أجوبة امتحان الدورة العادية 2009

التمرين الأول :

1

لدينا : $C(2,-1,0)$ و $D(0,1,-1)$.

إذن : $\overrightarrow{OC}(2,-1,0)$ و $\overrightarrow{OD}(0,1,-1)$.

و منه :
$$\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(1;2;2)$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (OCD) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ منظمية على المستوى (OCD) .

إذن : المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متعامدتان .

و منه : $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD})=0$ يعني : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$

أي : $x+2y+2z=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) .

2

لدينا حسب المعطيات : $(\mathcal{S})$ هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}=0$

و منه : $(-2-x)(6-x)+(2-y)(6-y)-z(8-z)=0$

يعني : $(x^2-4x-12)+(y^2-8y+12)+(z^2-8z)=0$

يعني : $(x^2-4x)+(y^2-8y)+(z^2-8z)=0$

يعني : $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6^2$

إذن $(\mathcal{S})$ هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2,4,4)$ و شعاعها 6 .

3 أ

لدينا : $\begin{cases}\Omega(2,4,4)\\(OCD):x+2y+2z=0\end{cases}$

إذن : $d(\Omega,(OCD))=\dfrac{|2+2\times4+2\times4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6$

3 ب

بما أن شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ يساوي $d(\Omega,(OCD))=6$.

فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

3 ج

لدينا $A(-2,2,8)$ و $B(6,6,0)$

إذن : $\overrightarrow{OA}(-2;2;8)$ و $\overrightarrow{OB}(6;6;0)$

و منه : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=-12+12+0=0$

إذن : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

و نعلم أن $(\mathcal{S})$ هي مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

إذن $\boxed{O\in(\mathcal{S})}$ لأن $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. و لدينا كذلك : $\boxed{O\in(ODC)}$.

من (1) و (2) نستنتج أن O نقطة مشتركة بين $(\mathcal{S})$ و المستوى (ODC) .

و بالتالي : (ODC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة واحدة و هي النقطة O .

التمرين الثاني :

1

لدينا : $a=2-2i$ إذن : $|a|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$.

يعني أن الشكل المثلثي لـ a يُكتَبُ على الشكل : $a=\sqrt{8}e^{i\theta}$.

لدينا إذن : $2-2i=\sqrt{2}\cos\theta+i\sqrt{2}\sin\theta$

يعني : $\begin{cases}\sqrt{2}\cos\theta=2\\\sqrt{2}\sin\theta=-2\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}\cos\theta=\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)\\\sin\theta=\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\end{cases}$ إذن : $\theta\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

و بالتالي : $a=\sqrt{8}e^{\frac{-\pi i}{4}}$.

و بنفس الطريقة لدينا : $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

إذن : $|b|=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

إذن b يُكتبُ على الشكل : $b=e^{i\varphi}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

يعني : $\cos\varphi+i\sin\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

أي : $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\\sin\varphi=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\cos\varphi=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\cos\varphi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\\sin\varphi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\cos\varphi=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\\sin\varphi=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\end{cases}$

و منه : $\varphi\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ و بالتالي : $b=e^{\frac{i5\pi}{6}}$

2 أ

لدينا $\mathcal{R}$ دوران معرف بما يلي : $\mathcal{R}_O\left(\frac{5\pi}{6}\right):(\mathcal{P})\longmapsto(\mathcal{P})$

$M(z)\longmapsto M'(z')$

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M)=M'$

إذن : حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z'-0)=e^{i\frac{5\pi}{6}}(z-0)$

يعني : $z'=e^{\frac{i5\pi}{6}}z$ أي : $\boxed{z'=bz}$ $(*)$

2 ب

لدينا : $aff(A)=a=2-2i$

إذن :
$$b\cdot aff(A)=b\cdot a=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)$$
$$=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i+1$$
$$=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i=aff(c)$$

www.baclive.blogspot.com

نحصل إذن على ما يلي : $\boxed{aff(C) = b \cdot aff(A)}$ $(**)$

و حسب النتيجة $(*)$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$.

3

لدينا حسب النتيجة $(**)$: $c = ba$

إذن : $\arg(c) \equiv \arg(ba)\ [2\pi]$.

و منه : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)\ [2\pi]$

و لدينا : $a = \sqrt{8}e^{\frac{-\pi}{4}i}$ يعني : $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\arg(a) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

نختار قيمة عددية للعداد k . ليكن $k = 1$ كمثال .

نحصل على $\frac{7\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي a .

و لدينا كذلك : $b = e^{\frac{5\pi i}{6}}$ يعني : $\arg(b) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

أي : $\arg(b) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

نختار قيمة من قيم k ليكن $k = 0$.

إذن $\frac{5\pi}{6}$ عمدة للعدد العقدي b .

و بالتالي : $\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)$ عمدة للعدد العقدي c

أي : $\left(\frac{31\pi}{12}\right)$ عمدة للعدد العقدي c .

نستطيع اختيار $k = 0$ لتحديد عمدة لـ a و b .

لدينا : $\arg(a) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

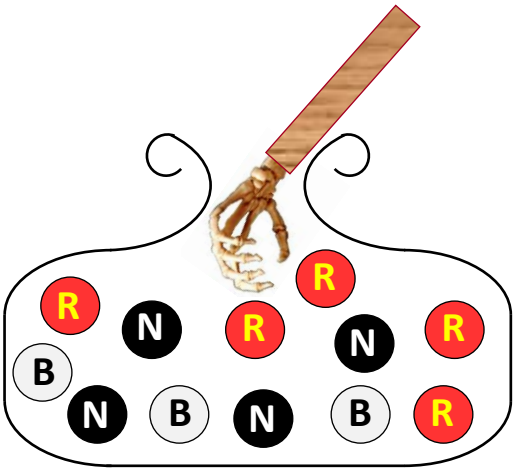
إذن من أجل $(k = 0)$ نحصل على $\frac{-\pi}{4}$ عمدة العدد العقدي a

و لدينا كذلك $\frac{5\pi}{6}$ عمدة للعدد العقدي b

إذن $\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ عمدة للعدد العقدي c

و بالتالي $\frac{7\pi}{12}$ عمدة للعدد العقدي c .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و آنيا (في آن واحد) ثلاث كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

لدينا : $p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات من}\\ \text{نفس اللون}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{حمراء}\end{array}\ \text{أو}\ \begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{سوداء}\end{array}\ \text{أو}\ \begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right)$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{حمراء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{سوداء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right)$$

$$= \frac{C_5^3}{card(\Omega)} + \frac{C_4^3}{card(\Omega)} + \frac{C_3^3}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

إذن : $p(A) = \frac{3}{44}$

و لدينا : $p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات مختلفة}\\ \text{مثنى مثنى}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على كرة}\\ \text{حمراء و كرة سوداء}\\ \text{و كرة بيضاء}\end{array}\right)$

$$= \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{card(\Omega)} = \frac{5 \times 4 \times 3}{220}$$

$$= \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

إذن : $p(B) = \frac{3}{11}$

2 أ

عندما نسحب ثلاث كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة من ثلاثة ألوان مختلفة فإنه يُحتمل أن نحصل على :

- ثلاث كرات من نفس اللون .
- كرتين من نفس اللون و الثالثة مخالفة لهما .
- ثلاث كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى .

إذن المتغير العشوائي X الوارد في التمرين يأخذ ثلاث قيم مختلفة و هي : 1 أو 2 أو 3 . إذن : $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$.

2 ب

يُقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X\ :\ \{1; 2; 3\} \longmapsto [0; 1]$$
$$k \longmapsto P_X(k) = p[X = k]$$

لدينا الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على ثلاث كرات من لون واحد (يعني من نفس اللون)

إذن حسب نتيجة السؤال 1) : $p[X = 1] = p(A) = \frac{3}{44}$

و لدينا كذلك الحدث $[X = 3]$ هو الحصول على ثلاث كرات من ثلاث ألوان مختلفة .

يعني : $p[X = 3] = p(B) = \frac{3}{11}$

يكفي الآن تحديد $p[X = 2]$. و أقترح إنجاز ذلك بطريقتين مختلفتين :

www.baclive.blogspot.com

الطريقة الأولى :

$$p[X=2] = p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{كرتين من نفس}\\ \text{اللون و الثالثة}\\ \text{من لون آخر}\end{array}\right)$$

$$= p\begin{pmatrix} R & & R & & N & & N & & B & & B \\ R & \text{أو} & R & \text{أو} & N & \text{أو} & N & \text{أو} & B & \text{أو} & B \\ N & & B & & B & & R & & R & & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_5^2C_4^1 + C_5^2C_3^1 + C_4^2C_3^1 + C_4^2C_5^1 + C_3^2C_5^1 + C_3^2C_4^1}{220}$$

$$= \frac{40+30+18+30+15+12}{220} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

الطريقة الثانية :

نعلم أن : $p[X=1]+p[X=2]+p[X=3]=1$

$$p[X=2] = 1 - p[X=1] - p[X=3] = 1 - \frac{3}{44} - \frac{3}{11} = \frac{29}{44}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X : \{1;2;3\} \longmapsto [0;1]$$

$$1 \longmapsto P_X(1) = p[X=1] = \frac{3}{44}$$

$$2 \longmapsto P_X(2) = p[X=2] = \frac{29}{44}$$

$$3 \longmapsto P_X(3) = p[X=3] = \frac{3}{11}$$

و نحسب الأمل الرياضي $E[X]$ للمتغير العشوائي X بما يلي :

$$E[X] = \sum_{k=1}^{k=3} k \cdot p[X=k]$$

$$= 1\times p[X=1] + 2\times p[X=2] + 3\times p[X=3]$$

$$= \left(1\times\frac{3}{44}\right) + \left(2\times\frac{29}{44}\right) + \left(3\times\frac{3}{11}\right)$$

$$= \frac{3}{44} + \frac{58}{44} + \frac{9}{11} = \frac{97}{44}$$

التمرين الرابع :

1 أ

ليكن $x \neq -3$. لدينا : $1 - \frac{3}{x+3} = \frac{(x+3)-3}{x+3} = \frac{x}{x+3}$

إذن : $(\forall x \neq -3)\ ;\ \left(\frac{x}{x+3}\right) = 1 - \frac{3}{x+3}$

و الهدف من هذا السؤال هو استعمال هذه النتيجة في السؤال الموالي :

1 ب

$$I = \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x+3}\right)dx = \int_{-2}^{-1}\left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} 1\,dx - 3\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= [x]_{-2}^{-1} - 3[\ln(x+3)]_{-2}^{-1}$$

$$= (-1+2) - 3(\ln 2 - \ln 1) = 1 - 3\ln 2$$

2

$$J = \int_{-2}^{-1} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(2x+6)}_{v}\,dx = [uv]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} uv'\,dx$$

$$= [x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x}{2x+6}\right)dx$$

$$= -\ln 4 + 2\ln 2 - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x}{2(x+3)}\right)dx$$

$$= -\ln 4 + \ln 4 - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x+3}\right)dx$$

$$= -\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x+3}\right)dx = -I$$

و بالتالي : $J = -I$ أي : $J = 3\ln 2 - 1$

التمرين الخامس :

1 I

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $(\sqrt{e^x}-1)^2 + 1 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1$

$$= e^x - 2\sqrt{e^x} + 2$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x}-1)^2 + 1$

نلاحظ أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ (\sqrt{e^x}-1)^2 \geq 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ (\sqrt{e^x}-1)^2 + 1 \geq 1$

و منه : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \geq 1$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \in \mathbb{R}$

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$.

لدينا حسب ما سبق : $e^x > 0$ و $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} > 0$

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

2 I

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(e^x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$

$$= 2\ln\left((+\infty)\left(1 - \frac{2}{+\infty} + \frac{2}{+\infty}\right)\right)$$

$$= 2\ln(+\infty) = +\infty$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$$

$$= 2\ln(e^{-\infty} - 2\sqrt{e^{-\infty}} + 2)$$

$$= 2\ln(0 - 0 + 2) = 2\ln 2 = \ln 4$$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$

www.baclive.blogspot.com

هذه النتيجة تُمكننا من أن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = \ln 4$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

I 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

إذن :
$$f'(x) = \frac{2\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)'}{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)} = \frac{2\left(e^x - \frac{2e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)}$$
$$= \frac{2\left(e^x - \sqrt{e^x}\right)}{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)} = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$

و منه : $f'(0) = \dfrac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^0} - 1\right)^2 + 1} = 0$

I 3 ب

نحدد في البداية حل المعادلة $\sqrt{e^x} - 1 = 0$.

لدينا : $\sqrt{e^x} - 1 = 0$ يعني : $\sqrt{e^x} = 1$

أي : $e^x = 1$ و منه : $x = \ln 1 = 0$.

إذا كان $x = 0$ فإن $\sqrt{e^x} - 1 = 0$.

إذا كان $x > 0$ فإن $\sqrt{e^x} - 1 > 0$.

إذا كان $x < 0$ فإن $\sqrt{e^x} - 1 < 0$.

بالرجوع إلى تعبير المشتقة $f'(x)$ نلاحظ أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{2\sqrt{e^x}}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1} > 0$$

إذن : إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)$.

نلخص إذن النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إذن نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة f تناقصية على المجال $]-\infty; 0]$ و تزايدية على المجال $[0; +\infty[$ و $f(0) = 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) \geq 0$

I 4 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا :
$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$
$$= 2\ln\left(e^x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$
$$= 2\ln(e^x) + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$
$$= 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x}\right)$

لدينا حسب السؤال I) 2) : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ (1)

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(2 + \frac{2}{x}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$
$$= 2 + \frac{2}{\infty}\ln\left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty}\right)$$
$$= 2 + 0 \times \ln 1 = 2 + 0 \times 0 = 2 \quad (2)$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2}$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$
$$= 2\ln\left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty}\right)$$
$$= 2\ln(1 - 0 + 0) = 2\ln 1 = 0 \quad (3)$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - 2x) = 0}$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 0$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

I 4 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right) = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2$$
$$= e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$

I 5 أ

لنحل أولا المعادلة : $\sqrt{e^x} - 2 = 0$ التي تصبح : $\sqrt{e^x} = 2$

أي : $e^x = 4$ يعني : $x = \ln 4 = 2\ln 2$

نحصل إذن على الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

www.baclive.blogspot.com

I 5 ب

نلاحظ حسب الجدول السابق أن :

$\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ (\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2) \le 0$

إذن : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \le 0$

يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 \le 0$

يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$

I 5 ج

لدينا حسب السؤال ج) : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$

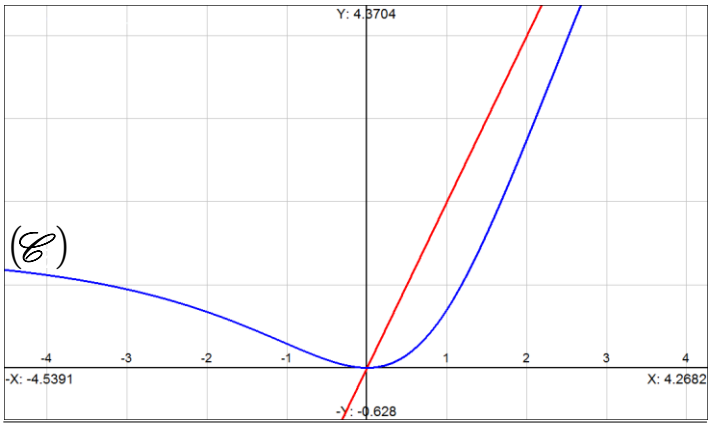
يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \le \ln(\sqrt{e^x})$

أي : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \le \frac{x}{2}$

و منه : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \le x$

يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ 0 \le f(x) \le x$

I 6



II 1

لنبرهن بالترجع أن : $(P_n) : (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4$

لدينا : $0 < 1 < \ln 4$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n \in [0;\ln 4]$

إذن حسب نتيجة السوال I) 5) د) : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le f(u_n) \le u_n$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_{n+1} \le u_n$

و منه حسب الافتراض : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_{n+1} \le u_n \le \ln 4$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا لحد الآن على ما يلي : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4}$ $(*)$

II 2

لدينا حسب النتيجة $(*)$: $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \le u_n$

إذن : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

II 3

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4$

إذن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 0 .

و بما أنها تناقصية فهي متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell) = \ell$.

يعني : $2\ln(e^\ell - 2\sqrt{e^\ell} + 2) = \ell$

يعني : $e^\ell - 2\sqrt{e^\ell} + 2 = \sqrt{e^\ell}$ أي : $e^\ell - 3\sqrt{e^\ell} + 2 = 0$

أي : $(\sqrt{e^\ell}-1)(\sqrt{e^\ell}-2) = 0$

و منه : $(\sqrt{e^\ell}-2) = 0$ أو $(\sqrt{e^\ell}-1) = 0$

و منه : $\ell = \ln 4$ أو $\ell = 0$.

و بما أن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية فإن : $\ell = 0$.

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

www.baclive.blogspot.com