому

$$a_n - a_{n-1} = 3(a_{n-1} - a_{n-2}) = 3^2(a_{n-2} - a_{n-3}) =$$
$$= 3^3(a_{n-3} - a_{n-4}) = \ldots = 3^{n-2}(a_2 - a_1).$$

Но

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 7.$$

Итак:

$$a_n - a_{n-1} = 5 \cdot 3^{n-2}.$$

Полагая здесь n равным 2, 3, 4, ..., n, имеем:

$$a_2 - a_1 = 5 \cdot 1,$$
$$a_3 - a_2 = 5 \cdot 3,$$
$$a_4 - a_2 = 5 \cdot 3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = 5 \cdot 3^{n-2}.$$

Складывая почленно эти равенства, найдем:

$$a_n - a_1 = 5(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2}) = \frac{5}{2}(3^{n-1} - 1).$$

Перепишем выражение для S следующим образом:

$$S = \frac{1}{2}\{3(a_n - a_1) + 2a_1 - n + 1\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{15}{2}(3^{n-1} - 1) + 4 - n + 1\right\} = \frac{1}{4}\{5(3^n - 1) - 2n\}.$$

6. Имеем:

$$a_n = ka_{n-1} + l,$$
$$a_{n-1} = ka_{n-2} + l.$$

Следовательно:

$$a_n - a_{n-1} = k(a_{n-1} - a_{n-2}) = k^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \ldots = k^{n-2}(a_2 - a_1).$$

Отсюда

$$a_2 - a_1 = (a_2 - a_1),$$
$$a_3 - a_2 = k(a_2 - a_1),$$
$$a_4 - a_3 = k^2(a_2 - a_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = k^{n-2}(a_2 - a_1).$$

Складывая эти равенства, найдем:

$$a_n = k^{n-1}a_1 + \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1}\, l.$$

7. Перепишем данное соотношение следующим образом:

$$a_{n+1} - a_n - (a_n - a_{n-1}) = 1.$$

Положим:

$$a_n - a_{n-1} = x_n \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Тогда имеем:

$$x_{n+1} - x_n = 1.$$

Полагая в этом равенстве n равным последовательно $2, 3, \ldots, n-1$ и складывая, найдем:

$$x_n - x_2 = n - 2.$$

Полагая же в равенстве

$$a_n - a_{n-1} = x_n$$

$n = 3, 4, \ldots, n$ и складывая, получаем:

$$a_n - a_2 = x_3 + x_4 + \ldots + x_n.$$

Итак:

$$a_n = a_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n.$$

Но

$$\sum_{k=3}^{n} x_k = \sum_{k=3}^{n} (x_2 + k - 2) = (n-2)\,x_2 + (n-2) + (n-3) + \ldots$$

$$\ldots + 1 = (n-2)\,x_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Отсюда

$$a_n = a_2 + (n-2)\,x_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = a_2 + (n-2)(a_2 - a_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)\,a_2 - (n-2)\,a_1.$$

8. Положим:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = x_n.$$

Тогда будет иметь место следующее соотношение:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 1.$$

На основании результата предыдущей задачи имеем:

$$x_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)\,x_2 - (n-2)\,x_1.$$

Но легко видеть, что

$$a_n - a_2 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} x_k.$$

Следовательно:

$$a_n - a_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}(k-1)(k-2) + x_2\sum_{k=1}^{n-2}(k-1) - x_1\sum_{k=1}^{n-2}(k-2).$$

Наконец,

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,a_3 - (n-3)(n-1)\,a_2 +$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3)}{2}\,a_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

9. Можно вывести искомые формулы, пользуясь методом математической индукции. Легко видеть, что эти формулы имеют место при $n=1$. Так как

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},$$

то, предполагая формулы справедливыми при индексе, равном $n-1$, докажем справедливость их при индексе, равном n. По предположению, имеем:

$$a_{n-1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right),$$

$$b_{n-1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right).$$

Тогда:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

и, следовательно, формула для a_n имеет место при любом целом положительном n. Остается только доказать, что формула для b_n точно так же справедлива при любом целом положительном n.

Имеем:

$$b_n=\frac{a_n+b_{n-1}}{2}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)$$

и доказательство закончено.

Однако решение этой задачи можно построить и совершенно иначе. Легко видеть, что

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; \quad b_n=\frac{a_{n-1}+3b_{n-1}}{4}.$$

Умножим правые и левые части этих равенств на некоторый множитель λ. Получаем:

$$a_n+\lambda b_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)a_{n-1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\lambda\right)b_{n-1}.$$

Подберем λ так, чтобы

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\lambda=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)\lambda.$$

Искомых значений λ будет два и они будут корнями уравнения

$$\lambda^2-\lambda-2=0,$$

т. е. будут равны $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-1$.

Итак, при этих значениях λ имеет место равенство

$$a_n+\lambda b_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)(a_{n-1}+\lambda b_{n-1}),$$

справедливое при всех целых положительных значениях n. Полагая здесь n последовательно равным 1, 2, 3, ..., n, получим:

$$a_1+\lambda b_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)(a+\lambda b),$$

$$a_2+\lambda b_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)(a_1+\lambda b_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n+\lambda b_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)(a_{n-1}+\lambda b_{n-1}).$$

Перемножая эти равенства почленно, найдем:

$$a_n+\lambda b_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda\right)^n(a+\lambda b),$$

при любом целом положительном n и при $\lambda=2$ и -1. Подставляя эти последние значения λ, найдем:

$$a_n+2b_n=a+2b,$$
$$a_n-b_n=\frac{1}{4^n}(a-b).$$

Отсюда имеем, действительно:

$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right),\quad b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

10. Имеем:

$$x_n=x_{n-1}+2\sin^2\alpha y_{n-1},$$
$$y_n=2\cos^2\alpha x_{n-1}+y_{n-1}.$$

Умножая второе из равенств на λ и складывая с первым, получаем:

$$x_n+\lambda y_n=(1+2\lambda\cos^2\alpha)x_{n-1}+(2\sin^2\alpha+\lambda)y_{n-1}.$$

Подберем λ так, чтобы имело место равенство:

$$(2\sin^2\alpha+\lambda)=\lambda(1+2\lambda\cos^2\alpha).$$

Отсюда

$$\lambda=\pm\operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда получаем:

$$(x_n+\lambda y_n)=(1+2\lambda\cos^2\alpha)(x_{n-1}+\lambda y_{n-1}),$$

или

$$(x_n+\lambda y_n)=(1+2\lambda\cos^2\alpha)^n(x_0+\lambda y_0).$$

Подставляя сюда вместо x_0 и y_0 их значения, а равным образом, полагая последовательно $\lambda=\operatorname{tg}\alpha$ и $\lambda=-\operatorname{tg}\alpha$, найдем два следующих равенства:

$$x_n+y_n\cdot\operatorname{tg}\alpha=(1+\sin 2\alpha)^n\sin\alpha,$$
$$x_n-y_n\cdot\operatorname{tg}\alpha=-(1-\sin 2\alpha)^n\sin\alpha.$$

Отсюда

$$x_n=\frac{1}{2}\sin\alpha\left\{(1+\sin 2\alpha)^n-(1-\sin 2\alpha)^n\right\},$$

$$y_n=\frac{1}{2}\cos\alpha\left\{(1+\sin 2\alpha)^n+(1-\sin 2\alpha)^n\right\}.$$

11. Совершенно так же, как в двух предыдущих задачах, получим:

$$x_n+\lambda_1 y_n=\mu_1^n(x_0+\lambda_1 y_0),$$
$$x_n+\lambda_2 y_n=\mu_2^n(x_0+\lambda_2 y_0),$$

где $\mu_1=\alpha+\lambda_1\gamma$; $\mu_2=\alpha+\lambda_2\gamma$, λ_1 и λ_2—корня квадратного уравнения:

$$(\beta+\lambda\delta)=\lambda(\alpha+\lambda\gamma).$$

Если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то мы имеем два уравнения для определения двух неизвестных x_n и y_n, и задача решена.

Допустим теперь, что $\lambda_1=\lambda_2$. Тогда $\mu_1=\mu_2$, и два уравнения совпадают. Для определения x_n и y_n можно поступить следующим образом.

Имеем:

$$x_n=-\lambda_1 y_n+\mu_1^n(x_0+\lambda_1 y_0). \tag{*}$$

Подставляя значение x_n во второе из исходных равенств, найдем:

$$y_n = \gamma[-\lambda_1 y_{n-1} + \mu_1^{n-1}(x_0 + \lambda_1 y_0)] + \delta y_{n-1}.$$

Отсюда

$$y_n + (\gamma\lambda_1 - \delta)\, y_{n-1} = \gamma\mu_1^{n-1}(x_0 + \lambda_1 y_0).$$

Положим $y_n = \mu_1^n z_n$. Тогда для z_n получаем следующую зависимость:

$$\mu_1 z_n + (\gamma\lambda_1 - \delta)\, z_{n-1} = \gamma(x_0 + \lambda_1 y_0),$$

или

$$z_n = \frac{\delta - \gamma\lambda_1}{\mu_1} z_{n-1} + \frac{\gamma}{\mu_1}(x_0 + \lambda_1 y_0).$$

Отсюда находим z_n (см. задачу 6), а затем и y_n. Далее, x_n находится по формуле (*).

12. Перепишем данную зависимость следующим образом:

$$x_n - \alpha x_{n-1} - \beta x_{n-2} = 0.$$

Положим:

$$\alpha = a + b; \quad \beta = -ab$$

(т. е. a и b являются корнями квадратного уравнения: $s^2 - \alpha s - \beta = 0$). Тогда имеем:

$$x_n - ax_{n-1} - bx_{n-1} - abx_{n-2} = 0,$$
$$x_n - ax_{n-1} - b(x_{n-1} - ax_{n-2}) = 0.$$

Положим:

$$x_n - ax_{n-1} = y_n.$$

Данная зависимость примет вид:

$$y_n - by_{n-1} = 0.$$

Отсюда

$$y_n = by_{n-1},$$
$$y_{n-1} = by_{n-2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_2 = by_1.$$

Следовательно:

$$y_n = b^{n-1} y_1.$$

Для нахождения x_n имеем теперь:

$$x_n - ax_{n-1} = b^{n-1} y_1.$$

Положим: $x_n = b^n z_n$. Тогда:

$$bz_n - az_{n-1} = y_1,$$

или

$$z_n = \frac{a}{b} z_{n-1} + \frac{y_1}{b}.$$

Пользуясь результатом задачи 6, найдем:

$$z_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} - 1}{\frac{a}{b} - 1} \frac{y_1}{b}.$$

После же простейших преобразований окончательно получаем:

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} x_1 - ab\, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} x_0.$$

Впрочем, эту задачу можно решить и по методу предыдущей, если ввести в рассмотрение две последовательности x_n и y_n, определяемые соотношениями:

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1},$$
$$y_n = 1 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot y_{n-1}.$$

13. Решается совершенно так же, как предыдущая задача. В этом случае

$$a = 1; \; b = -\frac{q}{p+q}.$$

14. Рассматривая две переменные y_n и z_n, определяемые зависимостью

$$y_n = \alpha y_{n-1} + \beta z_{n-1},$$
$$z_n = \gamma y_{n-1} + \delta z_{n-1},$$

положим:

$$\frac{y_n}{z_n} = x_n.$$

Тогда переменная x_n будет удовлетворять заданной зависимости:

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1} + \beta}{\gamma x_{n-1} + \delta},$$

и решение нашей задачи сведется к решению задачи 11.

Например, в данном частном случае:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-1} + 3}$$

имеем:

$$y_n = y_{n-1} + z_{n-1},$$
$$z_n = y_{n-1} + 3z_{n-1}$$

и т. д.

Второй частный случай:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2x_{n-1} + 1}$$

проще всего разобрать следующим образом.

Запишем это соотношение так:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2x_{n-1} + 1}{x_{n-1}} = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = 2.$$

Полагая здесь $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ и складывая, получаем:

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0} = 2n,$$

$$x_n = \frac{x_0}{2nx_0 + 1}.$$

15. Легко видеть, что

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n,$$

и, следовательно:

$$a_n b_n = a_0 b_0$$

при любом целом n.

Но

$$\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}=\frac{a_n-\sqrt{a_nb_n}}{a_n+\sqrt{a_nb_n}}=\frac{a_n-\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{a_n+\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}=$$

$$=\frac{\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}-\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}+\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}=\left(\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{b_{n-1}}}\right)^2.$$

Положим $\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}=u_n$. Тогда имеем:

$$u_{n-1}=u_{n-2}^2,$$
$$u_{n-2}=u_{n-3}^2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_2=u_1^2,$$
$$u_1=u_0^2.$$

Возводя последовательно эти равенства в степени $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-2}$, найдем:

$$u_{n-1}=u_0^{2^{n-1}}.$$

Но

$$u_{n-1}=\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{b_{n-1}}}=\frac{a_{n-1}-\sqrt{a_0b_0}}{a_{n-1}+\sqrt{a_0b_0}},$$

$$u_0=\frac{\sqrt{a_0}-\sqrt{b_0}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{b_0}}=\frac{a_0-\sqrt{a_0b_0}}{a_0+\sqrt{a_0b_0}}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{a_{n-1}-\sqrt{a_0b_0}}{a_{n-1}+\sqrt{a_0b_0}}=\left(\frac{a_0-\sqrt{a_0b_0}}{a_0+\sqrt{a_0b_0}}\right)^{2^{n-1}}.$$

16. Имеем:

$$\frac{1}{(2k)^3-2k}=\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{4k}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2k-(2k-1)}{2k(2k-1)}-\frac{(2k+1)-2k}{2k(2k+1)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}\right\}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^3-2k}=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n+1}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-1+\frac{1}{2n+1}-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\right\}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{n}{2n+1}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^3-2k}+\frac{n}{2n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

(см. задачу 33, § 1).

17. Обозначим наше выражение через $\varphi_n(x)$. Имеем:

$$\varphi_1(x)=(1-x)+x=1,$$

$$\varphi_2(x)=(1-x)(1-x^2)+x(1-x^2)+x^2=1.$$

Отсюда можно предположить, что $\varphi_n(x)=1$ при любом n. Легко видеть, что имеет место следующее соотношение:

$$\varphi_{n+1}(x)=(1-x^{n+1})\,\varphi_n(x)+x^{n+1}.$$

Предполагая, что $\varphi_n(x)=1$, из последнего соотношения получаем:

$$\varphi_{n+1}(x)=1.$$

Но так как $\varphi_1(x)=1$, то $\varphi_n(x)=1$ при любом (целом, положительном) n.

18. Положим:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\varphi_n(x).$$

Тогда:

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)+\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Теперь легко доказать предлагаемую формулу методом индукции.

19. Положим:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}})=X.$$

Умножая обе части на $1-x$, найдем:

$$X(1-x)=[(1-x)(1+x)](1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}})=$$

$$=[(1-x^2)(1+x^2)](1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}})=$$

$$=[(1-x^4)(1+x^4)](1+x^8)\ldots(1+x^{2^{n-1}})=\ldots=1-x^{2^n}.$$

Отсюда

$$X=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=1+x+x^2+x^2+\ldots+x^{2^n-1}.$$

20. Имеем:

$$1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a},$$

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}=\frac{a+1}{a}+\frac{a+1}{ab}=\frac{(a+1)(b+1)}{ab}.$$

Допустим:

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\ldots+\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)}{abc\ldots sk}=\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(k+1)}{abc\ldots sk}.$$

Прибавляя к обеим частям по $\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(k+1)}{abc\ldots skl}$, получим:

$$\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(k+1)}{abc\ldots sk}+\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(k+1)}{abc\ldots skl}=$$

$$=\frac{(a+1)(b+1)\ldots(k+1)(l+1)}{abc\ldots skl},$$

и формула доказана методом индукции.

21. Имеем:

$$\frac{b}{a(a+b)}=\frac{(a+b)-a}{a(a+b)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b},$$

$$\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)-(a+b)}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}=\frac{1}{a+b+\ldots+k}-\frac{1}{a+b+\ldots+k+l}.$$

Складывая эти равенства почленно, найдем:

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\ldots+\frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}=$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+\ldots+k+l}=\frac{b+c+\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots+k+l)}$$

и тождество доказано.

22. Имеем:

$$F_1(z)=\frac{q}{1-q}(1-z),$$

$$F_1(qz)=\frac{q}{1-q}(1-qz).$$

Отсюда

$$1+F_1(z)-F_1(qz)=1+\frac{q}{1-q}(1-z)-\frac{q}{1-q}(1-qz)=1-qz,$$

т. е. тождество справедливо при $n=1$.

Но

$$F_n(z)=F_{n-1}(z)+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\ldots(1-q^{n-1}z),$$

$$F_n(qz)=F_{n-1}(qz)+\frac{q^n}{1-q^n}(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^nz).$$

Допустим, что тождество справедливо при индексе, равном $n-1$, т. е. допустим, что имеет место равенство:

$$1+F_{n-1}(z)-F_{n-1}(qz)=(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^{n-1}z).$$

Тогда имеем:

$$1+F_n(z)-F_n(qz)=(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{n-1}z)+$$
$$+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\dots(1-q^{n-1}z)-$$
$$-\frac{q^n}{1-q^n}(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^nz)=$$
$$=(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{n-1}z)\left\{1+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)-\right.$$
$$\left.-\frac{q^n}{1-q^n}(1-q^nz)\right\}=(1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^{n-1}z)(1-q^nz),$$

что и доказывает тождество при любом n.

23. Положим, как и в предыдущей задаче:

$$F_n(z)=\frac{q}{1-q}(1-z)+\frac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+\dots$$
$$\dots+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\dots(1-q^{n-1}z).$$

Отсюда

$$F_n(q^{-n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{1-q^k}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)\left(1-\frac{q}{q^n}\right)\dots\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^n}\right).$$

Докажем, что

$$F_n(q^{-n})=-n.$$

Имеем (см. тождество предыдущей задачи):

$$1+F_n(q^{-1})-F_n(1)=0.$$

Но

$$F_n(1)=0.$$

Следовательно:

$$F_n(q^{-1})=-1.$$

Допустим:

$$F_n(q^{-n+1})=-(n-1).$$

Имеем:

$$1+F_n(q^{-n})-F_n(q^{-n+1})=0.$$

Отсюда

$$F_n(q^{-n})=F_n(q^{-n+1})-1=-(n-1)-1=-n.$$

Итак, действительно:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{1-q^k}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)\left(1-\frac{q}{q^n}\right)\dots\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^n}\right)=-n.$$

Полагая здесь $q^{-1}=a$, получаем искомое тождество.

24. Положим:

$$u_k=\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{b(b-1)\dots(b-k+1)},$$
$$u_{k+1}=\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)(a-k)}{b(b-1)\dots(b-k+1)(b-k)}.$$

Отсюда

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{a-k}{b-k}; \quad (b-k)\,u_{k+1}=(a-k)\,u_k.$$

Следовательно:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(a-k)=\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}(b+1-k-1).$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} u_k=S_n.$$

Поэтому

$$aS_n-\sum_{k=1}^{n} ku_k=(b+1)\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,u_{k+1},$$

$$aS_n-\sum_{k=1}^{n} ku_k=(b+1)\,(S_n+u_{n+1}-u_1)-\sum_{k=2}^{n+1} ku_k.$$

Отсюда

$$(a-b-1)\,S_n=(b+1)\,(u_{n+1}-u_1)+u_1-(n+1)\,u_{n+1}=(b-n)\,u_{n+1}-bu_1.$$

Теперь S_n легко находится.

25. Легко доказывается индукцией.

26. Оба тождества легко доказываются индукцией.

27. Левая часть равна:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

28. Если последовательность чисел x_n определена зависимостью:

$$x_n=\alpha x_{n-1}+\beta x_{n-2}$$

при данных начальных значениях x_0 и x_1, то имеет место следующее общее выражение для x_n:

$$x_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}\,x_1-ab\,\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\,x_0,$$

где a и b — корни квадратного уравнения:

$$s^2-\alpha s-\beta=0$$

(см. задачу 12).

В нашем случае имеем следующую зависимость:

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2},$$

т. е. $\alpha=\beta=1$ и $u_0=0$, $u_1=1$. Поэтому

$$u_n=\frac{a^n-b^n}{a-b},$$

где a и b — корни уравнения: $s^2-s-1=0$, так что можно положить $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Окончательно:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Пользуясь этим выражением для u_n, можно легко проверить справедливость всех предлагаемых соотношений (см. задачу 6, § 3). Однако, последнее выражение для u_n может быть получено и иным способом.

Будем рассматривать величины u_0, u_1, u_2, $u_3, \ldots$ как коэффициенты некоторого бесконечного ряда:

$$\varphi(x)=u_1+u_2x+u_3x^2+u_4x^3+\ldots+u_{n-1}x^{n-2}+u_nx^{n-1}+\ldots$$

или

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k+1}x^k.$$

Далее:

$$x\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k+1}x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^k,$$

$$x^2\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k+1}x^{k+2}=\sum_{k=2}^{\infty}u_{k-1}x^k.$$

Поэтому

$$\varphi(x)-x\varphi(x)-x^2\varphi(x)=\sum_{k=2}^{\infty}(u_{k+1}-u_k-u_{k-1})\,x^k+u_1+u_2x-u_1x=1.$$

Отсюда (так как $u_{k+1}-u_k-u_{k-1}=0$)

$$\varphi(x)\,(1-x-x^2)=1$$

и

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

Однако, выражение $\frac{1}{1-x-x^2}$ может быть представлено в следующем виде (разложено на простейшие дроби):

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\alpha}{1+\alpha x}-\frac{\beta}{1+\beta x}\right\}, \tag{*}$$

где

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad \beta=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{1+\alpha x}=1-\alpha x+\alpha^2x^2+\ldots,$$

$$\frac{1}{1+\beta x}=1-\beta x+\beta^2x^2+\ldots$$

Подставляя эти разложения в равенство (*), найдем:

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}x^k.$$

Поэтому, действительно:

$$u_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}.$$

Впрочем, все десять тождеств настоящей задачи могут быть доказаны и методом математической индукции. Докажем, например, тождество 7° и 10°. При $n=1$ имеем:

$$u_2^2=u_1u_2,$$

что, действительно, справедливо.

Допустим, что

$$u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n-3}u_{2n-2}=u_{2n-2}^2,$$

докажем, что

$$u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n-3}u_{2n-2}+u_{2n-2}u_{2n-1}+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2.$$

В самом деле, на основании нашего допущения, имеем:

$$(u_1u_2+\ldots+u_{2n-3}u_{2n-2})+u_{2n-2}u_{2n-1}+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n-2}^2+$$
$$+u_{2n-2}u_{2n-1}+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n-2}(u_{2n-2}+u_{2n-1})+u_{2n-1}u_{2n}=$$
$$=u_{2n-2}u_{2n}+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}(u_{2n-2}+u_{2n-1})=u_{2n}^2.$$

Переходим к тождеству 10°. При $n=1$ тождество легко проверяется.

Допустим, что

$$u_{n-1}^4-u_{n-3}u_{n-2}u_nu_{n+1}=1,$$

и докажем, что

$$u_n^4-u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2}=1.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$u_n^4-u_{n-1}^4+u_{n-3}u_{n-2}u_nu_{n+1}-u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2}=0.$$

Но имеем:

$$u_n^4-u_{n-1}^4+u_{n-3}u_{n-2}u_nu_{n+1}-u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2}=$$
$$=(u_n^2+u_{n-1}^2)(u_n+u_{n-1})(u_n-u_{n-1})+u_{n-2}u_{n+1}(u_{n-3}u_n-u_{n-1}u_{n+2})=$$
$$=u_{n+1}u_{n-2}\{u_n^2+u_{n-1}^2+u_{n-3}u_n-u_{n-1}u_{n+2}\}=$$
$$=u_{n+1}u_{n-2}\{u_{n-1}^2-u_{n-1}u_{n+2}+u_n(u_n+u_{n-3})\}=$$
$$=u_{n+1}u_{n-2}\{u_{n-1}^2-u_{n-1}u_{n+2}+2u_nu_{n-1}\}=$$
$$=u_{n+1}u_{n-2}u_{n-1}\{u_{n-1}-u_{n+2}+2u_n\}=0,$$

так как

$$u_{n-1}-u_{n+2}+2u_n=0.$$

29. Имеем:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}u_{n+2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}u_{k+3}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+3}-u_{k+1}}{u_{k+1}u_{k+3}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_{k+3}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_{n+1}}\right)-\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\ldots+\frac{1}{u_{n+3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_{n+2}}-\frac{1}{u_{n+3}}=\frac{u_1+u_2}{u_1u_2}-\frac{u_{n+2}+u_{n+3}}{u_{n+2}u_{n+3}}=$$

$$=\frac{u_3}{u_1u_2}-\frac{u_{n+4}}{u_{n+2}u_{n+3}}.$$

30. Рассмотрим последовательность чисел:

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots,$$

определяемую следующим соотношением:

$$v_{n+1}=v_n+v_{n-1}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
v_2&=v_0+v_1,\\
v_3&=v_2+v_1=v_0+2v_1,\\
v_4&=v_3+v_2=2v_0+3v_1,\\
v_5&=v_4+v_3=3v_0+5v_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Методом индукции легко получить, что вообще:

$$v_n=u_{n-1}\cdot v_0+u_nv_1.$$

Рассмотрим следующую последовательность:

$$v_0=u_{p-1};\quad v_1=u_p;\ \ldots;\quad v_n=u_{p+n-1}.$$

Тогда имеем:

$$v_n=u_{p+n-1}=u_{n-1}u_{p-1}+u_nu_p,$$

и формула 1° доказана.

Формула 2° следует из 1° при $p=n$. Доказательство формулы 3° сводится к доказательству следующего равенства:

$$u_n^2+u_{n-1}^2=u_nu_{n+1}-u_{n-2}u_{n-1}.$$

31. На основании формулы 1° предыдущей задачи имеем:

$$u_{3n}=u_{n-1}u_{2n}+u_nu_{2n+1}.$$

Итак, нужно доказать:

$$u_{n-1}\cdot u_{2n}+u_n\cdot u_{2n+1}=u_n^3+u_{n+1}^3-u_{n-1}^3.$$

Доказательство несложно, если только иметь в виду соотношения:

$$u_{2n+1}=u_{n+1}^2+u_n^2,$$

$$u_{2n}=u_{n-1}u_n+u_nu_{n+1}.$$

32. Положим:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^{k} = v_n.$$

Нужно доказать, что $v_n = u_n$ (где u_n есть n-й член ряда Фибоначчи). Докажем, что при любом n будет:

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1}.$$

Допустим сначала, что n четное, и положим $n = 2l$. Имеем:

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k}; \quad v_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^{k}; \quad v_{n-1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-k-2}^{k}.$$

Так как $n = 2l$, то

$$\left[\frac{n}{2}\right] = l; \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] = l-1; \quad \left[\frac{n-2}{2}\right] = l-1.$$

Поэтому имеем:

$$v_n + v_{n-1} = \sum_{k=0}^{l-1} C_{n-k-1}^{k} + \sum_{k=0}^{l-1} C_{n-k-2}^{k}.$$

Положим во второй сумме $k = k' - 1$, тогда:

$$v_n + v_{n-1} = 1 + \sum_{k=1}^{l-1} C_{n-k-1}^{k} + \sum_{k'=1}^{l} C_{n-k'-1}^{k'-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{l-1} (C_{n-k-1}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1}) + C_{n-l-1}^{l-1}.$$

Но известно, что

$$C_{n-k-1}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1} = C_{n-k}^{k}.$$

Поэтому

$$v_n + v_{n-1} = 1 + \sum_{k=1}^{l-1} C_{n-k}^{k} + C_{l-1}^{l-1} = \sum_{k=0}^{l} C_{n-k}^{k} = v_{n+1},$$

так как

$$C_{l-1}^{l-1} = 1 = C_l^l.$$

Точно так же докажем, что $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ и при нечетном n. Но легко проверить, что

$$v_1 = u_1; \quad v_2 = u_2.$$

Поэтому ясно, что

$$v_n = u_n$$

при любом n.

33. Обозначим число целых положительных решений нашего уравнения через $N_n(m)$. Легко видеть, что $N_1(m) = 1$. Вычислим $N_2(m)$, т. е. число решений уравнеиия:

$$x_1 + x_2 = m.$$

В этом уравнении x_1 может принимать следующие значения: $1, 2, 3, \ldots, m-1$ и, следовательно, уравнение имеет следующую систему решений:

$$(1,\ m-1),\quad (2,\ m-2),\ \ldots,\ (m-1,\ 1),$$

т. е.

$$N_2(m)=m-1.$$

Перейдем теперь к вычислению $N_3(m)$, т. е. к определению числа решений уравнения:

$$x_1+x_2+x_3=m.$$

Будем давать x_3 значения $1, 2, 3, \ldots, m-2$. Ясно, что

$$N_3(m)=N_2(m-1)+N_2(m-2)+\ldots+N_2(2)=$$
$$=(m-2)+(m-3)+\ldots+1=\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}=C_{m-1}^2.$$

Докажем методом индукции, что

$$N_n(m)=C_{m-1}^{n-1}=\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}.$$

Очевидно, что

$$N_n(m)=N_{n-1}(m-1)+N_{n-1}(m-2)+\ldots+N_{n-1}(n-1).$$

Предполагая, что

$$N_{n-1}(m)=C_{m-1}^{n-2},$$

имеем:

$$N_n(m)=C_{m-2}^{n-2}+C_{m-3}^{n-2}+\ldots+C_{n-2}^{n-2}=C_{m-1}^{n-1}$$

(см. задачу 70, § 6).

34. Общий вид рассматриваемых уравнений будет:

$$kx+(k+1)y=n-k+1\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1). \tag{*}$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$k(x+y+1)+y=n+1$$

и положим:

$$x+y+1=z.$$

Тогда:

$$y=n+1-kz,$$
$$x=(k+1)z-(n+2).$$

Каково бы ни было z, эти выражения дают решения уравнения (*). Посмотрим, какие значения должно принимать z для того, чтобы x и y были целыми и неотрицательными. Итак, должны иметь место неравенства:

$$(n+1)-kz\geqq 0;\quad (k+1)z-(n+2)\geqq 0.$$

Отсюда

$$\frac{n+2}{k+1}\leqq z\leqq\frac{n+1}{k},$$

и z должно быть целым. Если $n+2$ не делится на $k+1$, то z может принимать значения:

$$\left[\frac{n+2}{k+1}\right]+1,\quad \left[\frac{n+2}{k+1}\right]+2,\ \ldots,\ \left[\frac{n+1}{k}\right].$$

Обозначим число решений уравнения (*) через N_k. В этом случае имеем:

$$N_k=\left[\frac{n+1}{k}\right]-\left[\frac{n+2}{k+1}\right].$$

Если же $n+2$ делится на $k+1$, то

$$N_k=\left[\frac{n+1}{k}\right]-\frac{n+2}{k+1}+1.$$

Но если $n+2$ не делится на $k+1$, то

$$\left[\frac{n+2}{k+1}\right]=\left[\frac{n+1}{k+1}\right],$$

если же $n+2$ делится на $k+1$, то

$$\frac{n+2}{k+1}-1=\left[\frac{n+1}{k+1}\right].$$

Итак, во всех случаях:

$$N_k=\left[\frac{n+1}{k}\right]-\left[\frac{n+1}{k+1}\right].$$

Полное же число решений равно:

$$N_1+N_2+\ldots+N_{n+1}=\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n+1}{2}\right]+$$
$$+\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n+1}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n}\right]-\left[\frac{n+1}{n+1}\right]+$$
$$+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]-\left[\frac{n+1}{n+2}\right]=\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n+1}{n+2}\right]=n+1.$$

Впрочем, этот результат может быть получен и иначе.

Имеем:

$$\frac{1}{1-q^k}=\sum_{x=0}^{\infty}q^{kx};\quad \frac{1}{1-q^{k+1}}=\sum_{y=0}^{\infty}q^{(k+1)y}.$$

Поэтому

$$\frac{q^{k-1}}{(1-q^k)(1-q^{k+1})}=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}q^{kx+(k+1)y+k-1}.$$

Если правую часть этого равенства развернуть по степеням q, то легко видеть, что коэффициент при q^n в этом разложении будет равен N_k, т. е. равен числу решений уравнения:

$$kx+(k+1)y=n-k+1.$$

Таким образом, величина:

$$N_1+N_2+\ldots+N_{n+1}$$

будет коэффициентом при q^n в следующем разложении:

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)}+\frac{q^2}{(1-q^3)(1-q^4)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{q^n}{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}+\frac{q^{n+1}}{(1-q^{n+2})(1-q^{n+3})}+\ldots$$

Однако легко видеть, что это разложение равно:

$$\frac{1}{q(1-q)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^{k+1}}-\frac{1}{1-q^{k+2}}\right)=\frac{1}{q(1-q)}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q^n.$$

Отсюда и следует:

$$N_1+N_2+\ldots+N_{n+1}=n+1.$$

35. Общий вид уравнений будет:

$$k^2x+(k+1)^2y=[(k+1)^2-k^2]\,n-k^2$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n).$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что одно решение будет:

$$x=-(n+1);\quad y=n.$$

Тогда, как известно, все решения будут получаться из выражений:

$$x=-(n+1)+(p+1)^2t,$$
$$y=n-p^2t,$$

где p есть одно из значений, принимаемых k.

Для того чтобы x и y были неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы t принимало целые значения, удовлетворяющие неравенствам:

$$\frac{n+1}{(p+1)^2}\leqq t\leqq\frac{n}{p^2}.$$

Далее, рассматривая отдельно два случая ($n+1$ делится на $(p+1)^2$ и $n+1$ на $(p+1)^2$ не делится), приходим к результату.

36. По условию, черные и белые шары чередуются. Поэтому возможны два предположения:

1) белые шары занимают нечетные места, т. е. первое, третье, ..., а черные — четные места;

2) белые шары занимают четные места, а черные — нечетные места. Легко видеть, что белые шары с номерами 1, 2, ..., n могут быть расположены на нечетных местах $n!$ способами, равным образом черные шары располагаются на четных местах также $n!$ способами. Итак, при первом предположении имеем $(n!)^2$ способов расположений всех шаров. Столько же расположений получаем и при втором расположении. Следовательно, полное число расположений шаров равно:

$$2\,(n!)^2.$$

37. Пусть L_{nk}^k обозначает число способов, которыми можно распределить kn различных предметов на k групп по n предметов в каждой группе.

Сколькими способами можно составить первую группу из n предметов? Ясно, что число этих способов равно C_{nk}^n, и ясно, что

$$L_{nk}^k=C_{nk}^n\,L_{nk-n}^{k-1}.$$

Отсюда легко получаем:

$$L_{nk}^n=C_{nk}^nC_{(k-1)\,n}^n\ldots C_{2n}^n.$$

38. Посмотрим, сколько имеется перестановок из n элементов, в которых два определенных элемента a и b стоят рядом. Могут быть следующие случаи: a стоит на первом месте, a — на втором, ..., наконец, a — на $(n-1)$, а b всегда справа, т. е. соответственно на втором, третьем, ... и на n-м месте. Может быть и так: b стоит на первом месте, ..., наконец, b стоит на

$(n-1)$-м, а a соответственно справа. Всего, таким образом, $2(n-1)$ случаев. Но каждому из таких случаев отвечает $(n-2)!$ перестановок. Поэтому общее число таких перестановок, у которых два определенных элемента a и b стоят рядом, будет:

$$(n-2)!\,2(n-1)=2(n-1)!.$$

Следовательно, число перестановок из n элементов, у которых два элемента a и b не стоят рядом, будет:

$$n!-2(n-1)!=(n-1)!\,(n-2).$$

39. Обозначим число искомых перестановок через Q_n и положим $n!=P_n$. Рассмотрим всю совокупность перестановок P_n. Среди этих перестановок существует Q_n таких, при которых ни один из элементов не занимает своего исходного положения. Посмотрим, сколько существует таких перестановок, в которых *один только элемент* сохраняет свое исходное положение. Несомненно, что таких перестановок будет nQ_{n-1}. Равным образом, число перестановок, в которых только какие-либо два элемента сохраняют исходное положение, будет $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Q_{n-2}$ и т. д. Наконец, число перестановок, где все элементы сохраняют исходное положение, будет $Q_0=1$. Таким образом, имеем:

$$P_n=Q_n+nQ_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Q_{n-2}+\ldots+nQ_1+Q_0.$$

Это равенство символически можно записать следующим образом:

$$P^n=(Q+1)^n.$$

Символ состоит в том, что после возведения в степень везде степень следует заменить значком, так что Q^k переходит в Q_k. Следовательно, мы можем написать следующее символическое тождество, справедливое при всех значениях x:

$$(P+x)^n=(Q+1+x)^n$$

(так как символически везде степень P может быть заменена той же степенью $Q+1$).

Полагая здесь $x=-1$, найдем:

$$Q^n=(P-1)^n.$$

Переходя от символического равенства к обыкновенному, имеем:

$$Q_n=P_n-\frac{n}{1}P_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}P_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}nP_1+(-1)^n;$$

$$Q_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

40. Рассмотрим все такие размещения n букв, при которых могут быть как свободные, так и занятые клетки. Если $n=1$, то число способов, которыми можно разместить 1 букву в r клетках, равно r (в 1-ю клетку одну букву, в остальные по 0, во 2-ю клетку одну букву, в остальные по 0 и т. д.). Все размещения 2 букв в r клетках получаются из только что рассмотренных r размещений путем последовательного размещения второй буквы в 1-й, 2-й, ..., r-й клетке. Таким образом, число размещений 2 букв в r клетках будет равно r^2, и легко видеть, что общее число размещений n букв в r клетках будет r^n. Обозначим число способов, посредством которых n различных букв могут быть размещены в r клетках так, чтобы в каждую клетку попала по крайней мере одна буква, через A_r. Среди наших r^n размещений

рассмотрим те, в которых в каждую клетку попала, по крайней мере, одна буква. Число таких размещений A_r. Затем рассмотрим все те размещения, где будет свободна одна и только одна клетка. Таких размещений будет rA_{r-1}. Далее, число размещений, где свободны две и только две клетки, будет:

$$\frac{r(r-1)}{1\cdot 2} A_{r-2}$$

и т. д.

Поэтому имеем:

$$A_r + rA_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} A_{r-2} + \ldots + rA_1 + 1 = r^n + 1.$$

Это равенство символически можно записать следующим образом:

$$(A+1)^r = r^n + 1$$

(т. е. после развертывания левой части следует в ней заменить везде A^k через A_k).

Далее, имеем:

$$(A+1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k x^k (A+1)^{r-k}.$$

Из этого равенства получаем следующее символическое справедливое при всех значениях x:

$$(A+1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k x^k [(r-k)^n + 1)].$$

Положим здесь $x = -1$. Тогда:

$$A^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k (-1)^k [(r-k)^n + 1] = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k (r-k)^n C_r^k + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k = (1-1)^r = 0.$$

Поэтому

$$A^r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k (r-k)^n C_r^k.$$

Переходя от символического равенства к обычному, получаем:

$$A_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k (r-k)^n C_r^k = r^n - \frac{r}{1}(r-1)^n + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}(r-2)^n + \ldots + (-1)^{r-1} r$$

(см. задачу 55, § 6).

§ 10. ПРЕДЕЛ

1. Положим $a = \frac{1}{b}$, так что $|b| > 1$. Докажем, что

$$|b| > 1 + n(|b| - 1) \qquad (n > 1).$$

Действительно:

$$|b|^n = \{1 + (|b| - 1)\}^n = 1 + n(|b| - 1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(|b| - 1)^2 + \ldots$$

Отсюда и следует:

$$|b|^n > 1 + n(|b| - 1) \qquad (n > 1).$$

Тогда:

$$|x_n|=|a|^n=\frac{1}{|b|^n}<\frac{1}{1+n(|b|-1)}$$

и действительно:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0.$$

2. Легко видеть, что можно предположить $a>0$. Тогда $x_i>0$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$. Пусть k есть целое число, удовлетворяющее условию $k\leqq a<k+1$, так что $\frac{a}{k+1}<1$.

Положим $n>k$. Тогда:

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^k}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}.$$

Но

$$\frac{a}{k+2}<\frac{a}{k+1};\quad \frac{a}{k+2}<\frac{a}{k+1};\quad \ldots;\quad \frac{a}{n}<\frac{a}{k+1}.$$

Поэтому

$$\frac{a^n}{n!}<\frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}.$$

Но так как $\frac{a}{k+1}<1$, то $\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}\to 0$, если $n\to\infty$, а потому при любом вещественном a имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,$$

т. е. факториал $n!$ растет быстрее, чем n-я степень любого вещественного числа.

3. Числитель и знаменатель этой дроби беспредельно растут вместе с возрастанием n. Рассмотрим отдельно три случая: $k=h$, $k<h$ и $k>h$.

1° $k=h$. Разделим числитель и знаменатель на $n^k=n^h$. Получаем:

$$\lim\frac{a_0n^h+a_1n^{h-1}+\ldots+a_h}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\ldots+b_h}=\lim\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_h}{n^h}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_h}{n^h}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

2° $k<h$.

$$\lim\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\ldots+b_h}=\lim\frac{\frac{a_0}{n^{h-k}}+\ldots+\frac{a_k}{n^h}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_h}{n^h}}=0.$$

3° $k>h$. Аналогично получаем, что в этом случае:

$$\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+\ldots+a_h}\to\infty.$$

4. Имеем:

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

Но

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\ldots(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)},$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{7\cdot 13\cdot 21\ldots(n^2+n+1)}{3\cdot 7\cdot 13\ldots(n^2-n+1)}=\frac{n^2+n+1}{3}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{2}{3}\lim\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}.$$

5. Положим:

$$\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=P_n^k.$$

При $k=1$ имеем $P_n^1=\frac{n+1}{2n}$ и, следовательно:

$$\lim_{n\to\infty}P_n^1=\frac{1}{2}.$$

Точно так же легко находим $\lim\limits_{n\to\infty}P_n^2=\frac{1}{3}$. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{i+1}$ для всех значений l, меньших k, и докажем, что $\lim P_n^k=\frac{1}{k+1}$. Положим $s_i=1^i+2^i+\ldots+n^i$. Тогда имеем следующую формулу (см. задачу 26, § 7):

$$(k+1)s_k+\frac{(k+1)k}{1\cdot 2}s_{k-1}+\frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}s_{k-2}+\ldots$$
$$\ldots+(k+1)s_1+s_0=(n+1)^{k+1}-1.$$

Но $P_n^k=\frac{s_k}{n^{k+1}}$, поэтому имеем:

$$P_n^k=\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}-\frac{k}{1\cdot 2}\frac{P_n^{k-1}}{n}-\ldots-\frac{1}{k+1}\frac{P_n^0}{n^k}.$$

Отсюда и следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P_n^k=\frac{1}{k+1}.$$

Однако, это предложение можно доказать и непосредственно. Воспользуемся неравенством (см. задачу 50, § 8):

$$mx^{m-1}(x-1)>x^m-1>m(x-1)$$

($x>0$ и не равно 1, m — рационально и не лежит между 0 и 1).

Положим здесь $m=k+1$ и x заменим через $\frac{x}{y}$. Получаем:

$$(k+1)x^k(x-y)>x^{k+1}-y^{k+1}>(k+1)y^k(x-y).$$

Положим здесь сначала $x=p$, $y=p-1$, а затем $x=p+1$, $y=p$. Тогда найдем:

$$(p+1)^{k+1}-p^{k+1}>(k+1)\,p^k>p^{k+1}-(p-1)^{k+1}.$$

Полагая в этом неравенстве $p=1, 2, \ldots, n$ и складывая, получаем:

$$(n+1)^{k+1}-1>(k+1)(1^k+2^k+\ldots+n^k)>n^{k+1}.$$

Деля все части неравенства на $(k+1)\,n^{k+1}$, найдем:

$$\frac{1}{k+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-\frac{1}{n^{k+1}}\right\}>\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}>\frac{1}{k+1}.$$

Отсюда и следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

6. Пользуясь обозначением предыдущей задачи, получаем:

$$\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}=n\left(P_n^k-\frac{1}{k+1}\right).$$

Пользуясь выражением для P_n^k, полученным в предыдущей задаче, имеем:

$$n\left(P_n^k-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}{(k+1)\,n^k}-\frac{1}{(k+1)\,n^k}-\frac{k}{2}\,P_n^{k-1}-\ldots-\frac{1}{k+1}\,\frac{P_n^0}{n^{k-1}}.$$

Отсюда

$$\lim n\left(P_n^k-\frac{1}{k+1}\right)=\lim\left\{\frac{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}{(k+1)\,n^k}-\frac{k}{2}\,P_n^{k-1}\right\}=\frac{1}{2},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}{(k+1)\,n^k}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}P_n^{k-1}=\frac{1}{k}.$$

7. Из задачи 4, § 9 имеем:

$$x_n=\frac{2x_1+x_0}{3}+(-1)^{n-1}\,\frac{(x_1-x_0)}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Отсюда следует:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{x_0+2x_1}{3}.$$

8. Имеем следующее соотношение (см. задачу 3, § 9):

$$\frac{x_n-\sqrt{N}}{x_n+\sqrt{N}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{N}}{x_0+\sqrt{N}}\right)^{2^n}.$$

Так как $\left|\dfrac{x_0-\sqrt{N}}{x_0+\sqrt{N}}\right|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0-\sqrt{N}}{x_0+\sqrt{N}}\right)^{2^n}=0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\sqrt{N}}{x_n+\sqrt{N}}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{N}.$$

Итак, получаем способ для извлечения корня квадратного из числа. Он состоит в следующем: берем любое положительное число (например, приближенное значение корня с точностью до единицы) за x_0. Представляем N в виде произведения двух множителей, из которых один равен x_0, так что

$$N = x_0 \cdot \frac{N}{x_0}.$$

Берем среднее арифметическое этих множителей и обозначаем его через x_1, так что

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right).$$

Далее, полагаем:

$$N = x_1 \cdot \frac{N}{x_1},$$

и опять берем среднее арифметическое:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right)$$

и т. д.

Величина погрешности, которую мы делаем, принимая x_n за приближенное значение $\sqrt{N}$, может быть определена из формулы:

$$\frac{x_n - \sqrt{N}}{x_n + \sqrt{N}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{N}}{x_0 + \sqrt{N}}\right)^{2^n}.$$

9. Докажем прежде всего, что

$$x_p^m > N.$$

Действительно:

$$x_p^m = x_{p-1}^m \left(1 + \frac{N - x_{p-1}^m}{m x_{p-1}^m}\right)^m.$$

Но

$$\left(1 + \frac{N - x_{p-1}^m}{m x_{p-1}^m}\right)^m > 1 + \frac{N - x_{p-1}^m}{x_{p-1}^m} = \frac{N}{x_{p-1}^m}$$

(см. задачу 51, § 8).

Поэтому

$$x_p^m > N,$$

при любом p (целом, положительном).

Докажем теперь, что переменная x_p убывающая, т. е. докажем, что

$$x_p - x_{p-1} < 0.$$

В самом деле:

$$x_p - x_{p-1} = \frac{N - x_{p-1}^m}{m x_{p-1}^m} < 0.$$

Итак, переменная x_n убывает, но остается положительной. Поэтому она имеет предел. Обозначим этот предел через λ. Из соотношения

$$x_n = \frac{m-1}{m} x_{n-1} + \frac{N}{m x_{n-1}^{m-1}}$$

при $n \to \infty$ получаем:

$$\lambda = \frac{m-1}{m}\lambda + \frac{N}{m\lambda^{m-1}},$$

$$\lambda^m = N \quad \text{и} \quad \lambda = \sqrt[m]{N}.$$

Легко видеть, что

$$x_n > \sqrt[m]{N} > \frac{N}{x_n^{m-1}},$$

и мы получаем возможность найти верхний предел ошибки, когда мы принимаем x_n за приближенное значение $\sqrt[m]{N}$.

10. Имеем:

$$0 < \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(см. задачу 4, § 8).

Отсюда и следует искомый результат.

11. Легко доказать следующее неравенство:

$$\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2} \qquad (1+x>0).$$

Полагая здесь $x = \frac{k}{n^2}$, найдем:

$$\frac{k}{2n^2+k} < \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 < \frac{k}{2n^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} < s_n < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

Правая часть равна:

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{4n^2}.$$

Поэтому предел правой части при $n \to \infty$ равен $\frac{1}{4}$. С другой стороны:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4} = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{4n^4}.$$

Следовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\} = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} = \frac{1}{4}.$$

Итак, обе переменные, между которыми заключено S_n, стремятся к $\frac{1}{4}$. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

12. Имеем:

$$x_n^2 = a + x_{n-1}.$$

Легко видеть, что переменная x_n возрастает. Покажем, что все значения этой переменной остаются меньше некоторого постоянного числа. Имеем:

$$x_{n-1}^2 - x_{n-1} - a < 0,$$

так как $x_{n-1} < x_n$.

Отсюда

$$\left(x_{n-1} - \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}\right)\left(x_{n-1} + \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2}\right) < 0.$$

Но так как вторая скобка больше нуля, то должно быть $x_{n-1} < \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$, т. е. возрастающая переменная x_{n-1} ограничена и, следовательно, имеет предел. Положим $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n-1} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$. Из исходного соотношения между x_n и x_{n-1} получаем:

$$\alpha^2 - \alpha - a = 0,$$

и так как $\alpha \geqq 0$, то

$$\alpha = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}.$$

13. Докажем, что переменная x_n убывающая. Имеем:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Но

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

и следовательно:

$$x_{n+1} < x_n.$$

Но можно доказать (см. задачу 6, § 8), что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Поэтому

$$x_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 > -2.$$

Итак, убывающая переменная x_n остается постоянно больше -2. Следовательно, она имеет предел.

14. Покажем сначала, что $x_n > y_n$. Действительно:

$$x_n - y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{y_{n-1}})^2 > 0.$$

Но

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} < 0; \quad x_{n-1} > x_n,$$

т. е. переменная x_n убывающая. С другой стороны:

$$y_n - y_{n-1} = \sqrt{y_{n-1} \cdot x_{n-1}} - y_{n-1} = \sqrt{y_{n-1}}\,(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{y_{n-1}}) > 0,$$

т. е. $y_n > y_{n-1}$ и переменная y_n возрастающая. Отсюда следует, что каждая из переменных x_n и y_n имеет предел. Положим $\lim x_n = x$; $\lim y_n = y$. Имеем:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{x+y}{2}$$

и, следовательно:

$$x = y.$$

15. Имеем: $\dfrac{1}{1-q} = s_1$; $\dfrac{1}{1-Q} = s$; отсюда $q = 1 - \dfrac{1}{s_1}$; $Q = 1 - \dfrac{1}{s}$.

Но

$$1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots = \frac{1}{1-qQ} = \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{s_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{s}\right)} = \frac{ss_1}{s + s_1 - 1}.$$

16. Имеем:

$$s = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = u_1(1 + q + q^2 + \ldots); \quad \sigma^2 = u_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots)$$

Далее:

$$s_n = \frac{u_nq - u_1}{q-1} = u_1\,\frac{1-q^n}{1-q} = s \cdot (1 - q^n); \quad \sigma^2 = \frac{u_1^2}{1-q^2}; \quad s^2 = \frac{u_1^2}{(1-q)^2}.$$

Имеем:

$$s^2 + \sigma^2 = \frac{2u_1^2}{(1-q)^2(1+q)}; \quad s^2 - \sigma^2 = \frac{2u_1^2q}{(1-q)^2(1+q)}.$$

Отсюда

$$q = \frac{s^2 - \sigma^2}{s^2 + \sigma^2}$$

и

$$s_n = s(1 - q^n) = s\left\{1 - \left[\frac{s^2 - \sigma^2}{s^2 + \sigma^2}\right]^n\right\}.$$

17. 1° Положим $x = \dfrac{1}{y}$. Тогда $|y| > 1$, и можно положить $|y| = 1 + \varrho$, где $\varrho > 0$.

Имеем:

$$|n^kx^n| = \frac{n^k}{(1+\varrho)^n} =$$

$$= \frac{n^k}{1 + n\varrho + \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\varrho^2 + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)}\cdot\varrho^{k+1} + \ldots + \varrho^n}.$$

Предполагая, что $n > k$, найдем:

$$|n^k x^n| = \frac{n^k}{(1+\varrho)^n} < \frac{n^k (k+1)!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)\varrho^{k+1}} =$$

$$= \frac{(k+1)!}{\varrho^{k+1}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(n-k)}.$$

Но выражение:

$$\frac{(k+1)!}{\varrho^{k+1}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(n-k)} \to 0,$$

если $n \to \infty$ (k — постоянное).

Поэтому, действительно:

$$\lim n^k x^n = 0, \quad \text{если} \quad n \to \infty.$$

2° Положим: $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha$ ($\alpha > 0$). Тогда имеем: $n = (1+\alpha)^n$.

Отсюда

$$n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n.$$

Следовательно:

$$n > \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2; \quad \alpha^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{4}{n} \; (n > 2).$$

Итак:

$$\alpha < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} \; (n > 2).$$

Теперь легко видеть, что

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

18. Имеем:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

(см. задачу 40, § 7).

Но

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} = 1.$$

Итак:

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Аналогично:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

Можно доказать более общую формулу:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(q+1)}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(q+2)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)\ldots(q+n)}+\ldots=\frac{1}{q\cdot q!}$$

(см. задачу 26, § 9).

19. Допустим, что ряд сходящийся, т. е. допустим, что предел $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ при $n\to\infty$ существует и равен S.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$. Но с другой стороны:

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

(см. задачу 1, § 8), что невозможно. Итак, ряд не может быть сходящимся. Впрочем, расходимость этого ряда может быть доказана и иначе. Пусть $2^k<n<2^{k+1}$. Тогда имеем:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Но

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ldots$$

Поэтому

$$S_n>1+\frac{k}{2}.$$

Но при $n\to\infty$, $k\to\infty$, а следовательно, и $S_n\to\infty$, и ряд расходящийся (см. также задачу 22).

20. Положим $S_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$. Для того чтобы доказать, что ряд сходящийся, нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует. Но легко видеть, что S_n возрастает с возрастанием n. Остается доказать, что S_n ограничена. Пусть $2^{k-1}<n\leqq 2^k$. Имеем:

$$S_n\leqq 1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right).$$

Но

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}<2\frac{1}{2^\alpha}=\frac{1}{2^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}<\frac{4}{4^\alpha}=\frac{1}{4^{\alpha-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}<\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha}=\frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}}.$$

Итак:

$$S_n \leqq 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^2)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}},$$

или

$$S_n \leqq 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^2)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}}+\ldots,$$

$$S_n \leqq \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

Итак, S_n действительно ограничена, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и ряд сходится.

21. 1° Имеем (см. задачу 22 § 7):

$$1x+2x^2+\ldots+nx^n=\frac{x}{(x-1)^2}\left\{nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1\right\},$$

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\left\{1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x-1)^2}\left\{nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1\right\}=\frac{1}{(x-1)^2},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} nx^n=0 \quad (|x|<1)$$

(см. задачу 17, 1°).

2°, 3° Из результатов задачи 33 § 7 получаем:

$$1+4x+9x^2+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

$$1+2^3x+3^3x^2+\ldots+n^3x^{n-1}+\ldots=\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$$

22. 1° Непосредственно следует из задачи 41 § 8. Отсюда же может быть получено еще одно доказательство расходимости ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Положим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Так как переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к e возрастая, то имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

при любом целом положительном n.

Отсюда

$$n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,$$

если логарифм берется при основании e. Или

$$\frac{1}{n} > \lg\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \lg 2+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lg\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=\lg(n+1).$$

Итак:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \lg(n+1)$$

и ряд расходится.

2° Пользуясь формулой бинома Ньютона, получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\,\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Положим для краткости

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=u_k.$$

Тогда:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+u_2+u_3+\ldots+u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n.$$

Имеем:

$$u_k<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k};\qquad \frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{1-\frac{k}{n}}{k+1}<\frac{1}{k+1}.$$

Отсюда

$$u_{k+1}<u_k\,\frac{1}{k+1},$$

$$u_{k+2}<u_{k+1}\,\frac{1}{k+2}<u_k\,\frac{1}{(k+1)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n<u_k\,\frac{1}{(k+1)^{n-k}}.$$

Итак:

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n<\frac{u_k}{k+1}\left[1+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{n-k-1}}\right]<\frac{u_k}{k}.$$

Следовательно:

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot\frac{1}{k}.$$

Отсюда

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-(2+u_2+\ldots+u_k)<\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{k}$$

Пусть $n\to\infty$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} u_k=\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}$$

и, следовательно:

$$0<e-\left(2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\right)<\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\,\frac{1}{k}.$$

Отсюда и следует:

$$e=2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}+\frac{\theta}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot k}.$$

$$(0<\theta<1).$$

Таким образом, можно написать:

$$e=2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}+\ldots$$

23. Имеем:

$$2\sin\frac{1}{2}x-\sin x=2\sin\frac{1}{2}x\left(1-\cos\frac{1}{2}x\right)=4\sin\frac{1}{2}x\sin^2\frac{1}{4}x.$$

Отсюда

$$2\sin\frac{1}{2}x-\sin x<4\,\frac{x}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2,$$

так как $\sin\alpha<\alpha$ при $\alpha>0$.

Иначе:

$$2\sin\frac{1}{2}x-\sin x<\frac{1}{8}x^3. \qquad (1)$$

Заменяя здесь x через $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$, $\ldots$, $\frac{1}{2^{n-1}}x$, найдем:

$$2\sin\frac{1}{4}x-\sin\frac{1}{2}x<\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^3, \qquad (2)$$

$$2\sin\frac{1}{8}x-\sin\frac{1}{4}x<\frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}\right)^3, \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\frac{1}{2^n}x-\sin\frac{1}{2^{n-1}}x<\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^3. \qquad (n)$$

Умножаем неравенства (1), (2 , ..., (n) последовательно на 1, 2, ..., 2^{n-1} и складываем их:

$$2^n\sin\frac{1}{2^n}x-\sin x<\frac{1}{8}x^3\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-2}}\right\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, находим:

$$\lim\left\{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}x-\sin x\right\}\leqq\frac{1}{8}x^3\lim\left\{1+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right\}$$

Но

$$\lim \left\{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^{2n}}}{\frac{x}{2^n}}=1.$$

Следовательно:

$$x-\sin x\leqq\frac{1}{6}x^3.$$

24. 1° Положим:

$$S_n=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}.$$

Нужно доказать, что S_n имеет предел при $n\to\infty$. Легко видеть, что S_n возрастает при возрастании n, так что $S_{n+1}\geqq S_n$. Докажем, что S_n ограниченно. Имеем:

$$S_n=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\leqq 9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}\right)<$$
$$<9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots\right).$$

Итак, $S_n<1$ и ряд сходится.

2° Так как ω лежит в промежутке от 0 до 1, то разделим этот промежуток на десять равных частей. Число ω попадет либо внутрь, либо на границу одной из этих частей. Следовательно, можно найти такое целое число a_1 $(0\leqq a_1\leqq 9)$, что

$$\frac{a_1}{10}\leqq\omega<\frac{a_1+1}{10},$$

т. е.

$$0\leqq\omega-\frac{a_1}{10}<\frac{1}{10}.$$

Итак, число $\omega-\frac{a_1}{10}$ лежит в промежутке от 0 до $\frac{1}{10}$. Разделим этот промежуток на десять равных частей. Тогда будем иметь:

$$\frac{a_2}{10^2}\leqq\omega-\frac{a_1}{10}<\frac{a_2+1}{10^2}.$$

Отсюда

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}\leqq\omega<\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}.$$

Эту операцию можно продолжать подобным же образом дальше.

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)=\omega.$$

Здесь переменная возрастает, но остается все время меньше $\frac{a_1+1}{10}$, следовательно, она имеет предел. Рассмотрим переменную:

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n}.$$

Легко видеть, что эта переменная убывает, но остается больше $\frac{a_1}{10}$ и, следовательно, также имеет предел. Так как разность

$$\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n}\right)-\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)=\frac{1}{10^n}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, то обе эти переменные стремятся к одному и тому же пределу, который в силу неравенств

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\leqq\omega<\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n}$$

будет равен ω.

3° Если дробь конечна, то несомненно, что она равна рациональному числу. Перейдем к случаю периодичности. В этом случае имеем:

$$\omega=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)+$$
$$+\frac{1}{10^{2n}}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)+\ldots=\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}+\ldots\right)=\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}}=$$
$$=\frac{a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}10+a_n}{10^n-1},$$

т. е. ω есть число рациональное.

Совершенно так же можно убедиться, что будет рациональной и смешанная периодическая дробь (т. е. такая дробь, период которой начинается не с a_1, а позже).

Можно доказать (привлекая некоторые арифметические соображения), что, обратно, если число рационально, то его разложение в десятичную дробь обязательно будет либо конечным, либо периодическим (чисто периодическим, или смешанным периодическим).

Таким образом, всякая непериодическая бесконечная дробь дает обязательно иррациональное число.

25. Положим, что ω рационально, т. е. $\omega=\frac{Z}{N}$, где Z и N — целые числа.

Имеем:

$$\frac{Z}{N}=\frac{1}{l}+\frac{1}{l^4}+\frac{1}{l^9}+\ldots+\frac{1}{l^{n^2}}+\frac{1}{l^{(n+1)^2}}+\frac{1}{l^{(n+2)^2}}+\ldots$$

Умножим обе части равенства на $l^{n^2}N$ и перенесем n первых членов правой части налево.

Получим:

$$Zl^{n^2}-N\left(l^{n^2-1}+l^{n^2-4}+\ldots+l^{n^2-(n-1)^2}+1\right)=N\left\{\frac{1}{l^{2n+1}}+\frac{1}{l^{4n+4}}+\frac{1}{l^{6n+9}}+\ldots\right\}.$$

Отсюда

$$|zl^{n^2}-N(l^{n^2-1}+l^{n^2-4}+\ldots+1)|<$$

$$<N\left\{\frac{1}{l^{2n+1}}+\frac{1}{l^{2(2n+1)}}+\frac{1}{l^{3(2n+1)}}+\ldots\right\}=N\frac{\frac{1}{l^{2n+1}}}{1-\frac{1}{l^{2n+1}}}.$$

Итак:

$$|Zl^{n^2}-N(l^{n^2-1}+l^{n^2-4}+\ldots+1)|<N\frac{1}{l^{2n+1}-1}.$$

Если взять n достаточно большим, то правая часть может быть сделана сколь угодно малой, в то время как левая часть есть целое число, не равное нулю.

2° Доказывается совершенно аналогично 1°.

26. Имеем:

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots$$

Положим:

$$e=\frac{Z}{N}$$

(где Z и N — целые положительные числа).

Тогда:

$$\frac{Z}{N}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{N!}+\frac{1}{(N+1)!}+\ldots$$

или

$$Z(N-1)!-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{N!}\right)N!=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+1)(N+2)}+\ldots$$

Отсюда

$$\left|Z(N-1)!-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{N!}\right)N!\right|<$$

$$<\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+1)^3}+\ldots=\frac{1}{N},$$

что невозможно, так как справа стоит правильная дробь, а слева — целое число, не равное нулю. Итак, e есть число иррациональное. Если разложить e в десятичную дробь, то эта дробь будет бесконечной непериодической. Приведем следующее значение e, содержащее 2500 знаков после запятой.

$e=$2,71828	18284	59045	23536	02874	71352	66249	77572	47093	69995
95749	66967	62772	40766	30353	54759	45713	82178	52516	64274
27466	39193	20030	59921	81741	35966	29043	57290	03342	95260
59563	07381	32328	62794	34907	63233	82988	07531	95251	01901
15738	34187	93070	21540	89149	93488	41675	09244	76146	06680
82264	80016	84774	11853	74234	54424	37107	53907	77449	92069
55170	27618	38606	26133	13845	83000	75204	49338	26560	29760
67371	13200	70932	87091	27443	74704	72306	96977	20931	01416
92836	81902	55151	08657	46377	21112	52389	78442	50569	53696
77078	54499	69967	94686	44549	05987	93163	68892	30098	79312
77361	78215	42499	92295	76351	48220	82698	95193	66803	31825
28869	39849	64651	05820	93923	98294	88793	32036	25094	43117
30123	81970	68416	14039	70198	37679	32068	32823	76464	80429
53118	02328	78250	98194	55815	30175	67173	61332	06981	12509
96181	88159	30416	90351	59888	85193	45807	27386	67385	89422

87922 84998 92086 80582 57492 79610 48419 84443 63463 24496
84875 60233 62482 70419 78623 20900 21609 90235 30436 99418
49146 31409 34317 38143 64054 62531 52096 18369 08887 07016
76839 64243 78140 59271 45635 49061 30310 72085 10383 75051
01157 47704 17189 86106 87396 96552 12671 54688 95703 50354
02123 40784 98193 34321 06817 01210 05627 88023 51930 33224
74501 58539 04730 41995 77770 93503 66041 69973 29725 08868
76966 40355 57071 62268 44716 25607 98826 51787 13419 51246
65201 03059 21236 67719 43252 78675 39855 89448 96970 96409
75459 18569 56380 23637 01621 12047 74272 28364 89613 42251
64450 78182 44235 29486 36372 14174 02388 93441 24796 35743
70263 75529 44483 37998 01612 54922 78509 25778 25620 92622
64832 62779 33386 56648 16277 25164 01910 59004 91644 99828
93150 56604 72580 27786 31864 15519 56532 44258 69829 46959
30801 91529 87211 72556 34754 63964 47910 14590 40905 86298
49679 12874 06870 50489 58586 71747 98546 67757 57320 56812
88459 20541 33405 39220 00113 78630 09455 60688 16674 00169
84205 58040 33637 95376 45203 04024 32256 61352 78369 51177
88386 38744 39662 53224 98506 54995 88623 42818 99707 73327
61717 83928 03494 65014 34558 89707 19425 86398 77275 47109
62953 74152 11151 36835 06275 26023 26484 72870 39207 64310
05958 41166 12054 52970 30236 47254 92966 69381 15137 32275
36450 98889 03136 02057 24817 65851 18063 03644 28123 14965
50704 75102 54465 01172 72115 55194 86685 08003 68532 28183
15219 60037 35625 27944 95158 28418 82947 87610 85263 98139
55990 06737 64829 22443 75287 18462 45780 36192 98197 13991
47564 48826 26039 03381 44182 32625 15097 48279 87779 96437
30899 70388 86778 22713 83605 77297 88241 25611 90717 66394
65070 63304 52795 46618 55096 66618 56647 09711 34447 40160
70462 62156 80717 48187 78443 71436 98821 85596 70959 10259
68620 02353 71858 87485 69652 20005 03117 34392 07321 13908
03293 63447 97273 55955 27734 90717 83793 42163 70120 50054
51326 38354 40001 86323 99149 07054 79778 05669 78533 58048
96690 62951 19432 47309 95876 55236 81285 90413 83241 16072
26029 98330 53537 08761 38939 63917 79574 54016 13722 36133

Дадим также десятичный логарифм этого числа (282 знака)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Log}_{10} e = 0{,}&43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\\
&18916\ 60508\ 22943\ 97005\ 80366\\
&65661\ 14453\ 78316\ 58646\ 49208\\
&87077\ 47292\ 24949\ 33843\ 17483\\
&18706\ 10674\ 47663\ 03733\ 64167\\
&92871\ 58963\ 90656\ 92210\ 64662\\
&81226\ 58521\ 27086\ 56867\ 03295\\
&93370\ 86965\ 88266\ 88331\ 16360\\
&77384\ 90514\ 28443\ 48666\ 76864\\
&65860\ 85135\ 56148\ 21234\ 87653\\
&43543\ 43573\ 17247\ 48049\ 05993\\
&55353\ 05
\end{aligned}
$$

27. Легко видеть, что если l_k (начиная с некоторого k) все равны между собою, то мы имеем дело с бесконечно убывающей геометрической прогрессией и ω действительно рационально. Остается доказать, что если подобное обстоятельство (равенство всех l_k, начиная с некоторого k) не имеет места, то ω иррационально. Доказать же это можно совершенно аналогично предыдущему (см. задачу 25).

28. Докажем, что переменная u_n убывает, т. е. что $u_{n+1} < u_n$. Имеем:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \lg(n+1).$$

Отсюда

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \lg(n+1) + \lg n = \frac{1}{n+1} - \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим переменную

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

и докажем, что эта переменная убывает, т. е. докажем, что $v_{n+1} < v_n$, или что

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

т. е. покажем, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Имеем $(1+\alpha)^{\frac{m}{n}} > 1 + \alpha\frac{m}{n}$ (см. задачу 40, 1°, § 8).

Заменяя в этом неравенстве α через $\frac{1}{n}$, а $\frac{m}{n}$ через $\frac{n+1}{n+2}$, найдем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} > 1 + \frac{1}{n}\,\frac{(n+1)}{(n+2)}.$$

Но

$$1 + \frac{n+1}{n(n+2)} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Итак, переменная $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Итак, действительно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и, следовательно:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e.$$

Поэтому $(n+1)\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$, $\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$,

а потому

$$u_{n+1}-u_n<0,$$

и переменная u_n — убывающая.

С другой стороны:

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\lg n>\lg(n+1)-\lg n>\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.$$

Так как переменная u_n убывает, но остается больше нуля, то она имеет предел. Обозначим этот предел через C. Итак:

$$C=\lim\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\lg n\right\}.$$

C носит название эйлеровой постоянной. Дадим значение этой постоянной с 263 знаками после запятой. Имеем:

$$\begin{aligned}C=0{,}57721\ &56649\ 01532\ 86060\ 65120\\ 90082\ &40243\ 10421\ 59335\ 93992\\ 35988\ &05767\ 23488\ 48677\ 26777\\ 66467\ &09369\ 47063\ 29174\ 67495\\ 14631\ &44724\ 98070\ 82480\ 96050\\ 40144\ &86542\ 83622\ 41739\ 97644\\ 92353\ &62535\ 00333\ 74293\ 73377\\ 37673\ &94279\ 25952\ 58247\ 09491\\ 60087\ &35203\ 94816\ 56708\ 53233\\ 15177\ &66115\ 28621\ 19950\ 15079\\ 84793\ &74508\ 569\end{aligned}$$

29. Имеем:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2},$$

$$\sin\frac{x}{2^2}=2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}}=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}.$$

Перемножая эти равенства почленно, найдем:

$$\sin x=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Далее:

$$\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}}.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}x=x.$$

Положим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots$$

Тогда имеем:

$$\frac{x}{\sin x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots$$

Принимая здесь $x=\frac{\pi}{2}$, найдем искомую формулу. Число π, так же как и e, есть число иррациональное и, следовательно, не может быть выражено конечной или периодической десятичной дробью. Дадим значение π с 2035 знаками после запятой.

$\pi = 3{,}14159$ 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912
98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960
51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989
38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952
03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151
55478 57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983
81754 63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900 98488 24012
85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744
94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912
93313 67702 89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511
25338 24300 35587 64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279
67823 54781 63600 93417 21641 21992 45863 15030 28618 29745
55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093 02955
32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356
63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 38000
81647 06001 61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548
16136 11573 52552 13347 57418 49648 43852 33239 07394 14333
45477 62416 86251 89835 69485 56209 92192 22184 27255 02542
56887 67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383
82796 79766 81454 10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511
73929 84896 08412 84886 26945 60424 19652 85022 21066 11863
06744 27862 20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287
46776 46575 73962 41389 08658 32645 99581 33904 78027 59009
94657 64078 95126 94683 98352 59570 98258

Василий Августович Кречмар

Задачник по алгебре

М., 1964 г., 388 стр.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*

Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 27/IV 1964 г. Подписано к печати 20/VII 1964 г. Бумага $60\times90/_{16}$. Физ. печ. л. 24,25. Условн. печ. л. 24,25. Уч.-изд. л. 24,12. Тираж 75 000 экз. Т-09144. Цена книги 82 коп. Заказ № 1536.

Издательство «Наука».

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати Москва, Ж-54, Валовая, 28.