

Instabilités structurales des plaques

Voilement

par **René MAQUOI**

*Professeur émérite de l'université de Liège
Ingénieur civil des constructions*

1. Notions de « plaque » et de « voilement »	C 2 512 – 2
1.1 Le composant « plaque »	— 2
1.2 Actions sollicitant les plaques	— 2
1.3 Instabilités dans les plaques	— 3
1.4 Dimensionnement d'une structure en plaques	— 4
2. Théorie élastique linéaire de la flexion des plaques.....	— 4
2.1 Action de forces transversales	— 4
2.2 Action additionnelle de forces agissant dans le plan	— 5
2.3 Conditions d'appui flexionnelles	— 7
3. Voilement des plaques	— 7
3.1 Voilement et charge critique élastique de voilement.....	— 7
3.2 Détermination des charges critiques élastiques de voilement	— 7
3.2.1 Méthode asymptotique	— 7
3.2.2 Intégration analytique de l'équation aux dérivées partielles ..	— 7
3.2.3 Méthode de l'énergie	— 8
3.3 Équations fondamentales du voilement élastique non linéaire	— 8
4. Charges critiques de voilement élastique.....	— 9
4.1 Sous sollicitations élémentaires	— 9
4.2 Sous combinaison de sollicitations élémentaires.....	— 10
4.3 Sous charge transversale concentrée.....	— 10
4.4 Outils de détermination des charges critiques	— 11
5. Charges ultimes de voilement.....	— 11
5.1 Analyse du concept de charge critique	— 11
5.2 Détermination des charges ultimes de voilement	— 12
5.3 Comparaison des comportements respectifs d'un poteau et d'une plaque	— 12
5.3.1 Poteau soumis à compression uniforme	— 12
5.3.2 Plaque soumise à compression uniforme	— 13
5.3.3 Comportement type « plaque » ou « poteau »	— 14
6. Modèles à la ruine pour le voilement des plaques	— 15
6.1 Modèle pour sollicitation sous contraintes normales uni-axiales....	— 15
6.1.1 Plaque parfaite en compression uniforme	— 15
6.1.2 Plaque imparfaite en compression uniforme	— 16
6.1.3 Plaque imparfaite soumise à distribution linéaire de contraintes normales.....	— 16
6.1.4 Procédure normative de la EN 1993-1-5	— 16
6.2 Modèle pour sollicitation de cisaillement	— 17
6.2.1 Rétrospective des modèles	— 17
6.2.2 Procédure normative de la EN 1993-1-5	— 19
6.3 Modèle pour voilement sous charge concentrée	— 20
6.3.1 Rétrospective des modèles	— 21
6.3.2 Procédure normative de la EN 1993-1-5	— 23
6.3.3 Extension aux âmes raidies longitudinalement	— 24
7. Procédure unifiée d'évaluation des charges de ruine	— 24
8. Conclusion.....	— 24
Pour en savoir plus.....	Doc. C 2 512

Tout élément structural de type « plaque » initialement plan et soumis à des efforts agissant strictement dans son plan est susceptible de quitter cette configuration et de fléchir transversalement lorsque la sollicitation induit des contraintes de compression dans tout ou partie de la plaque. Ce phénomène, appelé « voilement », survient lorsque la sollicitation atteint un seuil critique et il gouverne alors la capacité portante. Une plaque est d'autant plus propice au voilement que son élancement, mesuré par le rapport largeur/épaisseur, est élevé.

La compression source de cette instabilité résulte, soit de l'action directe d'une distribution de contraintes normales, soit de la composante de compression des contraintes principales lorsque la plaque est sollicitée en cisaillement.

La capacité portante d'une plaque est influencée par les imperfections géométriques (défaut de planéité) et structurales (contraintes résiduelles) et par la limite d'élasticité du matériau constitutif. Les imperfections ont un rôle défavorable.

Dans le présent dossier, on introduit, d'une part, les principes de base régissant la flexion transversale et le voilement des plaques et, d'autre part, les modèles à la ruine qui constituent désormais le fondement des clauses normatives.

Cet article fait suite aux [C 2 510] et [C 2 511] parus ensemble en 2009.

1. Notions de « plaque » et de « voilement »

1.1 Le composant « plaque »

De manière simpliste, une plaque peut être définie comme un composant structural dont l'une des trois dimensions, dite « épaisseur », est faible vis-à-vis des deux autres. Il s'agit, en principe, d'un être structural plan, entendant par là que le plan moyen, surface située à mi-épaisseur, est admis initialement parfaitement plan.

Pour éviter des complications mathématiques inutiles, on se borne à ne considérer ici que les plaques dont, à la fois :

- l'épaisseur t est constante ;
- la forme est rectangulaire et définie par la longueur a et la largeur b ;
- le matériau constitutif – les aciers de construction en l'espèce – est admis homogène et isotrope.

Ces conditions ne constituent pas, à proprement parler, des restrictions dès lors qu'on les rencontre le plus souvent, ou qu'on les approche suffisamment, dans la pratique de la construction métallique.

Le plan moyen défini plus haut sert de plan de référence Oxy (figure 1) et les axes x et y sont assez naturellement orientés, respectivement selon la longueur et la largeur. La direction z , perpendiculaire à ce plan, est ainsi dirigée selon l'épaisseur de la plaque.

1.2 Actions sollicitant les plaques

On en rencontre surtout deux types.

- Une plaque peut supporter des **forces transversales à son plan moyen**, assez souvent gravitaires (figure 2), donc dirigées selon la

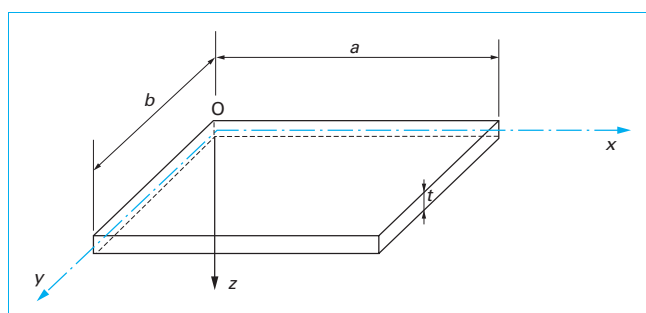


Figure 1 – Plaque rectangulaire et son repère de coordonnées

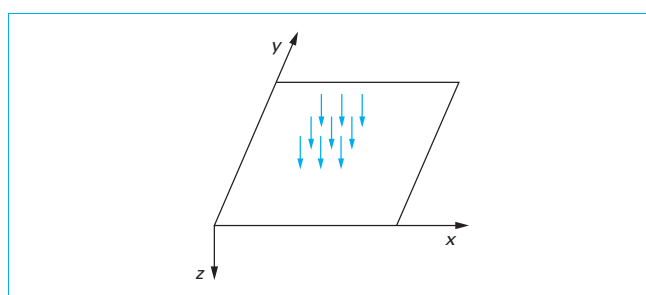


Figure 2 – Plaque sollicitée par des forces transversales à son plan moyen

direction z (les dalles de plancher ou de toiture en sont des exemples). Elle assure alors un rôle similaire à celui d'une poutre, si ce n'est qu'elle développe un comportement bi-axial et non mono-axial en flexion.

■ Par ailleurs, une plaque peut être soumise à des **forces membranaire**s, ainsi appelées parce que leurs résultantes s'exercent cette fois dans le plan moyen de la plaque.

Donc, si l'on néglige l'épaisseur des semelles devant la hauteur d'âme d'une poutre étroite en caisson soumise à flexion positive ($M > 0$) autour d'un de ses axes principaux, chacune des quatre parois (âmes, semelle inférieure, semelle supérieure) constituant la section est sollicitée dans son plan moyen par une distribution uni-axiale de contraintes normales constantes sur l'épaisseur :

- compression uniforme dans la semelle supérieure ;
- traction uniforme dans la semelle inférieure ;
- flexion pure ou composée dans l'âme.

Le moment de flexion M est normalement accompagné d'un effort tranchant V (figure 3a) ; celui-ci est principalement repris par les âmes. Les parois agissent donc respectivement à la manière d'une barre comprimée, d'une barre tendue et de poutres fléchies à la différence près qu'elles présentent ici encore, en raison de leurs proportions, un comportement bi-axial et non plus mono-axial.

1.3 Instabilité dans les plaques

De même qu'une barre comprimée peut flamber, une plaque peut voiler lorsque sa sollicitation extérieure génère localement (figure 3b), ou globalement, des efforts intérieurs de compression, en conformité avec le principe selon lequel « qui dit compression dit instabilité potentielle ».

■ Il est évident qu'une plaque rectangulaire appuyée sur son pourtour et sollicitée en compression uniforme d'intensité σ_x , selon la direction x , est en danger de voilement parce que des efforts intérieurs de compression σ_x cheminent selon x . On peut envisager de parler ici de **compression « directe »** parce que visible au travers de la sollicitation extérieure (figure 4a). Pour une certaine valeur $\sigma_{x,cr}$ de la contrainte de compression, la plaque se trouve dans un état

d'équilibre indifférent. Elle peut, soit rester plane, soit sortir de son plan et prendre ainsi une configuration d'équilibre à l'état déformé. La forme voilée, représentée par ses lignes de niveau à la figure 4a, concerne toute l'étendue de la plaque puisque celle-ci est partout comprimée.

La compression « directe » se rencontre également lorsque la plaque est soumise à flexion modérée puisqu'une zone de la plaque est alors soumise à compression $\sigma_x(y)$ d'intensité variable sur la largeur de cette zone (figure 5a) à partir d'une intensité

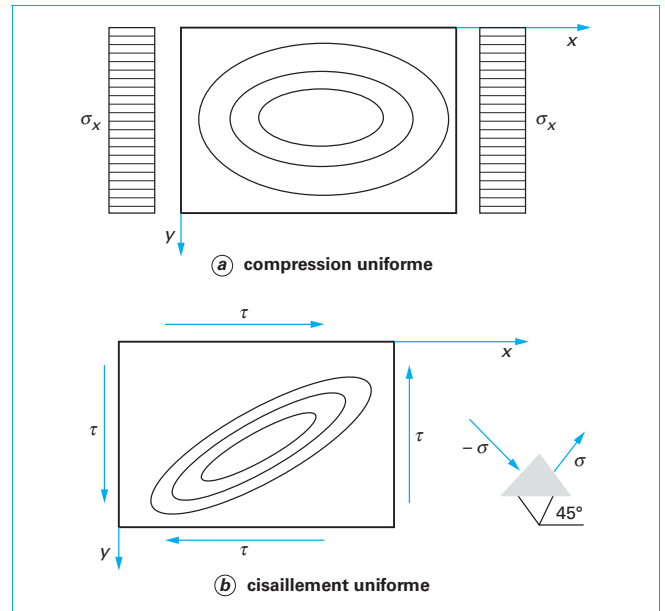


Figure 4 – Plaque rectangulaire soumise à compression uniforme et à cisaillement dans son plan

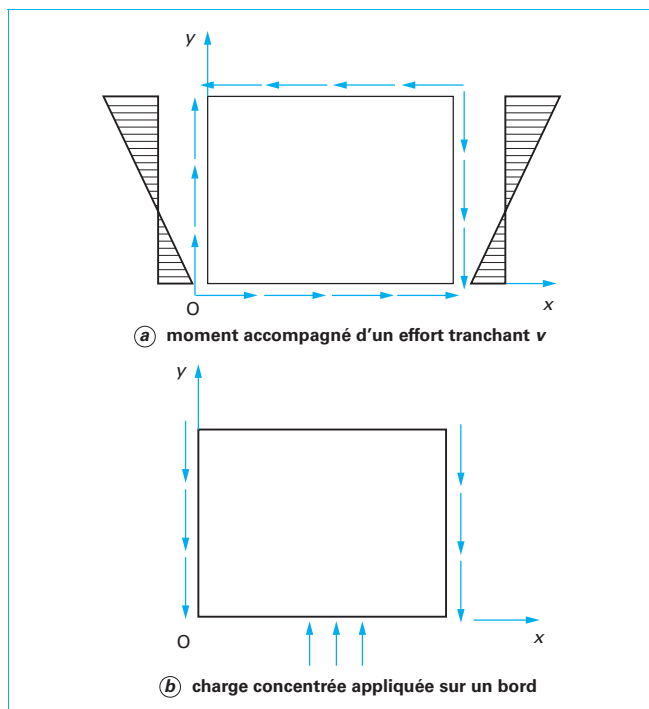


Figure 3 – Plaque rectangulaire sollicitée par des forces membranaire

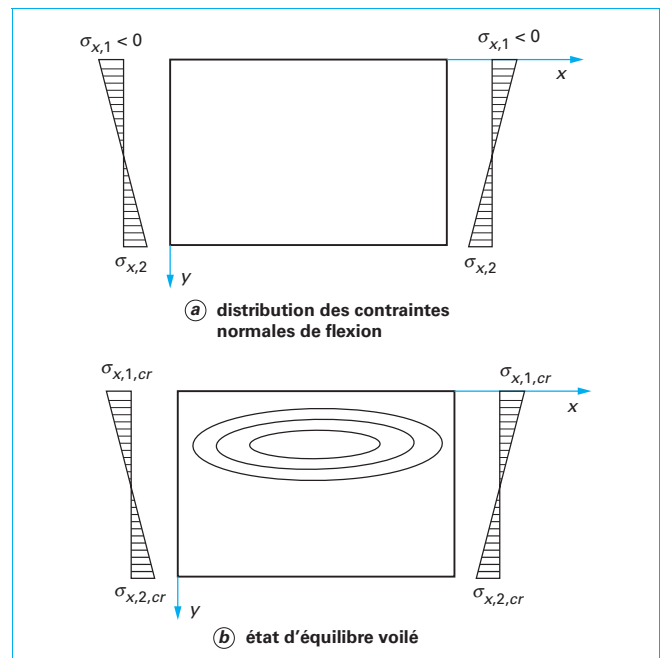


Figure 5 – Plaque soumise à flexion pure dans son plan

maximale $\sigma_{x,1}$ (valeur absolue). Si l'on amplifie cette sollicitation, la distribution des contraintes reste homothétique mais croît en intensité. Pour une certaine valeur $\sigma_{x,1,cr}$ de la contrainte maximale de compression, la plaque se trouve dans un état d'équilibre indifférent et peut voiler. Les lignes de niveau de la forme voilée représentée à la figure 5b se concentrent principalement dans la zone comprimée de la plaque et n'affectent que peu la zone tendue.

■ S'agissant de plaque, l'état de sollicitation interne est par essence bi-axial. Il est donc utile de raisonner en termes de contraintes principales. Ainsi, pour une même plaque soumise, cette fois, à **cisaillement pur d'intensité de contrainte τ** (figure 4b), on sait, en vertu du cercle de Mohr, que cet état de sollicitation équivaut à un état de contraintes principales égales à τ en valeur absolue mais de signes opposés, agissant selon les directions inclinées à 45° sur les facettes de cisaillement pur (figure 4b). C'est ici la compression principale diagonale, non directement extériorisée par la représentation habituelle de la sollicitation extérieure, qui constitue la source potentielle du voilement d'une plaque en cisaillement. On pourrait donc, en l'espèce, parler de compression « indirecte ».

Le voilement peut survenir pour une valeur τ_{cr} de la sollicitation, à laquelle correspond une valeur σ_{cr} de la contrainte principale de compression. La forme voilée est représentée par des lignes de niveau qui s'« étirent » selon une direction proche de celle de la diagonale comprimée et se concentrent sur une bande pseudo-diagonale (figure 4b).

■ Lorsque l'intensité de la compression – directe ou indirecte – atteint un niveau suffisant, la plaque peut donc quitter sa position plane initiale et prendre une **déformée transversale**, c'est-à-dire selon l'axe z . Ce danger est d'autant plus grand que la plaque est élancée. L'élancement de voilement est mesuré par le rapport b/t entre la largeur b (plus précisément la dimension b de la plaque dans la direction perpendiculaire à celui de la sollicitation sous contraintes normales) et l'épaisseur t . Il joue, dans le voilement d'une plaque, le même rôle que l'élancement de flambement L_{fl}/i pour un poteau comprimé axialement.

■ Le procédé moderne de montage des ponts métalliques par lancement pose par ailleurs le problème de la **résistance à une force transversale membranaire concentrée** (en anglais « *patch loading* »). La force transversale dont il s'agit ici est, par exemple, une réaction d'appui qui, appliquée en phase de construction à la face inférieure d'une poutre de pont, doit diffuser dans l'âme. Elle est en principe appliquée dans le plan de l'âme, mais selon la direction y , à savoir perpendiculairement à l'axe de la poutre, et induit clairement une compression locale sous la charge.

Si l'usage est de parler en l'espèce de force concentrée, la pratique est plutôt de considérer qu'il s'agit d'une force d'intensité souvent importante mais appliquée sur une longueur de distribution pouvant être faible, comparativement à la longueur de la poutre. Cette force est équilibrée par les efforts tranchants (figure 3b).

Alors que, pour la barre comprimée axialement, la charge critique élastique de flambement constitue une borne supérieure de la capacité portante, le comportement bi-axial des plaques permet à celles-ci, dans certaines circonstances, de développer une résistance postcritique significative et d'atteindre une charge de ruine pouvant largement dépasser la charge critique élastique de voilement.

■ Il existe, bien sûr, des situations pour lesquelles une plaque est soumise à une **distribution de contraintes normales membranaires**, à la fois selon les directions x et y . Un tel cas de distribution bi-axiale n'est qu'assez exceptionnellement rencontré dans les constructions civiles et il se traite alors le plus souvent par le biais de relations d'interaction entre les composantes uni-axiales respectives de la distribution. C'est pourquoi, dans la suite, on se borne à n'examiner que le cas de distribution uni-axiale de contraintes normales membranaires.

Exemples.

Dans les structures de génie civil, les plaques rencontrées sont très généralement soumises, soit à des forces transversales à leur plan, soit à des forces membranaires. L'action concomitante des deux types de sollicitations n'y est pas la règle.

Ce n'est pas le cas **dans la construction navale** où les bordages de navire doivent, à la fois, résister à la pression hydrostatique et aux efforts de flexion/torsion d'ensemble de la coque.

Ici, on examine exclusivement les aspects du voilement des plaques soumises à des sollicitations membranaires.

1.4 Dimensionnement d'une structure en plaques

De la même manière qu'il est d'usage de dimensionner une ossature en vérifiant individuellement les éléments structuraux (poutre, poteau) qui la composent, moyennant la prise en compte de conditions d'extrémité appropriées, on dimensionne une structure en plaques en vérifiant individuellement les plaques qui la composent.

Toute plaque est soumise à des conditions aux limites sur son pourtour. Si l'on isole une plaque de la structure à laquelle elle appartient, ces conditions traduisent donc physiquement les maintiens procurés à cette plaque par le reste de la structure.

Pour des raisons de stabilité, et donc de résistance, une plaque peut être raidie.

L'être générique appelé « plaque » peut alors désigner une partie non raidie de la tôle (sous-panneau), comprise entre raidisseurs/bords, tout autant que la plaque raidie en tant que telle (panneau).

Dans la mesure où il est parfois difficile d'assimiler les raidisseurs à des supports indéformables, on peut être amené à examiner séparément les sous-panneaux (non raidis) et les panneaux (raidis).

Cet article ne s'adresse qu'aux plaques non raidies. On y introduit, d'une part, les principes de base régissant la flexion transversale et le voilement des plaques et, d'autre part, les modèles à la ruine qui constituent désormais le fondement des clauses normatives.

2. Théorie élastique linéaire de la flexion des plaques

Le voilement d'une plaque se manifeste donc par l'apparition d'une déformée transversale au plan moyen. Il entraîne une flexion de la plaque hors de son plan et est gouverné par l'équation fondamentale de la flexion élastique des plaques.

En théorie élastique linéaire, l'équilibre est écrit par référence à la configuration non encore déformée.

2.1 Action de forces transversales

Lorsqu'on aborde la théorie élastique de la flexion des plaques [1], le matériau est supposé avoir un comportement indéfiniment élastique. Il est donc caractérisé par un diagramme contrainte/déformation, dit « diagramme $\tau - \varepsilon$ », linéaire dont la pente est donnée par le module d'élasticité E du matériau.

Il est d'usage d'étudier une poutre en flexion en la ramenant à son axe x . La déformée de celui-ci permet de déterminer la

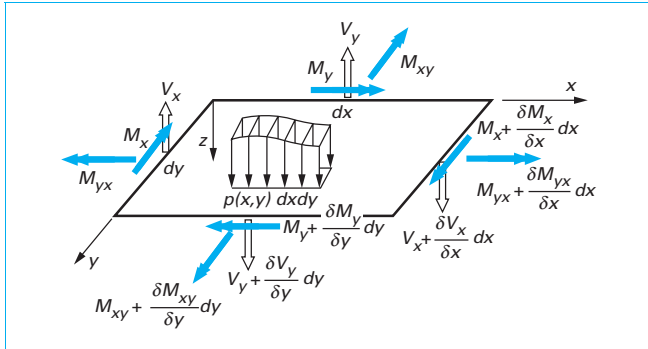


Figure 6 – Efforts intérieurs sur un élément infinitésimal (épaisseur t)

distribution en long des efforts intérieurs, appelés aussi « éléments de réduction » – moment de flexion M , effort axial N et effort tranchant V – puis de calculer les contraintes en un point situé à une distance z de l'axe x en utilisant les lois élémentaires établies dans la théorie élastique des poutres. Le fait qu'une plaque ait deux dimensions dominantes accroît évidemment le nombre d'éléments de réduction : moments de flexion M_x et M_y , moments de torsion M_{xy} et M_{yx} et efforts tranchants V_x et V_y (figure 6).

Il est d'usage de rapporter les efforts intérieurs à l'unité de longueur à laquelle ils s'appliquent.

■ Plusieurs théories de la flexion élastique des plaques sollicitées par des forces transversales au plan moyen existent. Elles diffèrent par les hypothèses simplificatrices de départ.

- La plus communément enseignée est la **théorie de Kirchhoff**. Elle est régie par des relations similaires à celles gouvernant la flexion des poutres mais, toutefois, quelque peu plus complexes dans la mesure où le comportement structural d'une plaque est bi-axial. Alors que la théorie des poutres est plutôt considérée rigoureuse, la théorie de Kirchhoff est manifestement approchée.

- Elle se fonde notamment sur l'**hypothèse simplificatrice** selon laquelle le plan moyen ne subit pas de déformation membranaire lorsque la plaque fléchit. Ceci implique que la déformée de la plaque soit une surface développable, ce qui, de toute évidence, ne saurait qu'être très exceptionnellement le cas. C'est pourquoi les résultats de la théorie de Kirchhoff ne sont considérés comme suffisamment réalistes que si la flèche (déplacement maximal selon z) n'excède pas 25 à 30 % de l'épaisseur t .

■ Tout problème de comportement élastique d'une plaque passe par la **détermination préalable de la déformée $w(x, y)$** du plan moyen de cette plaque, c'est-à-dire de la fonction représentant le déplacement de tout point de ce plan dans la direction normale à celui-ci. En effet, tous les efforts intérieurs – moments de flexion, moments de torsion, efforts tranchants – sont obtenus par dérivations appropriées de cette fonction $w(x, y)$.

On a par **exemple** pour les moments de flexion et de torsion :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

avec $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ raideur flexionnelle de la plaque par unité de longueur,
 ν coefficient de contraction transversale, dit de Poisson.

En négligeant, comme il est usuel, les infiniment petits d'ordre supérieur, l'équilibre d'un élément $dx \cdot dy$ découpé dans la plaque (figure 6) débouche sur les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x &= 0 \\ -\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + V_y &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

En substituant dans la 1^{re} équation de (2) les valeurs de V_x et V_y tirées des 2^e et 3^e équation de (2), on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p(x, y) = 0 \quad (3)$$

Et, en y remplaçant les moments par leurs expressions (1) :

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (4)$$

■ Cette dernière relation, appelée **équation de Lagrange** (1813), régit la flexion des plaques planes. Elle est l'analogue à deux dimensions de l'équation :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x, y)}{EI} \quad (5)$$

Celle-ci gouverne la flexion des poutres droites de raideur flexionnelle EI .

La détermination, par intégration de (4), de la déformée $w(x, y)$ du plan moyen de la plaque suffit pour calculer, selon (1), les distributions des moments de flexion et de torsion puis, selon les 2^e et 3^e équations de (2), celles des efforts tranchants. Les contraintes σ et τ et, au besoin, les contraintes principales en un point situé à une distance z du plan moyen s'obtiennent à partir des lois élémentaires de la résistance des matériaux et de l'élasticité plane à deux dimensions.

2.2 Action additionnelle de forces agissant dans le plan

Admettons maintenant que la plaque examinée au § 2.1 soit, en outre, soumise à des efforts membranaires, c'est-à-dire appliqués dans le plan de la plaque : N_x , N_y , N_{xy} ($= N_{yx}$). Ceux-ci produisent inévitablement une déformation du plan moyen et ont une action sur la flexion transversale de la plaque, d'une manière similaire à ce qui se passe dans une poutre chargée transversalement et axialement.

L'équilibre d'un élément infinitésimal $dx \cdot dy$, découpé dans la plaque par deux paires de plans parallèles aux plans coordonnés xz et yz , doit à présent envisager, outre les forces déjà considérées au § 2.1, les efforts agissant dans le plan de la plaque dont les intensités par unité de longueur sont indiquées à la figure 7b.

■ En projetant ces forces sur les axes x et y , on obtient les équations d'équilibre additionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Lesquelles sont indépendantes des trois équations de (2) et peuvent donc être traitées séparément.

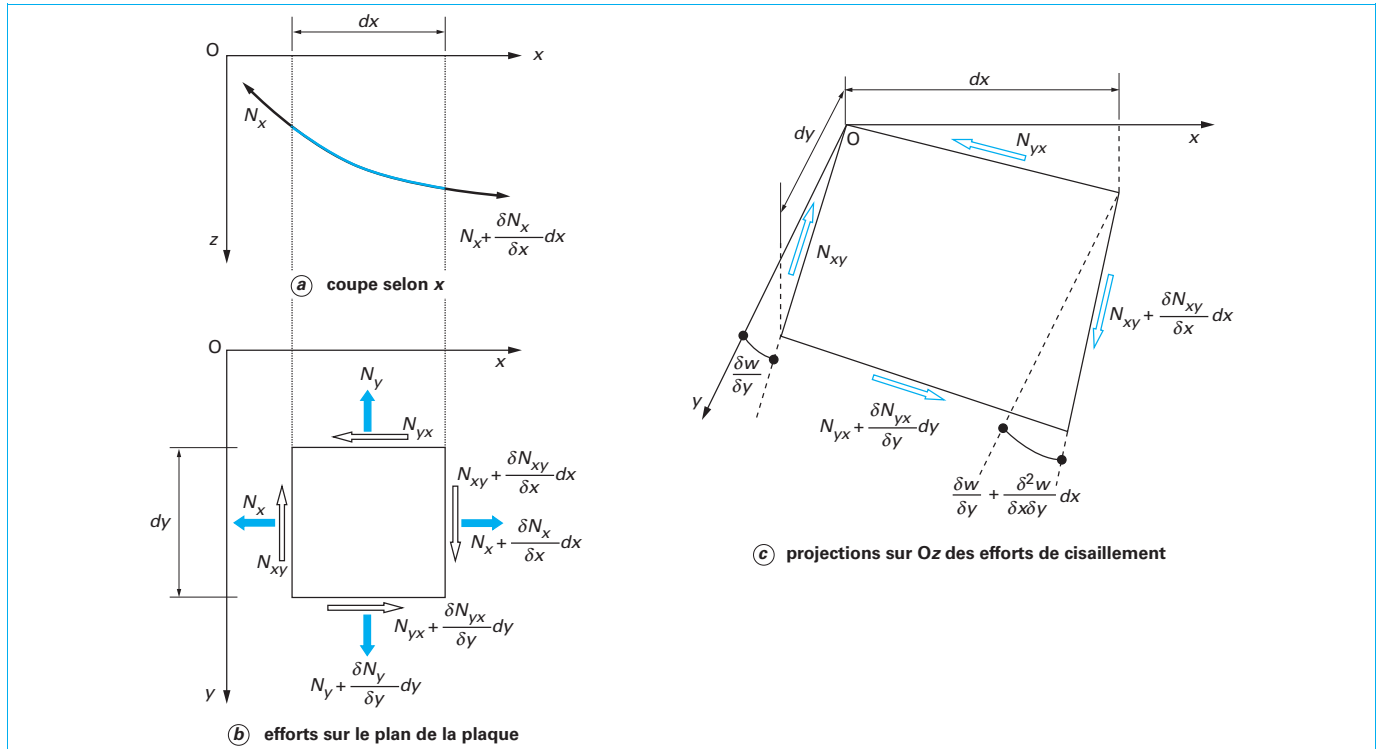


Figure 7 – Efforts membranaires

■ **Projetons maintenant sur l'axe O_z les forces indiquées à la figure 7a.** À cette fin, on doit tenir compte de la déformée de la plaque. En négligeant ici encore les infiniment petits d'ordre supérieur, on obtient :

- **Projection des forces N_x sur l'axe O_z (figure 7a) :**

$$N_x \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} dx dy \quad (7)$$

- **Projection des forces N_y sur l'axe O_z :**

$$N_y \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (8)$$

- **Projection des forces N_{xy} et $N_{yx} = N_{xy}$ sur l'axe O_z (figure 7c) :**

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} dx dy \quad (9)$$

■ Ces diverses contributions viennent donc se superposer à la charge transversale $p(x, y) dx dy$ (figure 6). En réappliquant la procédure décrite au § 2.1 aux équations (2) moyennant la modification ci-dessus et tenant compte des deux premières équations de (6), on obtient l'équation différentielle de la déformée d'une plaque soumise simultanément à des charges transversales et à des forces agissant dans le plan de la plaque :

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right] \quad (10)$$

• Considérons maintenant une plaque dont le plan moyen n'est pas initialement plan et présente une configuration initiale $w_0(x, y)$ d'amplitude faible vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque. Si une telle

plaque est soumise à l'action d'une charge transversale $p(x, y)$, elle prend une déformée $w_1(x, y)$ de sorte que tout point du plan moyen se retrouve à une coordonnée $[w_0(x, y) + w_1(x, y)]$ selon z . Pour le calcul de la déformée $w_1(x, y)$, on peut utiliser l'expression (10) établie pour les plaques planes. Ceci n'est toutefois licite que si la déformée initiale $w_0(x, y)$ est faible. On peut alors considérer qu'elle est produite par une charge transversale fictive et invoquer le principe de superposition.

• Considérons maintenant que, outre la charge transversale, la plaque est sollicitée par des forces membranaires. Les effets de celles-ci sur la flexion de la plaque dépendent, non seulement de $w_1(x, y)$, mais aussi de $w_0(x, y)$ et, plus précisément, de la déformée totale $[w_0(x, y) + w_1(x, y)]$ puisqu'ils font référence à celle-ci (figure 7). Dans le second membre de (10), il importe dès lors de remplacer $w(x, y)$ par la déformée totale.

Comme l'établissement de l'équation aux dérivées partielles l'a montré, le premier membre de (10) ne représente que des moments de flexion et de torsion dans la plaque. Ceux-ci ne dépendent pas de la courbure totale, mais bien de la variation de courbure. La fonction $w(x, y)$ s'identifie ainsi à la seule déformée additionnelle $w_1(x, y)$.

On obtient ainsi l'équation fondamentale d'une plaque à légère déformée initiale :

$$\frac{\partial^4 w_1(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1(x, y)}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 [w_0(x, y) + w_1(x, y)]}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 [w_0(x, y) + w_1(x, y)]}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 [w_0(x, y) + w_1(x, y)]}{\partial y^2} \right] \quad (11)$$

2.3 Conditions d'appui flexionnelles

L'intégration analytique de (10) selon x et y introduit $2 \times 4 = 8$ constantes. Celles-ci sont déterminées par huit conditions aux limites dites « flexionnelles » parce que portant sur la fonction déformée de flexion $w(x, y)$ à raison de deux conditions par bord. Les conditions aux limites flexionnelles standards sont :

- l'appui simple ;
- le bord encastré ;
- le bord libre.

Tout autre type de condition aux limites flexionnelles, en particulier l'appui élastiquement encastré, qui est le cas réel le plus fréquemment rencontré, est souvent difficile à quantifier très précisément et, dès lors, à formuler précisément.

Chaque bord de plaque est caractérisé par deux conditions aux limites flexionnelles qui expriment les valeurs locales du déplacement $w(x, y)$ et/ou de dérivées appropriées de celui-ci selon x et/ou y :

■ Bord (rectiligne) simplement appuyé :

- déplacement selon Oz nul, d'où : $w = 0$;
- moment de flexion normal au bord nul, ce qui, si le bord est rectiligne, revient à annuler la courbure normale au bord, d'où :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ bord parallèle à l'axe } Oy : M_x = 0 &\rightarrow \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{\text{bord}} = 0, \\ \bullet \text{ bord parallèle à l'axe } Ox : M_y = 0 &\rightarrow \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\text{bord}} = 0. \end{aligned}$$

■ Bord encastré :

- déplacement selon Oz nul, d'où : $w = 0$;
- pente normale au bord nulle, d'où :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ bord parallèle à l'axe } Oy : \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{\text{bord}} &= 0, \\ \bullet \text{ bord parallèle à l'axe } Ox : \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{\text{bord}} &= 0. \end{aligned}$$

■ Bord (rectiligne) libre :

- moment de flexion normal au bord nul, ce qui, si le bord est rectiligne, revient à annuler la courbure normale au bord, d'où :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ pour un bord parallèle à l'axe } Oy : M_x = 0 &\rightarrow \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{\text{bord}} = 0, \\ \bullet \text{ pour un bord parallèle à l'axe } Ox : M_y = 0 &\rightarrow \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{\text{bord}} = 0 ; \end{aligned}$$

- réaction verticale nulle :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ pour un bord parallèle à l'axe } Oy : \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{\text{bord}} &= 0, \\ \bullet \text{ pour un bord parallèle à l'axe } Ox : \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{\text{bord}} &= 0. \end{aligned}$$

3. Voilement des plaques

3.1 Voilement et charge critique élastique de voilement

Soit une plaque idéale, c'est-à-dire initialement plane et faite d'un matériau indéfiniment élastique, soumise à l'action exclusive

d'une force membranaire unique N_x (resp. N_y ou N_{xy}) qui induit de la compression dans tout ou partie de cette plaque.

■ Pour une certaine intensité de la sollicitation, la configuration plane de la plaque devient un état d'équilibre instable : la plaque est susceptible de voiler. La charge correspondant à ce niveau de sollicitation est dite « charge critique élastique » et est désignée par $N_{x,cr}$ (resp. $N_{y,cr}$ ou $N_{xy,cr}$). On rappellera ([41]) que la charge critique d'une plaque initialement plane correspond au point de bifurcation de l'équilibre et que celui-ci se situe à l'intersection de deux trajectoires d'équilibre stable :

- trajectoire fondamentale, pour laquelle la plaque reste plane ;
- trajectoire d'équilibre à l'état déformé, pour laquelle la plaque prend subitement une déformée transversale et fléchit donc hors de son plan.

■ Si la plaque est sollicitée par un ensemble de forces agissant concomitamment, par exemple en toute généralité N_x , N_y et N_{xy} , on admet habituellement que ces forces sont entre elles dans des rapports constants : $N_y = \beta_1 N_x$ et $N_{xy} = \beta_2 N_x$.

Sous sollicitation croissante, elles varient donc toutes proportionnellement et on peut prendre l'une d'entre elles, par exemple N_x , comme variable de chargement. Le point de bifurcation est atteint pour une sollicitation critique caractérisée par ($N_{x,cr}$, $N_{y,cr}$, $N_{xy,cr}$).

Le concept de **multiplicateur critique élastique** peut être substitué à celui de charge critique élastique. Il désigne simplement le facteur par lequel il faut multiplier un état de sollicitation de référence pour obtenir la charge critique. Ainsi, pour une force membranaire de référence \bar{N}_x (resp. \bar{N}_y ou \bar{N}_{xy}), le multiplicateur critique $\mu_{x,cr}$ (resp. $\mu_{y,cr}$ ou $\mu_{xy,cr}$) correspond au rapport $N_{x,cr}/\bar{N}_x$ (resp. $N_{y,cr}/\bar{N}_y$ ou $N_{xy,cr}/\bar{N}_{xy}$). Pour des forces membranaires de référence concomitantes (\bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy}), le multiplicateur critique μ_{cr} est égal à $N_{x,cr}/\bar{N}_x (= N_{y,cr}/\bar{N}_y = N_{xy,cr}/\bar{N}_{xy})$.

3.2 Détermination des charges critiques élastiques de voilement

On dispose d'un large éventail de méthodes pour la détermination des charges critiques ([2] [3] [4]). Le présent dossier n'a pas pour objet de les détailler. On se borne ci-après à mentionner le principe des plus connues d'entre elles.

3.2.1 Méthode asymptotique

Cette méthode consiste à supposer que la plaque présente dès le départ une faible déformée initiale. Il faut donc intégrer l'équation (11) et tracer le diagramme donnant la flèche en fonction de la sollicitation. La charge critique est la valeur de la sollicitation pour laquelle la flèche tend à croître indéfiniment. Il s'agit donc d'une approche asymptotique de la charge critique.

Cette méthode est sans doute davantage didactique que pratique. Il reste qu'elle est mise en œuvre lors de l'évaluation de charges critiques sur base d'une analyse élastique non linéaire conduite par voie numérique (logiciel).

3.2.2 Intégration analytique de l'équation aux dérivées partielles

On suppose ici que la plaque voile légèrement sous l'action des forces membranaires appliquées dans son plan moyen, et on détermine la valeur maximale de ces forces pour laquelle la plaque conserve cette configuration. L'équation aux dérivées partielles, gouvernant la déformée de la plaque, est obtenue à partir de (10)

après avoir posé qu'il n'y a aucune charge transversale, soit $p(x, y) = 0$. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[N_x \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right] \quad (12)$$

Par souci de généralité, les forces membranaires N_x , N_y et N_{xy} sont supposées agir concomitamment dans des rapports constants. Si les forces membranaires sollicitantes sont admises ne pas être affectées par la prise de déformée lors du voilement, l'équation (12) gouverne la théorie élastique *linéaire* du voilement. En intégrant (12) pour les conditions aux limites de la plaque considérée, on obtient que le voilement ($w \neq 0$) n'est possible que pour certaines valeurs de la sollicitation N_x . La plus petite de ces valeurs détermine la charge critique $N_{x,cr}$ recherchée et les valeurs correspondantes $N_{y,cr}$ et $N_{xy,cr}$ s'en déduisent immédiatement à partir des rapports précités.

La détermination de charges critiques par intégration analytique de (12) est susceptible de déboucher sur des expressions analytiques de ces charges et, donc, à des solutions exactes du problème posé. Elle est donc idéalement souhaitable. Sa mise en œuvre devient toutefois rapidement problématique. Ainsi, s'il est aisé d'établir de la sorte la charge critique élastique de voilement de la plaque simplement appuyée soumise à compression uni-axiale uniforme, ce l'est déjà nettement moins lorsqu'il s'agit d'examiner la plaque soumise à flexion, ou à cisaillement, dans son plan. On a dès lors rapidement recours à des méthodes approchées, au rang desquelles on trouve notamment la méthode de l'énergie.

3.2.3 Méthode de l'énergie

On suppose que la plaque soumise à des forces membranaires prend une légère déformée transversale, par flexion hors-plan, tout en respectant les conditions aux limites (conditions d'appui) prescrites. Une telle flexion de faible amplitude peut se produire sans entraîner de déformations membranaires du plan moyen, de sorte que l'énergie interne de déformation consiste exclusivement en une énergie de flexion et que le travail des forces extérieures, qui y correspond, est développé par les forces membranaires agissant sur la plaque.

Si le travail de ces forces est inférieur à l'énergie interne de déformation en flexion pour toute déformée transversale de voilement possible, l'équilibre de la plaque est stable dans la configuration initialement plane de la plaque. Dans le cas contraire, la plaque est instable et voile.

■ En désignant par ΔT le travail des forces extérieures et ΔU l'énergie interne de déformation en flexion, les **charges critiques** s'obtiennent en exprimant l'égalité :

$$\Delta T = \Delta U \quad (13)$$

■ L'énergie interne de déformation en flexion d'une plaque s'écrit :

$$\Delta U = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (14)$$

■ Quant au **travail des forces membranaires**, il vaut :

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (15)$$

■ La méthode consiste successivement à suivre les six étapes suivantes :

• Adopter *a priori* une déformée paramétrée, donc forcément approchée, satisfaisant les conditions d'appui. Une manière

courante de faire est d'écrire la déformée sous forme d'une série tronquée, par exemple :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{k_1} \sum_{n=1}^{k_2} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

• Introduire cette expression dans les relations (14) et (15) de ΔT et ΔU .

• De l'égalité (13), tirer l'expression de la charge critique prise comme variable de référence, soit par exemple $N_{x,cr}$. Cette expression est une fonction quadratique des paramètres définissant la déformée choisie.

• Ajuster les paramètres pour qu'ils rendent la charge critique minimale. À cet effet, dériver l'expression de $N_{x,cr}$ par rapport à chacun de ces paramètres, et l'annuler :

$$\frac{\partial N_{x,cr}}{\partial a_{mn}} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, k_1 ; n = 1, 2, \dots, k_2)$$

Puis, résoudre le système des k_1, k_2 équations linéaires homogènes.

• Rejetant la solution triviale pour laquelle la plaque ne voile pas (tous les a_{mn} nuls), le déterminant des équations ci-dessus doit être égal à zéro. On obtient ainsi une **équation d'où tirer la valeur de la charge critique de voilement élastique**.

• En méthode alternative, on peut aussi résoudre le système d'équations par **approximations successives**.

■ La **solution optimisée** ainsi obtenue est la meilleure pour la forme de la déformée choisie. La méthode énergétique trouve un domaine d'application évident lorsqu'il s'agit de déterminer les charges critiques de voilement pour des sollicitations rendant malaisée l'intégration purement analytique.

3.3 Équations fondamentales du voilement élastique non linéaire

Dans la théorie élastique non linéaire de la flexion des plaques [1], l'équilibre est écrit dans la configuration déformée. Dès lors, les efforts membranaires sollicitant la plaque dépendent de la déformée prise par la plaque. L'équation d'équilibre (11) doit être complétée par une équation de compatibilité. La seule relation (11) cède ainsi la place au doublet d'équations couplées ci-dessous, dues à von Karman [5] :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \\ & \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \\ & \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = \\ & Et \left[\left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Où les efforts membranaires ont été exprimés à partir d'une fonction d'Airy φ :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ N_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (17)$$

L'intégration selon x et y du doublet d'équations fondamentales (16) fait naître $2 \times 8 = 16$ constantes d'intégration. Il s'agit d'adjoindre aux huit conditions aux limites flexionnelles, portant sur la fonction $w(x, y)$, huit conditions aux limites membranaires, portant sur la fonction $\phi(x, y)$, à raison de deux conditions flexionnelles et deux conditions membranaires par bord. Les deux conditions aux limites membranaires expriment les valeurs locales des efforts membranaires et/ou la capacité, ou non, des bords opposés à se rapprocher librement tout en restant droits ou non.

Les équations (16) permettent de décrire le comportement d'une plaque élastique lorsque celle-ci a voilé, c'est-à-dire la trajectoire d'équilibre à l'état déformé.

L'intégration de (16) est problématique et la voie numérique s'impose pour ainsi dire d'emblée. On peut aussi rechercher des expressions analytiques approchées au voisinage d'un point, en particulier du point de bifurcation de l'équilibre.

4. Charges critiques de voilement élastique

4.1 Sous sollicitations élémentaires

Dans les conditions décrites plus haut, le plan moyen, supposé initialement plan, reste rigoureusement plan jusqu'à ce que la sollicitation atteigne l'état critique, état de sollicitation sous lequel la plaque est en équilibre indifférent. La trajectoire fondamentale se termine au point de bifurcation d'équilibre et se prolonge par une trajectoire à l'état déformé (voilé).

Les valeurs $\sigma_{x,cr}$ (compression uniforme, voir figure 4a) et $\sigma_{x,1,cr}$ (flexion, voir figure 5) sont dites « contraintes critiques de voilement » de la plaque étudiée pour la sollicitation considérée. À la distribution des contraintes, existant sous ce niveau de sollicitation, correspond une résultante des contraintes, à savoir respectivement un effort axial de compression et un moment de flexion, qui sont les charges critiques de voilement. Une autre manière d'exprimer les choses recourt au concept de multiplicateur critique de voilement $\sigma_{x,cr}/\sigma_x$ et $\sigma_{x,1,cr}/\sigma_{x,1}$.

Le parallélisme avec le flambement eulérien d'un poteau est évident.

On peut indifféremment se référer à la contrainte critique de voilement, à la charge critique de voilement, ou au multiplicateur critique de voilement. Dans la suite, on évitera de se répéter en usant systématiquement du terme générique « charge critique de voilement ».

La détermination de la charge critique de voilement relève de la théorie de la stabilité élastique ([2] [3] [4]). Elle s'effectue à partir de l'équation du voilement linéaire (12). La solution, exacte ou approchée, se présente sous la forme d'expressions (formules) pour des sollicitations élémentaires : compression uniforme, flexion pure, cisaillement pur, ... Ces expressions se présentent sous la forme générique suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{cr} \\ \tau_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\sigma \\ k_\tau \end{bmatrix} \sigma_E \quad (18)$$

avec k (resp. k_σ ou k_τ) coefficient de voilement (resp. sous contraintes normales σ ou sous contraintes de cisaillement τ),

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \text{ contrainte de référence d'Euler.} \quad (19)$$

En toute généralité, le coefficient de voilement k dépend :

- du rapport d'aspect $\alpha = a/b$ de la plaque ;
- des conditions aux limites flexionnelles de la plaque ;
- de la sollicitation de la plaque ;
- des propriétés et de la localisation du raidissage lorsque la plaque est raidie.

Dans la pratique, il est d'usage courant d'admettre, à titre sécuritaire, que les bords supportés d'une plaque sont simplement appuyés.

À titre d'exemples, on donne les diagrammes donnant les valeurs du coefficient de voilement en fonction du rapport d'aspect de la plaque pour trois sollicitations élémentaires de plaque non raidie simplement appuyée sur ses quatre bords :

- distribution uniforme de contraintes de compression selon x (figure 8) ;
- distribution de contraintes de flexion pure selon x (figure 9) ;
- distribution uniforme de cisaillement (figure 10).

L'influence des conditions aux limites flexionnelles, autres que des appuis simples sur un ou plusieurs bords, se traduit par d'autres courbes.

On donne ci-après les expressions (exactes ou approchées) du coefficient de voilement pour les trois sollicitations élémentaires :

– Compression uniforme :

$$k_\sigma = \begin{cases} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 & \text{pour } \alpha \leq 1, \\ k_\sigma \approx 4 & \text{pour } \alpha \geq 1; \end{cases} \quad (20)$$

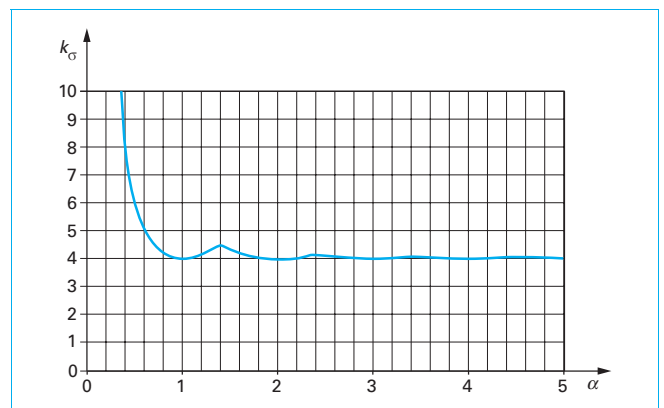


Figure 8 – Coefficient de voilement k_σ en compression uniforme

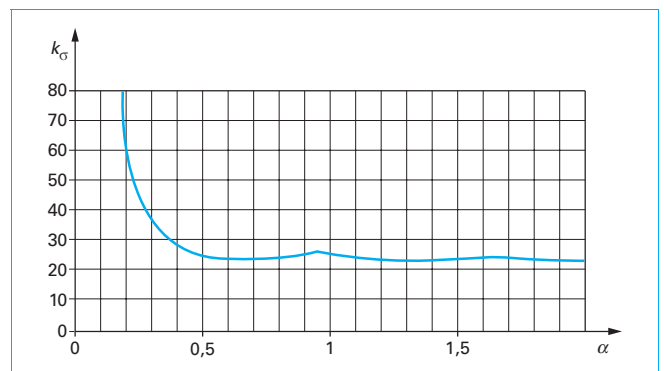
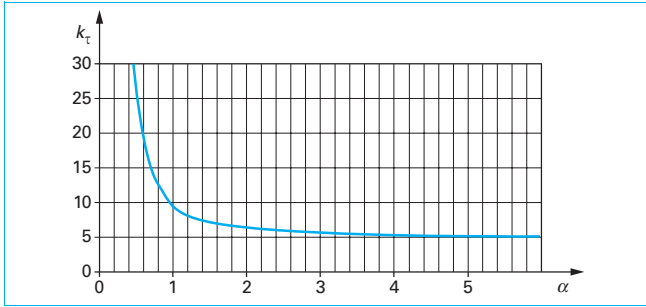


Figure 9 – Coefficient de voilement k_σ en flexion pure


 Figure 10 – Coefficient de voilement k_τ en cisaillement pur

– Flexion pure :

$$k_\sigma = 15,87 + 8,6\alpha^2 + \frac{1,87}{\alpha^2} \quad \text{pour } \alpha \leq 2/3, \quad (21)$$

$$k_\sigma \simeq 23,9 \quad \text{pour } \alpha \geq 2/3 ;$$

– Cisaillement :

$$k_\tau = 4 + 5,34/\alpha^2 \quad \text{pour } \alpha \leq 1, \quad (22)$$

$$k_\tau = 5,34 + 4/\alpha^2 \quad \text{pour } \alpha \geq 1.$$

Pour les plaques dites « longues », soumises à contraintes normales, il est d'usage d'adopter la valeur du coefficient de voilement obtenue pour le rapport d'aspect correspondant au premier minimum du diagramme, soit 4 en compression uniforme et 23,9 en flexion pure.

En raison de son intérêt pratique – notamment pour les semelles des profilés en I ou en H –, on donne également la valeur approchée du coefficient de voilement d'une plaque en compression, dont un bord longitudinal est simplement appuyé, tandis que l'autre est libre :

$$k_\sigma = 0,426 + 1/\alpha^2 \quad (23)$$

4.2 Sous combinaison de sollicitations élémentaires

L'intégration analytique et la méthode énergétique deviennent rapidement très laborieuses lorsque la sollicitation se fait un tant soit peu complexe. À l'époque où on ne disposait pas d'ordinateurs, on a pallié cette difficulté en isolant les composantes élémentaires de la sollicitation complexe – pour lesquelles on dispose des expressions des charges critiques – et on les a fait intervenir dans une formule d'interaction qui prend en charge la coexistence des divers types de sollicitation au travers d'un ajustement sur des résultats expérimentaux. La solution ainsi proposée est forcément approchée, l'approximation résidant essentiellement dans la forme simple donnée aux relations d'interaction.

■ Une telle **relation d'interaction**, due à **Dunkerley**, est la suivante :

$$\frac{1+\psi}{4} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr,0}} + \sqrt{\left(\frac{3-\psi}{4} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr,0}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{cr,0}}\right)^2} = 1 \quad (24)$$

avec $\sigma_{cr,0}$, $\tau_{cr,0}$ contraintes qui, agissant séparément, produisent le voilement,

σ_{cr} , τ_{cr} contraintes qui, agissant conjointement, produisent le voilement,

$\psi = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ rapport des valeurs extrêmes des contraintes normales appliquées (ainsi $\psi = 1$ en compression uniforme et $\psi = -1$ en flexion pure).

■ Dans une **relation d'interaction alternative**, la distribution globale de contraintes normales est décomposée en sa composante

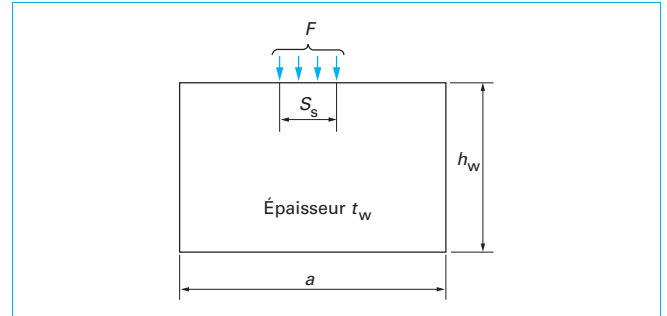


Figure 11 – Plaque soumise à charge concentrée

de flexion (indice *b* pour « *bending* ») et sa composante de compression axiale (indice *c* pour « *compression* ») :

$$\frac{\sigma_{c,cr}}{\sigma_{c,cr,0}} + \left(\frac{\sigma_{b,cr}}{\sigma_{b,cr,0}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{cr,0}}\right)^2 = 1 \quad (25)$$

avec $\sigma_{c,cr,0}$ contrainte de compression uniforme qui, agissant seule, produit le voilement,

$\sigma_{b,cr,0}$ contrainte (maximale) de flexion pure qui, agissant seule, produit le voilement,

$\tau_{cr,0}$ contrainte de cisaillement qui, agissant seule, produit le voilement,

$\sigma_{c,cr}$, $\sigma_{b,cr}$, τ_{cr} valeurs respectives de la contrainte de compression uniforme, de la contrainte (maximale) de flexion pure et de la contrainte de cisaillement qui, agissant concomitamment, produisent le voilement.

■ En coordonnées réduites, l'interaction entre flexion et cisaillement est un arc de cercle de rayon unitaire, tandis que celle entre compression et flexion est un arc de parabole.

Lorsqu'on utilise une relation d'interaction, il faut déterminer deux valeurs (σ_{cr} et τ_{cr}) dans la relation (24) et trois valeurs ($\sigma_{c,cr}$, $\sigma_{b,cr}$ et τ_{cr}) dans la relation (25). Il faut donc disposer d'une relation supplémentaire pour la première, et de deux pour la seconde. Ces relations traduisent simplement la proportionnalité entre les contraintes σ et τ à l'état de sollicitation et à l'état critique, à savoir :

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} \quad (26)$$

$$\frac{\sigma_c}{\tau} = \frac{\sigma_{c,cr}}{\tau_{cr}} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_b}{\tau} = \frac{\sigma_{b,cr}}{\tau_{cr}} \quad (27)$$

4.3 Sous charge transversale concentrée

Lorsqu'une plaque est soumise à une charge appliquée dans son plan, mais répartie sur une distance relativement courte sur l'un de ses bords, on dit qu'il s'agit d'une *charge concentrée* (figure 11). Le terme anglais approprié est « *patch loading* ». Cette situation se présente notamment dans les âmes de poutres en cours de lançage.

■ La **valeur critique de la charge concentrée**, pour laquelle survient le voilement élastique, s'écrit :

$$F_{cr} = k_F \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{t_w^3}{h_w} \quad (28)$$

avec E et ν propriétés du matériau (module d'élasticité et coefficient de Poisson),

h_w et t_w respectivement hauteur et épaisseur de la tôle d'âme (h_w joue ici le rôle de b).

La détermination analytique du coefficient de voilement k_F n'est pas aisée. Divers chercheurs s'y sont attelés avec des succès très divers. Le problème a été repris par voie de simulations numériques. Il a ainsi été procédé à de nombreuses études paramétriques dont l'exploitation des résultats a conduit à des expressions de k_F à fondement semi-empirique.

■ Une formulation assez complète du coefficient de voilement a été proposée en 1994 par Lagerqvist [6] pour les *plaques simplement appuyées* :

$$k_F = 2 + 2,12 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 + \left(\frac{s_s}{h_w} \right)^2 \left[0,5 + 2 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 \right] \quad (29)$$

Il en est de même pour les *âmes de poutre solidarisées à des semelles* :

$$k_F = \left(1 + \frac{s_s}{2h_w} \right) + \left(5,3 + 1,9 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 + 0,4 \sqrt{\beta} \right) \quad (30)$$

avec s_s longueur d'application de la charge concentrée,
 $\beta = b_f t_f^3 / h_w t_w^3$ fonction traduisant le maintien procuré par la semelle (raideur torsionnelle) vis-à-vis de la flexion hors plan de l'âme (raideur flexionnelle).

■ Plus récemment, Ren et Tong [7] ont proposé deux expressions du coefficient de voilement, à savoir :

• Pour une âme simplement appuyée (indice $s = supported$) sur son pourtour.

$$k_{F,s} = 2,05 + 1,2 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 + \left(\frac{s_s}{h_w} \right)^2 \left[0,5 + 2 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 \right] \quad (31)$$

À comparer à l'expression (29) de Lagerqvist et :

• Pour une âme parfaitement encastree (indice $c = clamped$).

$$k_{F,c} = \left[1 + 0,65 \left(\frac{s_s}{h_w} \right)^2 \right] \left[6,3 - 0,05 \left(\frac{a}{h_w} \right)^2 + 0,6 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 \right] \quad (32)$$

En réalité, l'âme est élastiquement encastree sur les semelles de sorte que les auteurs proposent une relation d'interpolation :

$$k_F = \frac{k_{F,s} + \beta \lambda k_{F,c}}{1 + \beta} \quad (33)$$

avec β défini plus haut,
 λ influence du rapport d'aspect a/h_w selon :

$$\lambda = 0,1 + 0,03 \frac{a}{h_w} + 1,63 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 \quad (34)$$

L'expression adoptée dans l'Eurocode 3, plus précisément dans sa partie EN 1993-1-5 (consulter le *Pour en savoir plus*) consacrée spécifiquement au voilement des plaques, s'est inspirée de (29).

Toutefois, dans un souci d'extrême simplification, l'effet de la longueur de distribution y a été négligé, en posant égal à 1 le premier terme du second membre, et un facteur forfaitaire a été adopté pour traduire l'influence des semelles. On y trouve ainsi la forme paradoxalement simple suivante :

$$k_F = 6 + 2 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 \quad (35)$$

4.4 Outils de détermination des charges critiques

En dehors des sollicitations élémentaires, la détermination des charges critiques de voilement reste une opération fastidieuse. On ne s'étonnera donc pas que les tous premiers ordinateurs aient notamment été mis en œuvre pour la détermination des coefficients de voilement et l'établissement d'abaques.

Les plus connus, et de loin les plus complets, de ces abaques sont dus à Klöppel et al. ([8], [9]). Ils ont été établis sur base de la méthode énergétique. Ces ouvrages, édités exclusivement en langue allemande, sont utilisés dans la plupart des bureaux d'études d'Europe occidentale (et d'ailleurs) pour traiter les aspects de voilement. Ils couvrent le voilement de plaques rectangulaires simplement appuyées sur tout leur pourtour et soumises à diverses distributions uni-axiales de contraintes normales ou de cisaillement. Les plaques sont, soit non raidies, soit raidies longitudinalement, soit encore raidies longitudinalement et transversalement. Dans le cas de plaques raidies, la raideur torsionnelle des raidisseurs n'est pas prise en compte, ce qui empêche de valoriser comme il se doit les raidisseurs en auget dont l'utilisation est désormais très largement répandue.

Les logiciels dont on dispose aujourd'hui permettent de s'affranchir des diverses limitations des abaques précités. Les résultats obtenus sont des valeurs numériques et non plus des expressions formelles.

Un tel logiciel, développé dans le cadre d'un **projet de recherche financé par l'Union européenne et appelé EBPlate**, est librement téléchargeable (consulter le *Pour en savoir plus*). Il couvre les plaques rectangulaires non raidies, ou raidies par des raidisseurs longitudinaux et/ou transversaux de section ouverte ou fermée, et soumises à des sollicitations complexes, en ce compris des charges concentrées.

5. Charges ultimes de voilement

5.1 Analyse du concept de charge critique

Le concept de charge critique de voilement élastique est associé à une plaque idéale. En conséquence :

- il postule un matériau indéfiniment élastique, alors que celui-ci possède une limite d'élasticité finie ;
- il ignore les imperfections structurales, en particulier la présence de contraintes résiduelles résultant des procédures de fabrication (laminage des tôles et des profilés utilisés aux fins de raidissage) et de fabrication (soudage visant à assembler les tôles entre elles et à fixer le raidissage) ;
- il suppose la plaque initialement parfaitement plane et ignore ainsi toute imperfection géométrique, en particulier l'inévitable défaut de planéité résultant accessoirement du laminage mais, surtout, des divers bridages induits par le soudage.

Ces aspects ne sont pas tous indépendants. Les contraintes résiduelles, par leur présence, et les défauts de planéité, par les moments de flexion hors-plan qu'ils entraînent lorsqu'agissent les efforts membranaires, sont susceptibles de précipiter l'apparition des premières plastifications et, donc, de réduire progressivement la rigidité flexionnelle de la plaque. Toute fibre plastifiée se comporte en effet comme si elle avait désormais un module d'élasticité évanescent. Ces imperfections affectent la stabilité de la plaque et ont une influence défavorable sur la charge ultime.

On a, par contre, déjà mentionné le comportement spécifique de l'élément structural *plaque* qui permet, dans certaines conditions, de mobiliser une réserve de résistance postcritique significative.

Le voilement d'une plaque *réelle*, appelée aussi *industrielle*, ne procède clairement pas d'une bifurcation de l'équilibre, mais bien d'une divergence de l'équilibre, et ce jusqu'à atteindre une charge de ruine pouvant, dans certains cas, excéder la charge critique de manière significative.

Puisque les hypothèses à la base du concept de charge critique sont souvent loin d'être conformes à la réalité, ce concept ne saurait constituer une mesure réaliste de la capacité portante au voilement. Il faut y substituer celui de *charge ultime*.

5.2 Détermination des charges ultimes de voilement

Si la théorie du voilement linéaire est à même de déboucher sur une charge critique, elle est par contre incapable de donner une quelconque indication sur le comportement de la plaque au-delà du seuil critique. Dans l'absolu, on pourrait envisager de recourir à la théorie non linéaire du voilement et, donc, au doublet d'équations (16) qu'il faudrait, de toute manière, compléter pour tenir compte d'un défaut initial de planéité et traiter de manière appropriée afin de refléter l'éventuelle plastification. L'intégration analytique, ou pseudo-analytique, de ces équations se révèle rapidement vaine entreprise.

■ Les logiciels matériellement et géométriquement non linéaires disponibles sur le marché sont, par contre, des outils permettant d'effectuer la simulation numérique, jusqu'à la ruine, d'une plaque donnée soumise à une sollicitation donnée.

Le terme « ruine » est assimilé à l'état-limite ultime de résistance de la plaque. Il correspond donc ici à la charge maximale atteinte au cours de la simulation numérique.

La formidable puissance de ces outils ne doit pas occulter le fait qu'ils doivent être mis entre les mains de personnel expérimenté et maniés avec circonspection. On a déjà dit plus haut que ces logiciels fournissent bien une réponse numérique à un problème donné et que d'éventuelles formules ne sauraient résulter que de l'exploitation des résultats d'études paramétriques.

■ Dès avant que ces logiciels soient disponibles, on a tenté avec succès de proposer des modèles à la ruine permettant d'évaluer les charges ultimes. On attend qu'un modèle à la ruine réponde aux critères suivants :

- soit assez bien représentatif de la physique du problème de voilement concerné ;
- repose sur des hypothèses simplificatrices, mais néanmoins réalistes ;
- traduise plutôt fidèlement les effets des paramètres déterminants ;
- incorpore, le plus souvent implicitement, les effets des imperfections structurales et géométriques, ainsi que ceux d'une plastification du matériau ;
- débouche sur une expression formelle de la charge ultime.

Il est illusoire d'espérer développer un modèle unique couvrant le voilement dans toute sa généralité. On imagine par contre assez bien de développer un modèle applicable à un type déterminé de sollicitation élémentaire.

■ À l'inverse des simulations numériques aux éléments finis, ces modèles n'ont, ni la vocation, ni la capacité de traduire l'évolution d'une plaque sous sollicitation croissante, jusqu'à l'atteinte de la charge ultime. Ils fournissent simplement des règles simples

susceptibles d'être incorporées aux normes de calcul des ouvrages en acier. Ils constituent d'ailleurs la **base des spécifications de la EN 1993-1-5** (se reporter au *Pour en savoir plus*).

En raison des simplifications ayant présidé à leur développement, ces modèles ne sauraient fournir des charges de ruine d'une extrême précision, mais ils permettent néanmoins une évaluation satisfaisante de ces dernières. C'est pourquoi ils ont d'abord dû être validés et ensuite calibrés sur base d'un ensemble de résultats expérimentaux, éventuellement complétés par ceux de simulations numériques conduites dans le cadre d'études paramétriques.

5.3 Comparaison des comportements respectifs d'un poteau et d'une plaque

La différence fondamentale entre le comportement d'un poteau et celui d'une plaque, en termes de relation charge ultime/charge critique, mérite d'être quelque peu explicitée. À cet effet, référons-nous aux situations servant habituellement de cas de référence, respectivement pour le flambement et le voilement, à savoir :

- le poteau à section uniforme articulé à ses deux extrémités, sans possibilité de déplacement transversal relatif entre ses extrémités et sollicité en compression uniforme ;
- la plaque rectangulaire d'épaisseur constante, simplement appuyée sur son pourtour et sollicitée en compression uniforme sur deux bords opposés.

5.3.1 Poteau soumis à compression uniforme

Dans d'autres dossiers ([41] [42]), on a souligné que le comportement d'un poteau élastique parfaitement droit (poteau idéal) est représenté par une trajectoire fondamentale d'équilibre jusqu'au point de bifurcation, puis par une trajectoire d'équilibre à l'état déformé, tellement plate qu'il est justifié d'y substituer une horizontale (ligne en trait noir de la figure 12).

■ Un défaut de rectitude initial d'amplitude q_0 a pour effet de rendre la trajectoire d'équilibre non linéaire dès le départ. Celle-ci tend néanmoins à rejoindre la trajectoire d'équilibre à l'état déformé du poteau rectiligne lorsque q_0 devient faible devant l'amplitude q de la flèche additionnelle (courbe en cyan de la figure 12).

■ Le comportement du poteau réel, donc doté d'un défaut de rectitude et de contraintes résiduelles et fait d'un matériau à limite d'élasticité finie, est représenté par la courbe cyan pointillée de la figure 12. Cette courbe se sépare de la trajectoire du poteau indéfiniment élastique lorsque la première plastification se produit et s'incurve d'autant plus que la plastification progresse et, donc, que la raideur flexionnelle de la section la plus sollicitée du poteau diminue.

Lorsque cette courbe passe par un maximum, on a atteint la charge ultime du poteau. Au-delà de celle-ci, il n'est plus possible de trouver une configuration déformée assurant encore l'équilibre du poteau.

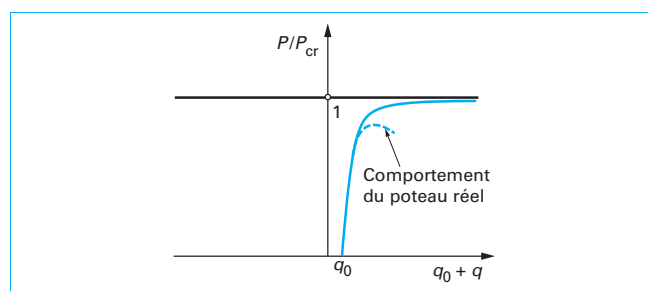


Figure 12 – Trajectoires d'équilibre pour le poteau sans, et avec défaut de rectitude

On constate que la *charge ultime de flambement* est *nécessairement inférieure* à la charge critique $\pi^2 EI/L^2$ dans une mesure qui dépend de l'élancement du poteau.

■ Pour un poteau d'élancement faible, l'instabilité est peu présente et la plasticité joue un rôle déterminant : la charge ultime N_R du poteau est largement inférieure à la charge critique. Les essais de flambement réalisés en laboratoire montrent que la valeur expérimentale de la charge ultime de poteaux de faible élancement peut, en raison de l'écroutissement, être supérieure à la résistance plastique en section. L'usage est, toutefois, de négliger les effets de l'écroutissement de sorte que la charge ultime N_R plafonne à la résistance plastique en section.

Il s'agit de la section brute, si les parois constitutives ne sont pas susceptibles de voiler localement, et d'une section réduite, dite « section efficace », dans le cas contraire.

■ Pour un poteau de grand élancement, le flambement se produit principalement dans le domaine élastique. La plastification et les imperfections ne jouent pour ainsi dire aucun rôle. La charge ultime N_R est proche de la charge critique N_{cr} et tend d'autant plus vers cette dernière que l'élancement du poteau croît.

■ C'est dans le domaine des **élancements moyens** que l'interaction entre plasticité et instabilité élastique est la plus marquée.

Ces tendances sont très bien illustrées par les **courbes européennes de flambement**. Une de celles-ci est représentée à la figure 13 en termes de coefficient de réduction au flambement $\chi = N_R/N_{pl}$ en fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda} = \sqrt{N_{pl}/N_{cr}}$ (appelé aussi « élancement relatif »).

5.3.2 Plaque soumise à compression uniforme

On pourrait, à première vue, imaginer qu'une plaque uniformément comprimée selon sa longueur (figure 4a) est constituée d'une série de poteaux adjacents comprimés axialement. La réponse structurale bi-axiale de la plaque (voir § 2) et la nécessaire compatibilité à assurer au voisinage des bords latéraux (non chargés) conduisent à invalider cette comparaison et expliquent la capacité à permettre la naissance d'efforts membranaires dans la direction perpendiculaire à celle de la compression appliquée.

Exemple. Pour illustrer ce fait, considérons d'abord une plaque idéale, donc sans défaut de planéité initial ($q_0 = 0$), dépourvue de contraintes résiduelles et faite d'un matériau indéfiniment élastique. Modélisons-la par un grillage de barres disposées orthogonalement. Sous l'effet d'une compression d'intensité suffisante, les barres longitudinales « flambent ». Elles prennent donc un déplacement par rapport à leur corde.

Par continuité, les barres transversales subissent, aux nœuds du réseau, les mêmes déplacements que les barres longitudinales (figure 14). Au premier ordre, les barres transversales ne sont pas directement sollicitées. En réalité, pour autant que leurs extrémités ne puissent librement se rapprocher – ce qui est toujours le cas parce que les bords sont systématiquement assujettis dans le plan de la plaque –, leur prise de flèche entraîne leur allongement et, donc, leur mise en traction membranaire (cf. figure 14).

■ On notera que cette traction membranaire ne survient que lorsque la plaque sort de son plan, donc lorsqu'elle voile. Une fois nés, les **efforts membranaires de traction**, agissant dans toute barre transversale, ont une résultante qui tend à s'opposer à une progression du déplacement transversal. Ils exercent ainsi un rôle stabilisateur et ont un effet favorable sur la capacité portante de la plaque.

■ La plaque se caractérise ainsi par une capacité à offrir un surcroît de résistance au-delà du seuil critique, dit **résistance postcritique**, d'autant plus appréciable que la plaque est élancée. Dès qu'elle manifeste une tendance au voilement, la plaque idéale adopte un mode de résistance fondamentalement différent de celui en

vigueur jusqu'à l'atteinte de la charge critique. Au point de bifurcation d'équilibre, la trajectoire fondamentale fait place à une trajectoire hautement non linéaire à l'état déformé (lignes en trait noir de la figure 15).

■ La **présence d'un défaut de planéité initial** d'amplitude q_0 ne modifie pas fondamentalement la conclusion précédente, mais entraîne un développement des efforts membranaires dès le début de la mise en charge. La trajectoire d'équilibre est au départ non linéaire [41]. Elle tend à rejoindre la trajectoire d'équilibre à l'état déformé de la plaque plane lorsque q_0 devient de plus en plus faible devant l'amplitude q de la flèche additionnelle (courbe en trait cyan de la figure 15).

■ Le **comportement de la plaque réelle**, donc dotée d'un défaut de planéité et de contraintes résiduelles et faite d'un matériau à limite d'élasticité finie, est représenté par la courbe cyan pointillée de la figure 15. Cette courbe se sépare de la trajectoire de la plaque élastique au moment où la première plastification se produit et

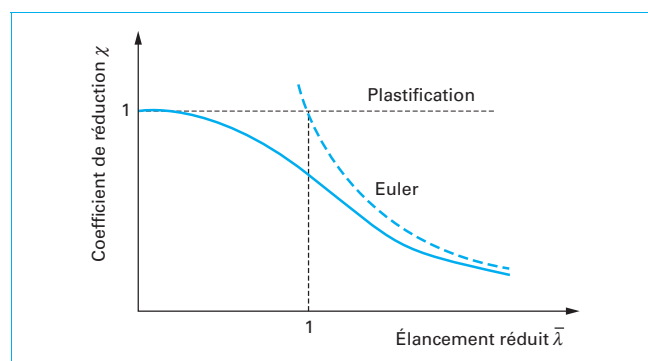


Figure 13 – Courbe de flambement type

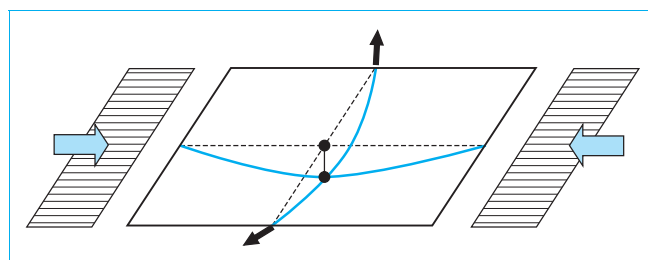


Figure 14 – Plaque rectangulaire en compression uniforme dans une configuration voilée

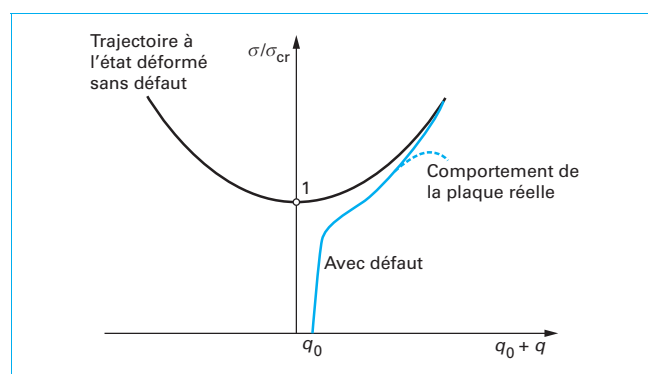


Figure 15 – Trajectoires d'équilibre pour plaque sans, et avec, défaut de planéité initial

s'incurve d'autant plus que la plastification progresse et, donc, que la raideur flexionnelle de la plaque diminue. Lorsque cette courbe passe par un maximum, on atteint la *charge ultime* de la plaque. Au-delà, il n'est alors plus possible de trouver une configuration déformée de la plaque assurant encore l'équilibre.

■ Tout comme dans un poteau, les imperfections ont un effet défavorable sur la capacité portante d'une plaque. Toutefois, contrairement au poteau, une plaque peut généralement mobiliser une **réserve de résistance postcritique**. On se trouve donc en présence d'effets antagonistes : la charge ultime d'une plaque peut être *tantôt inférieure, tantôt supérieure* à la charge critique dans une mesure qui dépend de l'élanement réduit $\bar{\lambda}_p$ de la plaque (figure 16).

- Dans le domaine des **élanements faibles** de plaque, les effets défavorables des imperfections et de la plastification prennent le pas sur les effets favorables du comportement postcritique ; la charge ultime est inférieure à la charge critique.

- À l'inverse, pour de **grands élanements**, les effets postcritiques l'emportent sur ceux des imperfections et de la plastification avec, pour résultat, une charge ultime supérieure – et parfois très largement supérieure – à la charge critique.

On montrera plus loin que la charge ultime d'une plaque élastique de grand élanement tend asymptotiquement vers une charge dite de « von Karman » [10] et donnée par $1/\bar{\lambda}_p$.

Lorsque la plaque voile, toutes les barres longitudinales n'ont plus la même raideur en raison d'une prise de courbure différente. Dès lors, la forme de la distribution des contraintes normales sollicitantes, par exemple à mi-longueur, ne subsiste pas : elle se creuse dans la zone des fibres comprimées les plus courbées, à savoir à mi-largeur, si la sollicitation était une compression uniforme. Cette manifestation n'est pas représentée à la figure 14, mais on revient plus loin sur ce point en examinant le modèle à la ruine (voir § 6.1).

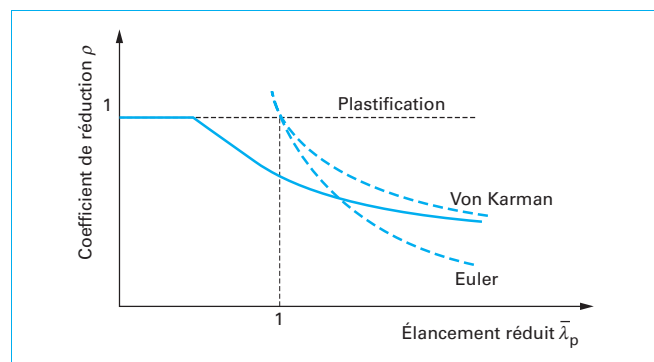


Figure 16 – Courbe de voilement type

5.3.3 Comportement type « plaque » ou « poteau »

Au § 5.3.2, on a souligné que le « comportement de type plaque » est caractérisé par une réserve de résistance postcritique. Dans un « comportement de type poteau », une telle réserve de résistance est, au contraire, inexistante.

Distinguer ces deux types de comportement est essentiel puisque cela influence la capacité portante.

Un poteau comprimé a, par essence, un comportement de type « poteau » car sa réponse structurale est toujours uni-axiale. À l'inverse, un élément structural répondant à la définition d'une plaque, telle qu'indiquée au § 1, ne présente pas nécessairement un comportement de type « plaque ».

Cet apparent paradoxe n'est toutefois que terminologique. Il va de soi qu'une plaque comprimée, dont les deux bords non chargés ne sont pas appuyés, voile, quel que soit son rapport d'aspect, selon une déformée proche d'une surface cylindrique (figure 17a).

De même, on conçoit aisément que la déformée de voilement d'une plaque comprimée, simplement appuyée sur tout son pourtour et de faible rapport d'aspect, est une surface majoritairement cylindrique. Seules les zones proches des bords non chargés présentent une courbure transversale significative (figure 17b).

Dans les deux cas, il est donc illusoire d'escompter des efforts membranaires transversaux de traction stabilisateurs dans la majeure partie de la plaque ; la plaque considérée a plutôt un comportement de type poteau.

Si la plaque est significativement raidie dans la direction de la compression, le caractère orthotrope exacerbe le comportement en poteau : celui-ci se manifestera déjà pour des rapports d'aspect plus élevés que si la plaque n'était pas raidie (figure 17c).

Il va sans dire que ces considérations illustrées pour le cas de compression uniforme, restent d'application pour toute distribution de contraintes normales uni-axiales comportant, au moins, une part de compression. Il importe dès lors de circonscrire les domaines dans lesquels, en pratique, le comportement d'une plaque est assimilé à un comportement respectivement de type « poteau » ou de type « plaque ». De la sorte, on obtiendra le domaine pour lequel le comportement est « intermédiaire » et, donc, plus favorable que le type « poteau », mais moins favorable que le type « plaque ».

À titre indicatif, la norme européenne EN 1993-1-5 indique les bornes suivantes :

- comportement de type poteau si $\sigma_{cr,p}/\sigma_{cr,c} \leq 1$;
- comportement de type plaque si $\sigma_{cr,p}/\sigma_{cr,c} \geq 2$.

avec $\sigma_{cr,p}$ contrainte critique de voilement de la plaque dans les conditions réelles d'appui et de sollicitation,
 $\sigma_{cr,c}$ contrainte critique de flambement d'une bande de plaque extraite de la plaque réelle dans la direction de la sollicitation.

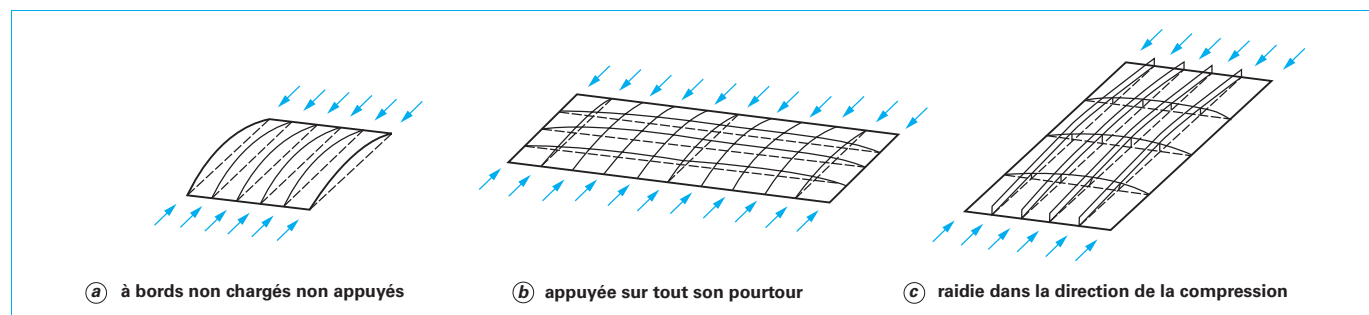


Figure 17 – Plaque à comportement de type « poteau »

Dans le domaine intermédiaire, à savoir $1 \leq \sigma_{cr,p}/\sigma_{cr,c} \leq 2$, la capacité portante est évaluée comme s'il s'agissait d'un mélange à deux phases, selon une sorte de relation d'interaction entre les capacités calculées, respectivement, en plaque et en poteau.

Les panneaux d'âme des poutres en I, soumises à cisaillement, ont toujours un comportement postcritique. La raison en est quelque peu différente mais elle sera commentée à l'occasion de la présentation des modèles à la ruine (voir § 6.2).

6. Modèles à la ruine pour le voilement des plaques

Les Eurocodes structuraux sont fondés sur le concept des états-limites.

Les **états-limites ultimes**, qui contrôlent la résistance, se réfèrent à des charges ultimes dont l'évaluation repose sur des modèles simplifiés appelés « modèles à la ruine ».

On a déjà précisé qu'un tel modèle est spécifique d'un type de sollicitation élémentaire.

■ On dispose aujourd'hui de **modèles** couvrant :

– une **distribution mono-axiale de contraintes normales**, pour laquelle on distinguera (pour des raisons historiques) :

- compression uniforme,
- flexion pure ;

– une **distribution de contraintes de cisaillement** (cisaillement pur) ;

– l'**action d'une charge transversale concentrée**.

■ Lorsque **plusieurs sollicitations élémentaires coexistent**, ce qui est assez souvent la règle, on évalue séparément les résistances ultimes de calcul. On les introduit, en même temps que les sollicitations de calcul correspondantes, dans une relation d'interaction qui joue le rôle d'un critère de résistance. Puis, on observe si celui-ci est satisfait, ou non.

Le recours à des relations d'interaction est donc similaire à ce que l'on a vu à propos des charges critiques. Toutefois, les relations d'interaction à la ruine ne sont pas identiques à celles appliquées au seuil critique parce qu'elles reflètent implicitement des paramètres additionnels : imperfections, plasticité, réserve postcritique.

6.1 Modèle pour sollicitation sous contraintes normales uni-axiales

Le premier modèle à la ruine a été développé pour la plaque rectangulaire simplement appuyée sur son pourtour et soumise à compression mono-axiale nominale uniforme. Le cas de la plaque parfaite a d'abord été examiné. Les effets des imperfections ont ensuite été incorporés par voie semi-empirique.

6.1.1 Plaque parfaite en compression uniforme

Lorsqu'une plaque parfaitement plane et dépourvue de contraintes résiduelles (plaque dite « parfaite ») voile élastiquement sous compression mono-axiale uniforme, la distribution des efforts membranaires sur la largeur de la plaque ne reste pas constante (figure 18). Elle se creuse en son milieu conformément au principe selon lequel la distribution des efforts se fait au prorata des raideurs.

À l'état post-voilé, les fibres longitudinales présentent en effet des courbures variables selon leur position en travers de la plaque. Les fibres proches des bords latéraux restent sensiblement

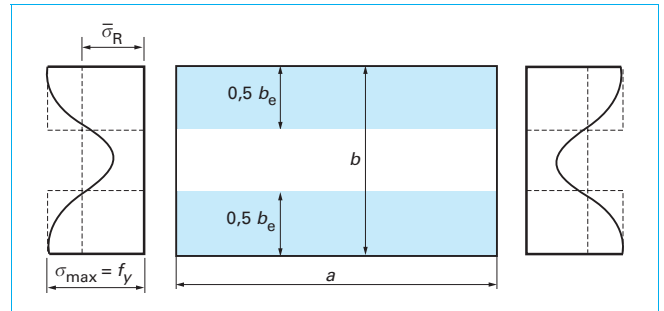


Figure 18 – Distribution des contraintes à l'état post-voilé

rectilignes tandis que la plus grande courbure est prise par les fibres proches de la mi-largeur. Comme les bords chargés sont supposés se rapprocher, tout en restant droits et parallèles, toutes les fibres longitudinales ont la même corde. La raideur axiale d'une fibre est mesurée par l'effort requis pour produire un raccourcissement unitaire ou bien, ce qui est équivalent, par l'inverse du raccourcissement produit par un effort unitaire.

Sous un effort unitaire, la corde d'une fibre courbe subit d'abord un raccourcissement de type $1/aEA$, égal au seul raccourcissement d'une fibre rectiligne. Mais, comme cette fibre courbe – que l'on suppose maintenant indéformable axialement – offre un bras de levier à l'effort de compression sollicitant, elle voit sa courbure s'accroître et sa corde se raccourcir complémentirement. Sous un effort unitaire, la corde de la fibre courbe subit donc un raccourcissement supérieur à la fibre rectiligne de même longueur. La fibre courbe a une raideur axiale moindre que la fibre rectiligne.

On conclut donc assez paradoxalement qu'une plaque dite « soumise à compression uniforme » ne l'est plus dès que la plaque voile (ce serait le cas dès le début du chargement, si la plaque présentait un défaut de planéité initial). Dans la mesure où, aux fins d'une vérification élastique, la contrainte membranaire maximale σ_{max} – qui se produit ici aux bords non chargés – est déterminante, l'idée est venue de substituer à la distribution réelle (non uniforme) des contraintes une distribution uniforme d'intensité égale à la contrainte de bord σ_{max} et de même résultante. Ceci entraîne que la contrainte σ_{max} s'applique à une largeur moindre que la largeur physique b , appelée **largeur efficace** b_e .

En raison de la symétrie du problème, il est logique de la répartir en deux parts identiques $b_e/2$ attachées, respectivement, aux deux bords latéraux (figure 18).

■ Il revient à von Karman [10] d'avoir établi l'expression de la **largeur efficace** dans les conditions précitées (compression uniforme, plaque simplement appuyée sur son pourtour). Il a simplement posé que la charge critique de voilement $\sigma_{cr,be}$ de la plaque fictive, de même rapport d'aspect que la plaque réelle mais de largeur b_e , est égale à la contrainte maximale de bord σ_{max} .

■ L'**état-limite ultime** est conventionnellement atteint lorsque σ_{max} est égal à la limite d'élasticité f_y . On aboutit ainsi à :

$$\frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} \quad (36)$$

En désignant par $\bar{\sigma}_R$ la contrainte moyenne à la ruine sur la largeur b , l'égalité des résultantes des contraintes entraîne :

$$\frac{b_e}{b} = \frac{\bar{\sigma}_R}{f_y} \quad (37)$$

Ce qui, combiné à (36), fournit à l'état-limite :

$$\bar{\sigma}_R = \sqrt{\sigma_{cr} f_y} \quad (38)$$

■ La **contrainte moyenne de ruine** est clairement la moyenne géométrique entre la contrainte critique élastique de voilement et la limite d'élasticité du matériau constitutif.

■ En définissant l'élancement réduit de plaque $\bar{\lambda}_p$ de manière similaire à ce qui est fait pour le flambement, on a avec, cette fois, σ_{cr} représentant la **contrainte critique de voilement** :

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (39)$$

Ce qui, compte tenu de (18) et (19) peut aussi s'écrire pour l'acier ($\nu = 0,3$) :

$$\bar{\lambda}_p = \frac{1,05}{\sqrt{k_\sigma}} \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (40)$$

Ou, plus précisément, dans le cas traité de compression uniforme et de pourtour simplement appuyé ($k_\sigma = 4$) :

$$\bar{\lambda}_p = 0,525 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (41)$$

De même que :

$$b_e = 1,9t \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (42)$$

Combinant (36) et (39) conduit à la **formule dite de « von Karman »** (bien que ce dernier ne l'ait pas écrite exactement sous cette forme) [10] :

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \quad (43)$$

6.1.2 Plaque imparfaite en compression uniforme

On sait que les imperfections, tant géométriques (défaut de planéité), que structurales (contraintes résiduelles) ont un effet défavorable sur la contrainte moyenne ultime $\bar{\sigma}_R$ ou, ce qui est équivalent, sur la largeur efficace b_e . Cet effet est le plus significatif dans le domaine des élancements réduits moyens, soit sensiblement dans le domaine $0,65 < \bar{\lambda}_p < 1,5$. Diverses tentatives ont été faites de le traduire au travers d'une simple modification de la formule originale de von Karman.

■ Sur base d'essais de compression sur des panneaux en tôle mince pliée à froid, **Winter** [11] a proposé la relation suivante :

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} - \frac{0,19}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad (44)$$

Le premier terme du second membre n'est autre que l'expression de von Karman, de sorte que le second terme représente la pénalisation due aux imperfections. Cette correction a une base strictement empirique. À la lumière d'un plus grand nombre de résultats expérimentaux, Winter a été ultérieurement amené à juger cette proposition trop peu sécuritaire et à la réaménager selon [12] :

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad (45)$$

■ Une autre tentative faite par **Faulkner** [13] sur la base de résultats d'essais sur panneaux de bordage de navire, a conduit à une expression légèrement différente :

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1,052}{\bar{\lambda}_p} - \frac{0,276}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad (46)$$

Et dans laquelle le premier terme n'est pas exactement celui de von Karman. Les relations (45) et (46) ne diffèrent sensiblement que dans la zone de faibles élancements ($\bar{\lambda}_p \leq 0,70$). Il s'avère que l'expression (45) de Winter a prévalu lors de la préparation des Eurocodes.

Rappelons qu'en compression uniforme la largeur efficace est répartie par moitiés attachées, respectivement, aux deux bords latéraux de la plaque.

6.1.3 Plaque imparfaite soumise à distribution linéaire de contraintes normales

L'expression (45), développée pour la compression uniforme, a été généralisée au cas d'une distribution linéaire de contraintes normales (figure 19) sous réserve que la largeur concernée soit celle de la seule zone comprimée (d'où l'indice c) :

$$\frac{b_{c,e}}{b_c} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad (47)$$

La zone en traction – si elle existe – est comptabilisée comme pleinement efficace, puisque nullement en danger d'instabilité de voilement.

La distribution des contraintes, caractérisée par le facteur ψ , rapport des contraintes extrêmes sur la largeur totale b de la plaque :

$$\psi = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (48)$$

est *implicitement* présente dans l'élancement réduit $\bar{\lambda}_p$, puisque la contrainte critique en dépend.

6.1.4 Procédure normative de la EN 1993-1-5

Il ne fait pas de doute que les effets des imperfections sont moins importants si toutes les fibres ne sont pas également comprimées. Il a dès lors été suggéré d'adopter pour les plaques appuyées sur tout leur pourtour [14] :

$$\rho = \frac{b_{c,e}}{b_c} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} - \frac{0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad (49)$$

et dans laquelle le facteur ψ intervient cette fois à deux niveaux :

- *implicitement* au travers de $\sigma_{cr}(\psi)$, et donc de $\bar{\lambda}_p$;
- *explicitement* au numérateur du terme de pénalisation de (49).

On notera qu'en compression uniforme ($\psi = 1$), l'expression (49) se ramène strictement à (45).

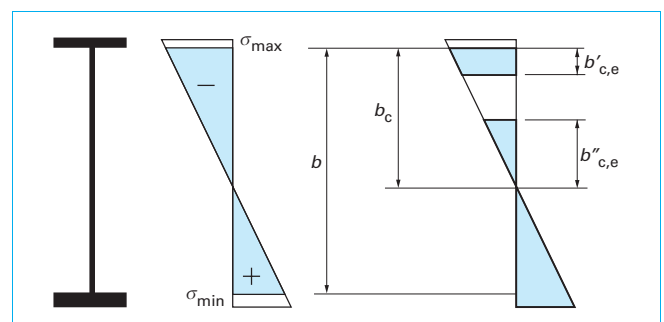


Figure 19 – Allocation de la largeur efficace

Il importe aussi de répartir $b_{c,e}$ en deux parts, $b'_{c,e}$ et $b''_{c,e} \geq b'_{c,e}$, qui sont respectivement attachées aux fibres extrêmes de la zone comprimée. La perte d'efficacité croît avec l'intensité de la compression. La part la moins importante, soit $b'_{c,e}$, est donc affectée à la fibre la plus comprimée, tandis que la part la plus importante, soit $b''_{c,e}$, l'est à la fibre la moins comprimée (figure 19).

■ **Pour une plaque supportée sur ses deux bords non chargés**, la version provisoire de l'Eurocode 3, à savoir la ENV 1993-1-1 (à consulter dans le *Pour en savoir plus*), se réfère à la relation (47), mais la norme européenne EN 1993-1-5 adopte désormais l'expression (49).

■ **Pour les plaques présentant un bord libre** (cas des demi-semelles des sections en I), la ENV 1993-1-1 se réfère à (47). Dans la norme européenne EN 1993-1-5, la formulation est légèrement différente : à l'arrondi près, elle n'est autre que celle proposée initialement par Winter (voir (44)) :

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1}{\lambda_p} - \frac{0,188}{\lambda_p^2} \leq 1 \quad (50)$$

Les règles de répartition de la largeur efficace de la zone comprimée ne sont pas détaillées ici. À cet effet, on renvoie le lecteur au dossier traitant des poutres à âme pleine élançée (consulter la liste figurant dans le *Pour en savoir plus*).

6.2 Modèle pour sollicitation de cisaillement

Comme pour les plaques comprimées, de nombreuses investigations ont été menées en vue de dégager des méthodes simples, et relativement précises, pour l'évaluation de la résistance ultime en cisaillement des poutres à âme pleine élançée.

6.2.1 Rétrospective des modèles

■ **En 1916, Rode** fait une toute première tentative d'exploiter la résistance postcritique en cisaillement dans les poutres en I. Son approche est purement empirique et n'est pas validée par des essais en laboratoire. Elle consiste à remplacer l'âme continue par une *bande diagonale tendue de largeur prise forfaitairement égale à 50 fois l'épaisseur de l'âme* (figure 20a). Cette proposition n'a guère de retentissement.

■ Une dizaine d'années plus tard, **en 1928, Wagner** examine expérimentalement le comportement de panneaux de tôle très mince, et donc de raideur flexionnelle négligeable, soumis à cisaillement dans leur plan. Il propose un modèle de *champ diagonal complet*, dans lequel la tôle cisailée est assimilée à un système de barres pseudo-diagonales tendues couvrant tout l'espace du panneau, tandis que la contrainte principale, selon la direction perpendiculaire, est nulle (figure 20b).

Si ce modèle est trouvé en accord satisfaisant avec les résultats d'essais pour des panneaux très minces et à pourtour très peu déformable en raison de la présence de panneaux adjacents – situations rencontrées dans les fuselages des constructions aéronautiques –, il convient par contre assez mal pour les poutres de pont.

■ **En 1937, Schapitz** reprend l'idée de Wagner en ne considérant cette fois qu'un *champ diagonal incomplet*, c'est-à-dire ne couvrant qu'une partie du panneau.

■ **En 1952, Kuhn** procède à une synthèse des diverses propositions de champs diagonaux et il discute en détail les facteurs qui gouvernent l'étendue de ceux-ci.

■ Il faut attendre la **fin des années cinquante** pour voir s'élaborer le premier modèle conçu dans le contexte de poutres du génie civil. On le doit à **Basler** [15]. Celui-ci postule que, lorsque les semelles

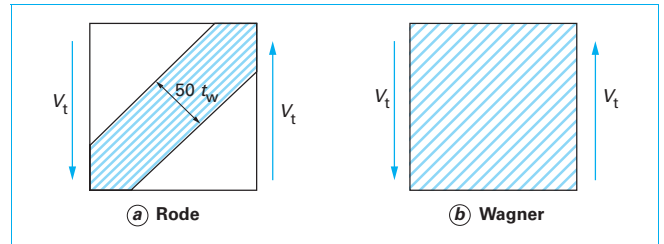


Figure 20 – Modèles de Rode et de Wagner

sont souples en flexion dans le plan de l'âme, une borne inférieure de la résistance est obtenue en considérant qu'une bande de traction pseudo-diagonale d'inclinaison ϕ , s'ancrant sur les raidisseurs transversaux, se développe dès que la tôle a voilé sous sa charge critique de cisaillement.

La charge ultime est donc obtenue par la somme de la charge critique V_{cr} et d'une réserve postcritique V_t fournie par le modèle proposé (figure 21) :

$$V_R = V_{cr} + V_t \quad (51)$$

avec

$$V_{cr} = b t_w \tau_{cr} \quad (52)$$

$$V_t = g t_w \sigma_t \sin \phi \quad (53)$$

La ruine est identifiée à l'atteinte du critère de plasticité de von Mises dans la bande pseudo-diagonale pour l'état de contraintes complexe résultant de la superposition des états relatifs aux deux phases de comportement. De cette condition, on déduit la contrainte de traction σ_t dans la bande pseudo-diagonale selon :

$$\sigma_t = \sqrt{f_{yw}^2 - \tau_{cr}^2 \left[3 - \left(\frac{3}{2} \sin 2\phi \right)^2 \right]} - \frac{3}{2} \tau_{cr} \sin 2\phi \quad (54)$$

avec t_w épaisseur de la tôle d'âme,
 f_{yw} limite d'élasticité du matériau de l'âme.

L'inclinaison ϕ était déterminée en maximisant l'expression de la charge ultime :

$$\frac{\partial V_R}{\partial \phi} = 0 \quad (55)$$

La transcription analytique de (55) est malaisée. La solution par essais et erreurs, donc itérative, est dès lors recommandée. Quant à la largeur g de la bande de traction pseudo-diagonale, elle s'obtient par simple relation géométrique :

$$g = b \cos \phi - a \sin \phi \quad (56)$$

Tout ce qui est nécessaire au calcul de V_t est dès lors connu. Basler valide son modèle sur la base d'un très petit nombre d'essais sur poutres à âme élançée. Si un bon accord est observé dans le cas de semelles souples, le modèle sous-estime, par contre, la résistance ultime lorsque les semelles ont une grande raideur flexionnelle.

■ **Dans les deux décennies qui suivent**, de nombreux auteurs tentent d'améliorer le modèle de Basler en imaginant d'ancrer partiellement la bande pseudo-diagonale de traction sur les semelles (figure 22) dans une mesure croissant avec la raideur flexionnelle des semelles.

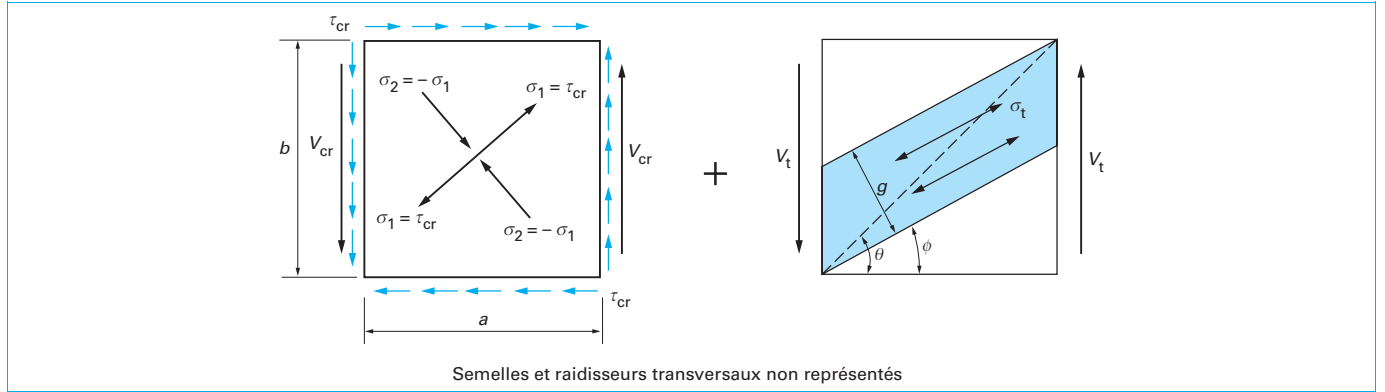


Figure 21 – Modèle de Basler

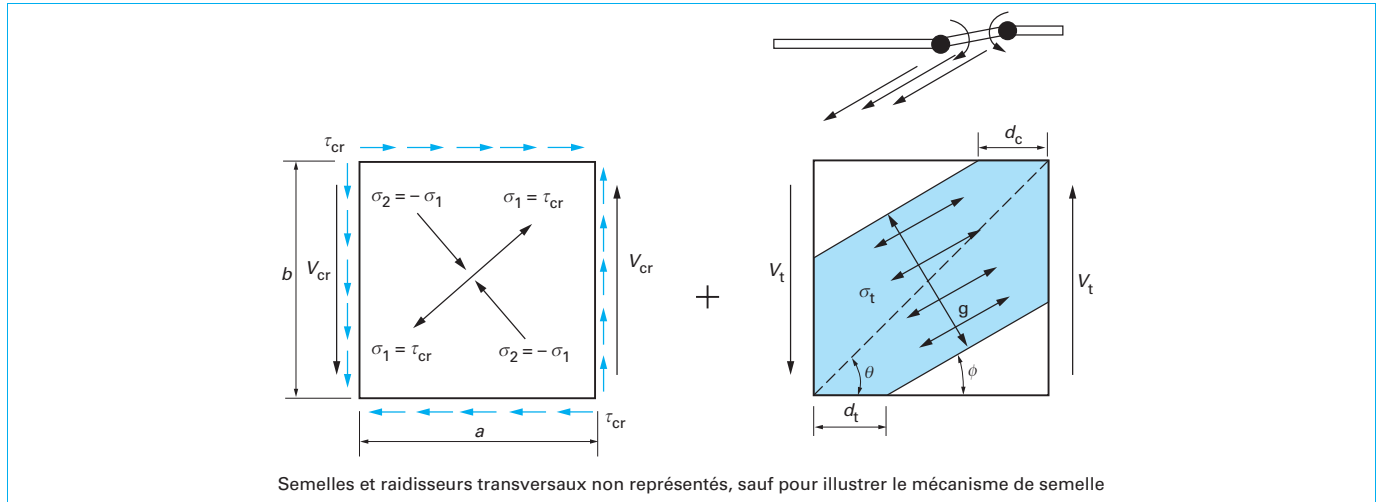


Figure 22 – Modèle de Prague-Cardiff

■ De ces tentatives, le modèle dit de « **Prague-Cardiff** » ([16] [17]) allie le mieux simplicité et précision. Il fait appel aux relations précédentes sous réserve d'écrire désormais la largeur de la bande pseudo-diagonale selon :

$$g = b \cos \phi - a \sin \phi + (d_c + d_t) \sin \phi = [b(\cot \phi - \cot \theta) + (d_c + d_t)] \sin \phi \quad (57)$$

Dans cette relation, d_c et d_t désignent les longueurs d'ancrage sur les semelles. Elles se déduisent de la formulation d'un mécanisme à rotules plastiques dans une semelle sous l'effet des contraintes σ_t qui viennent la solliciter (partie supérieure de la figure 22).

Désignant par $M_{pl,c}^{red}$ et $M_{pl,t}^{red}$ les moments plastiques respectifs des semelles respectivement comprimée (indice c) et tendue (indice t), réduits au besoin par les effets des efforts axiaux $N_{f,c}$ et $N_{f,t}$ qui y naissent en raison de la flexion d'ensemble de la poutre, soit :

$$M_{pl,c}^{red} = f_{yf} \frac{b_{f,c} t_{f,c}^2}{4} \left[1 - \left(\frac{N_{f,c}}{f_{yf} b_{f,c} t_{f,c}} \right)^2 \right] \quad (58)$$

$$M_{pl,t}^{red} = f_{yf} \frac{b_{f,t} t_{f,t}^2}{4} \left[1 - \left(\frac{N_{f,t}}{f_{yf} b_{f,t} t_{f,t}} \right)^2 \right]$$

avec f_{yf} limite d'élasticité du matériau constitutif des semelles.

Les distances d_c et d_t s'écrivent :

$$d_c = \frac{2}{\sin \phi} \sqrt{\frac{M_{pl,c}^{red}}{\sigma_t t_w}} \leq a \quad (59)$$

$$d_t = \frac{2}{\sin \phi} \sqrt{\frac{M_{pl,t}^{red}}{\sigma_t t_w}} \leq a$$

■ Le modèle de Prague-Cardiff a été repris dans la **version provisoire ENV 1993-1-1 de l'Eurocode** sous l'appellation de *méthode de la bande (pseudo-diagonale) de traction*. Sa mise en œuvre y est toutefois facilitée. En effet, des études paramétriques montrent que l'évolution de V_t en fonction de ϕ est assez plate au voisinage de son maximum. Dès lors, une erreur même significative sur ϕ n'entraîne qu'une faible sous-estimation de V_t et justifie, afin d'éviter toute procédure itérative, d'adopter forfaitairement $\phi = 2/3\theta$, où θ est l'inclinaison de la diagonale géométrique.

■ **Le modèle de Prague-Cardiff a toutefois ses limites.** Il ne comporte aucune restriction sur l'inclinaison de la bande pseudo-diagonale de sorte que celle-ci diminue continûment lorsque la longueur du panneau augmente. Or, on observe que, dans un panneau très long, des cloques de voilement se développent de manière à définir des champs de voilement individuels de rapport d'aspect valant

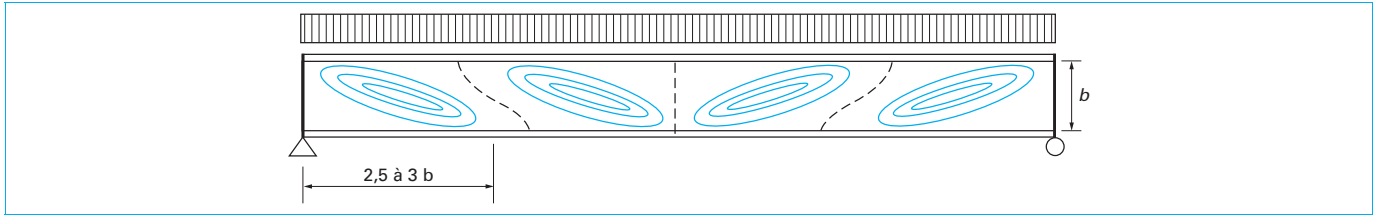


Figure 23 – Champs de voilement « naturels » sous cisaillement dans une poutre non raidie

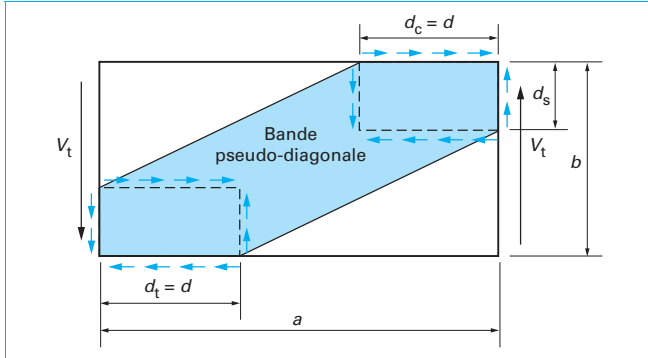


Figure 24 – Modèle postcritique simple (semelles non représentées)

sensiblement 2,5 à 3 (figure 23). C'est pourquoi l'application de la *méthode de la bande pseudo-diagonale de traction* était recommandée pour les rapports d'aspect n'excédant pas 3 ; l'appliquer au-delà eût été indûment pénalisant.

■ Plutôt que de borner supérieurement le rapport d'aspect pris en compte dans le modèle de bande pseudo-diagonale, un second modèle connu sous l'appellation de **méthode postcritique simple, due à Dubas** ([18], [19]) a été introduit dans la version provisoire de l'Eurocode 3. Son utilisation était préconisée pour des rapports d'aspect dépassant 3. Ici encore, on imagine qu'un comportement en pseudo-bande diagonale de traction prend place après que la charge critique V_{cr} ait été atteinte. Toutefois, cette bande est ancrée par des goussets fictifs (figure 24) dont le rapport d'aspect est égal à celui du panneau. Ces goussets sont supposés voiler en cisaillement pour une contrainte critique $\tau_{cr,g}$ égale à la limite d'élasticité en cisaillement du matériau de l'âme, soit $f_{yw}/\sqrt{3}$. On a ainsi :

$$\frac{d_s}{b} = \frac{d}{a} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_{yw}} \quad (60)$$

La contribution du gousset $V_{t,g}$ à la résistance ultime est obtenue en exprimant que la contrainte résultante de cisaillement dans le gousset, en ce compris τ_{cr} , atteint τ_{yw} :

$$V_{t,g} = d_s t_w (\tau_{yw} - \tau_{cr}) \quad (61)$$

La résistance ultime au cisaillement obtenue selon :

$$V_R = V_{cr} + V_{t,g} \quad (62)$$

ne peut toutefois excéder la résistance plastique à l'effort tranchant :

$$V_{yw} = b t_w \tau_{yw} = b t_w \frac{f_{yw}}{\sqrt{3}} \quad (63)$$

Elle s'écrit explicitement :

$$V_R = b t_w \sqrt{\tau_{cr} \tau_{yw}} \left[1 + \left(\sqrt{\tau_{cr} / \tau_{yw}} - \tau_{cr} / \tau_{yw} \right) \right] \leq V_{yw} \quad (64)$$

Le premier terme du second membre de (64) correspond à l'expression de von Karman (voir plus haut). Les autres termes correspondent à une majoration de résistance. Pour les panneaux d'âme aux extrémités des poutres, le gousset extérieur n'est pas contribué par un panneau d'âme adjacent et, à défaut de raidisseurs d'extrémité infiniment rigides, son rôle ne saurait qu'être moins favorable. C'est pourquoi V_R fut finalement réduit à :

$$V_R = 0,9 b t_w \sqrt{\tau_{cr} \tau_{yw}} \leq V_{yw} \quad (65)$$

6.2.2 Procédure normative de la EN 1993-1-5

Si la version provisoire ENV 1993-1-1 de l'Eurocode avait recours à des modèles complémentaires, à savoir le modèle de la bande pseudo-diagonale et la méthode postcritique simple, la norme européenne comporte un modèle unique. Celui-ci, connu sous l'appellation du *modèle du champ tournant* dont on trouve les bases dans [20], traduit toujours l'existence d'une réserve de résistance postcritique en cisaillement procurée par un fonctionnement en bande pseudo-diagonale de traction. Il repose sur l'hypothèse fondamentale de l'inexistence d'efforts membranaires normaux à l'interface entre l'âme et les semelles, ce qui se vérifie assez largement pour les poutres longues qui ne comportent pas de raidisseurs transversaux, si ce n'est aux appuis d'extrémité.

■ Après l'atteinte de la contrainte critique de voilement en cisaillement, les **contraintes principales de compression** σ_2 (cf. figure 22) ne peuvent plus augmenter, tandis que les contraintes membranaires de traction peuvent le faire jusqu'à ce que la résistance ultime soit atteinte. Dans ces conditions, l'équilibre exige la rotation du champ de contraintes. Lorsque les contraintes principales de traction augmentent, l'angle ϕ doit décroître pour des raisons d'équilibre. Les contraintes principales valent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\tau}{\tan \phi} \\ \sigma_2 &= -\tau \tan \phi \end{aligned} \quad (66)$$

■ En limitant σ_2 à la valeur $(-\tau_{cr})$ et introduisant les expressions ci-dessus des contraintes principales dans le critère de plastification de von Mises :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = f_{yw}^2 \quad (67)$$

On tire de ce dernier la **valeur de la contrainte de cisaillement ultime** τ_R qui, normalisée par rapport à la limite d'élasticité en cisaillement $f_{yw}/\sqrt{3}$, s'écrit :

$$\frac{\tau_R}{f_{yw}/\sqrt{3}} = \frac{1}{\bar{\lambda}_w^2} \sqrt{\left(3\bar{\lambda}_w^4 - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2}} \quad (68)$$

Avec l'élanement réduit de la plaque pour le voilement en cisaillement :

$$\bar{\lambda}_w = \sqrt{\frac{f_{yw}/\sqrt{3}}{\tau_{cr}}} = 0,76 \sqrt{\frac{f_{yw}}{\tau_{cr}}} \quad (69)$$

■ Pour de grands rapports d'aspect (soit $\bar{\lambda}_w \geq 2,5$), la résistance ultime réduite devient :

$$\frac{\tau_R}{f_{yw}/\sqrt{3}} = \frac{1,32}{\bar{\lambda}_w} \quad (70)$$

Cette relation, à base strictement théorique, néglige les effets des imperfections et toute contribution des semelles. Elle ne peut donc être reprise comme telle dans les normes et codes européens.

■ Dans la norme européenne EN 1993-1-5, la résistance ultime à l'effort tranchant s'obtient par addition de deux contributions respectivement de l'âme, V_{bw} , et des semelles, V_{bf} , d'où :

$$V_R = V_{bw} + V_{bf} \leq \frac{\eta f_{yw} b t_w}{\sqrt{3}} \quad (71)$$

La contribution de l'âme V_{bw} est donnée par :

$$V_{bw} = \frac{\chi_w f_{yw} b t_w}{\sqrt{3}} \quad (72)$$

Le facteur de réduction χ_w est fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}_w$ défini en (69). Il ne saurait être donné par (68) sous peine d'ignorer les effets des inévitables imperfections. Il est dès lors établi par calibration sécuritaire vis-à-vis des résultats d'essais disponibles. Une distinction est toutefois faite entre raidisseurs d'extrémité respectivement rigides et souples ; un bonus est attribué aux premiers parce qu'ils permettent de mobiliser une plus grande hauteur d'ancrage de la bande pseudo-diagonale de traction dans le comportement postcritique. Plus de détails à ce sujet sont fournis dans le dossier consacré aux grandes poutres à âme élancée (voir le *Pour en savoir plus*).

■ La contribution des semelles V_{bf} dérive encore d'un **mécanisme à rotules plastiques** (voir plus haut) qui se formerait dans les semelles sous l'action des efforts membranaires qui se développent dans la bande pseudo-diagonale de traction dans le stade postcritique :

$$V_{bf} = \frac{4M_{pl,f}}{c} = \frac{b t_f^2 f_{yf}}{c} \quad (73)$$

avec $M_{pl,f}$ moment plastique des semelles de largeur b_f et d'épaisseur t_f .

La longueur d'ancrage, sur les semelles, de la bande pseudo-diagonale est notée ici c ; son expression repose sur une base semi-empirique [20] :

$$c = a \left(0,25 + 1,6 \frac{M_{pl,f}}{M_{pl,w}} \right) \quad (74)$$

avec $M_{pl,w}$ moment plastique de l'âme.

Pour des semelles de section rectangulaire, l'expression (74) prend la forme explicite :

$$c = a \left(0,25 + \frac{1,6 b t_f^2 f_{yf}}{b^2 t_w f_{yw}} \right) \quad (75)$$

avec b et t_w dimensions de l'âme.

La borne supérieure de l'expression (71) n'est autre que la résistance à l'effort tranchant d'une plaque très peu élancée. On y attendrait volontiers la résistance plastique. Dès lors que, dans l'Eurocode EN 1993-1-5, il est recommandé de prendre $\eta = 1,2$, si la nuance d'acier n'excède pas S460, on prend donc implicitement en compte l'écrouissage du matériau pour les aciers d'usage courant. La diminution de la ductilité du matériau avec l'accroissement de la nuance d'acier justifie que, de manière sécuritaire, la valeur $\eta = 1,0$ soit conservée pour les nuances supérieures à S460.

Le moment plastique des semelles $M_{pl,f}$ intervenant dans (73) doit éventuellement être réduit en présence d'efforts axiaux concomitants. Dans la EN 1993-1-5, cette contribution est alors à multiplier par un facteur de pénalisation simple pris égal à :

$$\left(1 - \left(\frac{M_{Ed}}{M_{fRd}} \right)^2 \right) \quad (76)$$

avec M_{Ed} moment sollicitant de calcul dans le panneau considéré, M_{fRd} moment résistant de calcul de la section composée de ses seules semelles.

Très souvent, la contribution des semelles est suffisamment faible devant la contribution de l'âme pour être négligée. Elle peut néanmoins être significative lorsque de fortes semelles ne sont pas entièrement mobilisées pour la résistance à la flexion, ce qui se rencontre notamment au voisinage des appuis d'extrémité.

6.3 Modèle pour voilement sous charge concentrée

Depuis les années 1950, un grand nombre d'études ont été menées relatives à la charge critique d'une plaque soumise, dans son plan, à une charge transversale concentrée. Par ailleurs, de très nombreux essais ont été effectués en vue de valider les propositions successives de fonctions de résistance pour ce type de sollicitation.

D'empirique au début, la base de celles-ci devient semi-empirique vers les années 1970 puisqu'elles recourent à un modèle physique qui est ensuite corrigé pour mieux être en accord avec les résultats expérimentaux, ou ceux de simulations numériques aux éléments finis.

Il faut dire que le problème est complexe. Par souci de simplicité, on distingue les modes de ruine dus, respectivement, à la plastification locale, au voilement et au défoncement de l'âme (figure 25).

En réalité, il n'y a pas de nette différence entre défoncement et voilement, mais plutôt une modification progressive du mode de voilement. Normalement, le mode de voilement apparaît en premier, mais est suivi d'un défoncement localisé sous la charge à l'approche de la charge ultime.

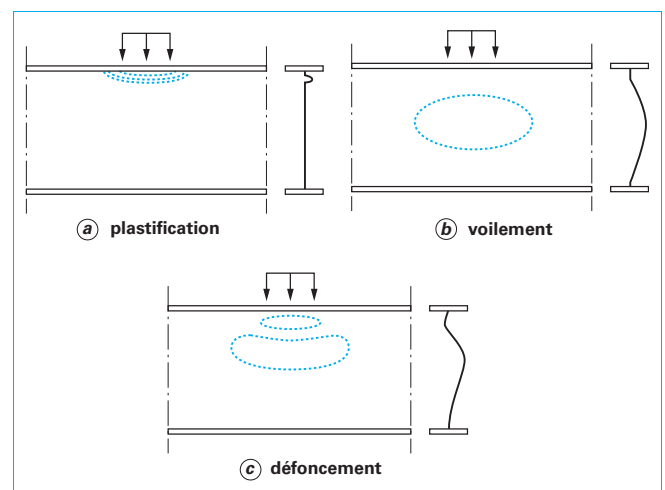


Figure 25 – Modes de ruine schématisques pour une poutre soumise à charge concentrée

Le mode de ruine réel dépend essentiellement de la géométrie de la section transversale. Généralement, à de grandes valeurs du rapport t_f/t_w correspond une ruine par voilement, ou défoncement tandis que la plastification est plutôt déterminante pour de faibles valeurs de t_f/t_w .

Par ailleurs, une âme compacte est plus susceptible de plastifier, tandis qu'une âme élancée est plus sujette au voilement.

Tous les essais de laboratoire semblent indiquer que la résistance ultime à une charge concentrée est pratiquement indépendante de la hauteur d'âme h_w , alors qu'elle est plus ou moins proportionnelle au carré de l'épaisseur d'âme t_w et est influencée par la limite d'élasticité f_{yw} du matériau de l'âme et, dans une moindre mesure, par la longueur de distribution et la raideur flexionnelle de la semelle.

Au milieu des années 1990, une synthèse de tous ces travaux est menée par Lagerqvist [6]. Elle couvre les très nombreux essais de laboratoire, les travaux relatifs à la détermination de la charge critique (charge concentrée) et les propositions faites jusqu'alors de formules de charge ultime. Une version légèrement simplifiée de cette méthode est adoptée dans la EN 1993-1-5. Désormais, cette vérification unique est substituée à la triple vérification qui était requise dans la ENV 1993-1-1 (voir le *Pour en savoir plus*).

6.3.1 Rétrospective des modèles

Plutôt que de présenter une évolution chronologique du modèle de résistance ultime à une charge transversale concentrée, il semble plus pertinent de présenter les divers modèles proposés au cours du temps selon qu'ils sont de nature empirique ou, au contraire, fondés sur une approche de mécanisme à rotules plastiques.

6.3.1.1 Modèles empiriques

■ **En 1960**, sur la base de 11 résultats d'essais sur poutres en I, Granholm [21] conclut à un phénomène local, donc indépendant de la hauteur d'âme, et propose :

$$F_R = 0,85t_w^2 \quad (77)$$

avec t_w à exprimer en millimètres pour obtenir la charge en tonnes.

■ **Un peu plus tard**, Bergfelt [22] suggère l'expression adimensionnelle :

$$F_R = 0,045Et_w^2 \quad (78)$$

qu'il améliore ensuite en :

$$F_R = 0,045Et_w^2 \left(0,55 + 0,22 \frac{t_f}{t_w} \right) \quad (79)$$

pour tenir compte de l'influence des semelles, tout en conservant sa première expression (78) comme borne inférieure.

■ Les influences de la longueur de distribution s_s et de la limite d'élasticité f_{yw} sont pour la première fois prises en compte par Skaloud et Drdacky [23] au terme d'essais sur poutres dont la minceur d'âme h_w/t_w va jusqu'à 400 :

$$F_R = 0,55t_w \left(0,9t_w + 1,5s_s \frac{t_w}{h_w} \right) \sqrt{Ef_{yw}} \sqrt{\frac{t_f}{t_w}} \quad (80)$$

■ **En 1976**, Bergfelt [24] présente une méthode validée par environ 100 résultats d'essais et couvrant, d'une part, la plastification (indice γ = « yielding ») dans le domaine $t_f/t_w < 2$:

$$F_{R,\gamma} = 13\eta t_w f_{yw} f(s_s) \quad (81)$$

et, d'autre part, le défoncement (indice c = « crippling ») :

$$F_{R,c} = 0,6t_w^2 \sqrt{Ef_{yw}} \left(1 + 0,4 \frac{t_f}{t_w} \right) f(s_s) \quad (82)$$

avec η dépendant de t_f/t_w , $f(s_s)$ et variant de 1 et 1,3 selon la longueur chargée s_s , t_f épaisseur dite « efficace » à substituer à t_f lorsque b_f/t_f dépasse 25 :

$$t_f = \sqrt[4]{\frac{b_f t_f^3}{25}} \quad (83)$$

■ Pour sa part, en 1983, Elgaaly [25] avance l'expression :

$$F_R = 0,5t_w^2 \sqrt{Ef_{yw}} \sqrt{\frac{t_f}{t_w}} \quad (84)$$

sous réserve de $s_s/h_w < 1/3$.

■ Sur la base des résultats de 170 essais, Drdacky [26] calibre une formule négligeant l'influence de la hauteur d'âme h_w , tout en précisant qu'elle doit être affectée d'un facteur de correction pour de faibles valeurs de la minceur h_w/t_w .

$$F_R = 19,54t_w^2 f_{yw} \left(1 + 0,004 \frac{s_s}{t_w} \right) \left(\frac{b_f t_f^3}{12t_w^4} \right)^{0,10} \quad (85)$$

■ **En 1990**, Spinassas [27] entame une étude paramétrique aux éléments finis. Il adopte t_w , t_f , b_f , a/h_w , f_{yw} et s_s comme paramètres et déduit une formule de résistance paramétrée basée purement sur la calibration :

$$F_R = KE^{0,3} f_{yw}^{0,7} t_w^{1,53} \left(\frac{b_f t_f^3}{12} \right)^{0,06} s_s^{0,23} \quad (86)$$

où le facteur K est originellement fixé à 1,3 puis porté à 1,38 un peu plus tard [28].

6.3.1.2 Modèles basés sur un mécanisme de ruine plastique

■ Les modèles fondés sur un mécanisme de ruine plastique ont été développés à partir de la fin des années 1970. Roberts et Rockey [29] sont les premiers à imaginer un mécanisme à rotules plastiques dans la semelle chargée et lignes d'articulation plastique dans l'âme et défini par les paramètres α et β (figure 26).

Attention – Les paramètres α , β et θ ont ici une signification tout autre que dans les chapitres précédents. Ils sont utilisés par souci de conformité avec les publications originales.

■ L'angle θ fixe ici la déformation de l'âme au moment de la ruine et les déformations membranaires de l'âme sont négligées. En égalant le travail des forces extérieures au travail de déformation intérieur, on obtient F_R en fonction de θ , puis on minimise F_R par rapport à θ . Au terme de quelques simplifications, consistant à négliger des termes peu significatifs, et de quelques ajustements destinés à remédier à des anomalies évidentes, l'expression suivante est proposée :

$$F_R = 0,56t_w^2 \sqrt{\frac{Ef_{yw}t_f}{t_w}} \left(1 + \lambda s_s \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^{3/2} \right) \quad (87)$$

avec λ fonction des dimensions et des propriétés des matériaux.

Pour garder une relative simplicité à la solution, Roberts adopte $\lambda = 3/h_w$ et, afin que sa relation constitue une borne inférieure aux résultats d'essais, substitue la valeur 0,5 à celle de 0,56, d'où finalement :

$$F_R = 0,5t_w^2 \sqrt{\frac{Ef_{yw}t_f}{t_w}} \left(1 + \frac{3s_s}{h_w} \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^{3/2} \right) \quad (88)$$

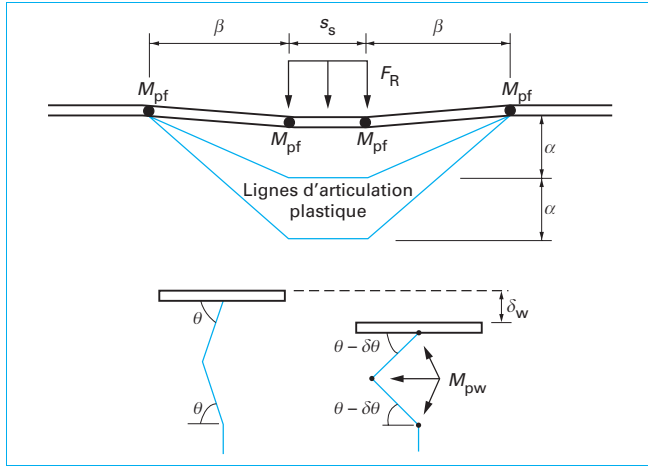


Figure 26 – Mécanisme de ruine par défoncement/voilement selon Roberts et Rockey

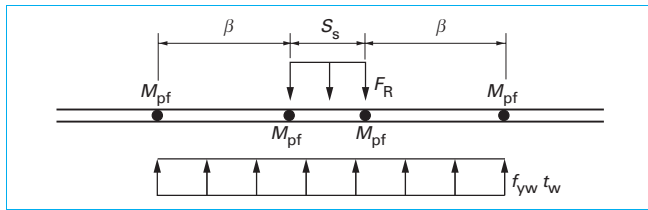


Figure 27 – Modèle de ruine par plastification selon Roberts

Deux limites sont assignées à la résistance fournie par cette expression. D'une part, lorsque s_s/h_w devient grand, il est peu réaliste d'admettre que la semelle reste droite entre les deux rotules plastiques intérieures, d'où la limitation $s_s/h_w \leq 0,2$. D'autre part, le modèle sous-estime la résistance pour des âmes et semelles minces, d'où une limite inférieure au rapport t_f/t_w qui est toutefois, sans incidence dans les situations rencontrées en pratique.

■ Indépendamment, Roberts [30] propose une solution pour les poutres à âme compacte auxquelles la plastification est le mode de ruine déterminant (figure 27). Il suppose des rotules plastiques dans la semelle chargée avec une longueur d'âme, comprise entre les rotules extérieures, plastifiée en compression. L'égalité du travail des forces extérieures et du travail intérieur de déformation développés durant la formation de ce mécanisme conduit à la relation :

$$F_y = f_{yw} t_w \left(s_s + 2t_f \sqrt{\frac{f_{yt} b_f}{f_{yw} t_w}} \right) \quad (89)$$

qui n'est toutefois pas subordonnée à la limitation $s_s/h_w \leq 0,2$ applicable à F_R .

■ Le même auteur complète sa proposition à diverses reprises. En 1981, il l'étend au cas de la charge transversale répartie sur une assez grande longueur [31], la réévalue en 1983 [32] puis, en 1997, aménage la formulation à fondement purement théorique pour offrir un meilleur accord avec les résultats d'essais [33] :

$$F_R = \left[1,1 t_w^2 \sqrt{E F_{yw}} \left(\frac{t_f}{t_w} \right)^{1/4} \left(1 + \frac{s_{se} t_w}{h_w t_f} \right) \right] \frac{1}{F} \quad (90)$$

avec

$$s_{se} = s_s + 2t_f \quad (91)$$

tenant compte d'une diffusion à 45° au travers de l'épaisseur t_f de la semelle.

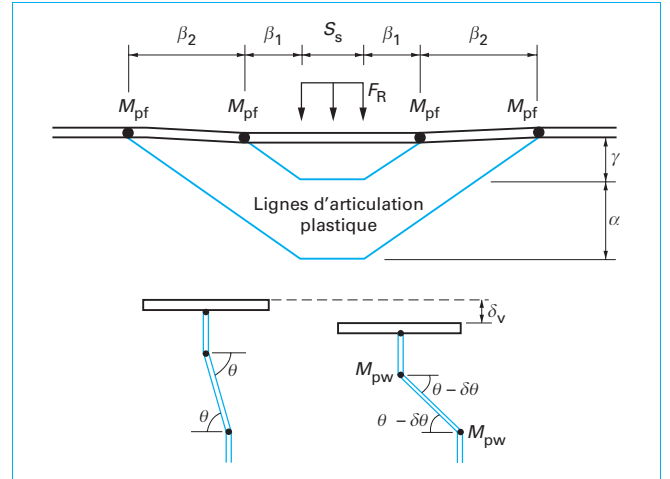


Figure 28 – Modèle de mécanisme plastique de Shimizu et al.

Le facteur de calibration F est pris égal à 1,45 pour atteindre un seuil de confiance de 95 %. Cette résistance au voilement peut être trouvée supérieure à la résistance à la plastification (donnée par (88) où l'on substitue s_{se} à s_s), auquel cas la plus petite des deux valeurs doit être retenue.

■ En prolongement de travaux antérieurs portant sur un mécanisme également à trois rotules – mais légèrement différent du précédent – et en exploitant de nombreux résultats d'essais, Bergfelt [34] propose, en 1983, la relation suivante :

$$F_R = 0,8 t_w^2 \sqrt{E f_{yw}} \sqrt{\frac{t_f}{t_w}} \quad (92)$$

Des facteurs de correction additionnels, dont les expressions ne sont pas reproduites ici, sont introduits pour tenir compte de la longueur de distribution de la charge, de l'élancement de l'âme et de l'amplitude de défaut de planéité initial de l'âme. La relation (92) est valable pour des poutres dont la semelle chargée par la charge concentrée répond à la condition :

$$t_f/t_w > \sqrt[4]{200 t_f/c} \quad (93)$$

avec c

largeur de la partie en console de cette semelle.

Les essais de référence couvrent un domaine d'élancements d'âme compris entre 150 et 400. Il est observé que, dans celui-ci, l'influence de l'élancement sur la charge de ruine est peu significative.

■ En 1990, Shimizu et al. [35] réalisent des essais sur des poutres dont le rapport s_s/a est choisi substantiellement plus grand que le champ examiné jusqu'alors. Ils arguent que le mode de ruine s'en trouve modifié et développent un modèle ne comportant que deux – et non plus trois – lignes d'articulation plastiques dans l'âme (figure 28).

Toutes les propositions précédentes présentent l'inconvénient que la procédure de détermination de la résistance ultime à la charge transversale concentrée n'a pour ainsi dire rien en commun avec celle en vigueur pour tous les autres phénomènes d'instabilité.

■ Ungermann [36] est le premier à tenter de remédier à cette situation. Sur la base d'un modèle comportant trois rotules plastiques dans la semelle chargée – dont, par souci de concision, on ne

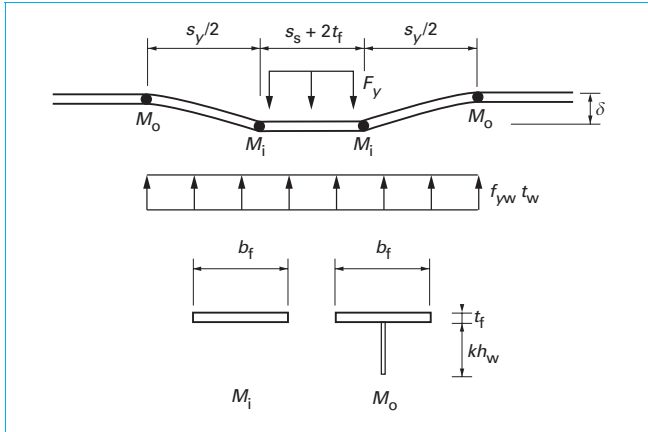


Figure 29 – Modèle de Lagerqvist et Johansson pour la résistance plastique F_y

reproduit pas le détail –, il élabore une procédure qui comporte donc les calculs successifs suivants :

- charge critique F_{cr} ;
- charge plastique F_y ;
- élancement réduit $\bar{\lambda}_F = \sqrt{F_y / F_{cr}}$;
- coefficient de réduction χ_F ;
- charge ultime $F_R = \chi_F F_y$.

■ Lagerqvist reprend l'idée du précédent et élabore un modèle [6] qu'il aménage quelque peu ultérieurement [37]. On n'en donne ici que la version la plus récente. La charge critique F_{cr} a déjà été commentée plus haut (voir § 4.3). Le mécanisme plastique est similaire à celui de Roberts et Rokeby pour la charge plastique (figure 26). La différence consiste à admettre que les rotules plastiques extérieures concernent non seulement la semelle – comme les rotules intérieures – mais aussi une partie de la hauteur d'âme adjacente à la semelle, formant ainsi une section en T (figure 29).

On a ainsi :

- Calcul de la charge critique selon :

$$F_{cr} = k_F \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{t_w^3}{h_w} \quad (94)$$

avec :

$$K_F = 5,3 + 1,9 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 + 0,44 \sqrt{\frac{b_f t_f^3}{h_w t_w^3}} \quad (95)$$

dans laquelle, par comparaison à (30), le facteur multiplicateur $(1 + s_y/2h_w)$ du dernier terme est désormais omis.

- Calcul de la charge plastique selon :

$$F_y = f_{yw} t_w \left(s_s + 2t_f + 2t_f \sqrt{\frac{f_{yt} b_f}{f_{yw} t_w} + 0,02 \left(\frac{h_w}{t_f} \right)^2} \right) \quad (96)$$

- Calcul d'un élancement réduit selon, classiquement :

$$\bar{\lambda}_F = \sqrt{\frac{F_y}{F_{cr}}} \quad (97)$$

- Calcul d'un coefficient de réduction selon :

$$\chi_F = 0,06 + \frac{0,47}{\bar{\lambda}_F} \leq 1 \quad (98)$$

- Calcul de la charge de ruine selon :

$$F_R = \chi_F F_y \quad (99)$$

6.3.2 Procédure normative de la EN 1993-1-5

La norme européenne EN 1993-1-5 a adopté cette méthodologie moyennant quelques aménagements dictés par un souci d'extrême simplification :

- Calcul de la charge critique :

$$F_{cr} = 0,9 k_F E \frac{t_w^3}{h_w} \quad (100)$$

avec

$$k_F = 6 + 2 \left(\frac{h_w}{a} \right)^2 \quad (101)$$

- Calcul de la charge plastique :

$$F_y = I_y t_w f_{yw} \quad (102)$$

avec

$$I_y = S_s + 2t_f (1 + \sqrt{m_1 + m_2}) \leq a \quad (103)$$

et :

$$m_1 = \frac{f_{yt} b_f}{f_{yw} t_w} \quad (104)$$

$$m_2 = 0,02 \left(\frac{h_w}{t_f} \right)^2 \quad \text{si } \bar{\lambda}_F > 0,50 \quad (105)$$

$$m_2 = 0 \quad \text{si } \bar{\lambda}_F \leq 0,50$$

- Calcul d'un élancement réduit :

$$\bar{\lambda}_F = \sqrt{\frac{F_y}{F_{cr}}} \quad (106)$$

- Calcul d'un coefficient de réduction :

$$\chi_F = \frac{0,50}{\bar{\lambda}_F} \leq 1 \quad (107)$$

- Calcul de la charge de ruine :

$$F_R = \chi_F F_y \quad (108)$$

Le fait que m_2 dépende de $\bar{\lambda}_F$ n'est pas très commode puisqu'une valeur de l'élancement réduit, non encore connu, doit être supposé à ce stade, à charge de vérifier ultérieurement si l'hypothèse est validée ou non.

On dispose actuellement de moyens de calcul permettant une détermination assez précise des charges critiques, en particulier de F_{cr} . Le logiciel EBPlate ([38] [39]) déjà cité est de ceux-là.

Il faut toutefois insister sur le fait qu'il n'est en principe pas autorisé, sous peine d'incohérence, de calculer F_{cr} d'une autre manière qu'avec la relation très simplifiée (100), puis de poursuivre la procédure de vérification selon la EN 1993-1-5.

Le coefficient de réduction (107) résulte en effet d'une calibration sur les résultats d'essais pour laquelle l'élancement réduit qui y intervient a été calculé avec une valeur de charge critique déterminée selon (100).

En d'autres termes, les (parfois très larges) approximations faites sur F_{cr} se trouvent compensées au travers du coefficient de réduction et, de la sorte, n'empêchent nullement d'obtenir des valeurs assez fidèles de la charge de ruine.

La procédure de l'Eurocode doit donc être appliquée comme un tout indivisible.

6.3.3 Extension aux âmes raidies longitudinalement

Une excellente synthèse des recherches entreprises, quant à la résistance à une charge transversale concentrée, a été faite par Davaine [40] dans la perspective de l'application à la construction des ponts par lançage. Le champ d'investigation est étendu aux âmes comportant un raidisseur longitudinal.

Les résultats de laboratoire ont été complétés par ceux, très nombreux, de simulations numériques couvrant tout le domaine d'emploi des ponts. Diverses corrections ont été proposées, qui améliorent encore l'approche de la EN 1993-1-5.

Elles ne sauront toutefois être prises en considération qu'à l'occasion des travaux de maintenance des Eurocodes.

7. Procédure unifiée d'évaluation des charges de ruine

Désormais, tous les phénomènes d'instabilité de plaques sollicitées par des contraintes normales uni-axiales, par des contraintes de cisaillement, ou par une force concentrée transversale, font l'objet d'une procédure unifiée dans son principe, en tous points similaires à celle applicable aux instabilités de barres telles que flambement et déversement.

Cette procédure est résumée par l'organigramme de la figure 30, dans lequel le symbole C est utilisé ici comme symbole générique de l'instabilité spécifique considérée.

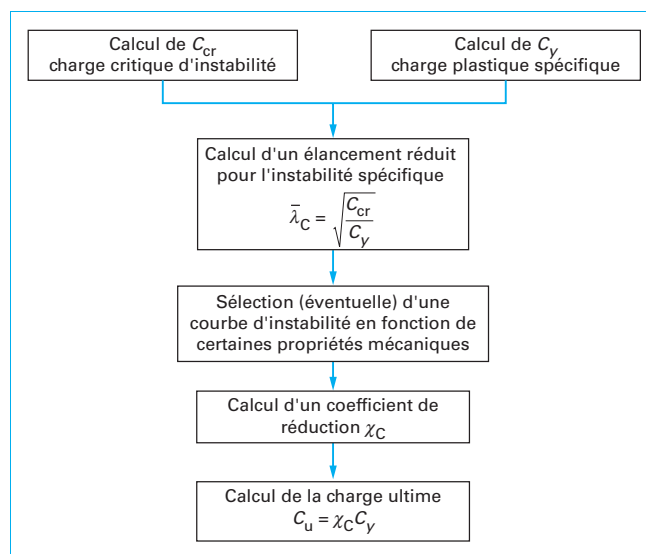


Figure 30 – Procédure générale de détermination d'une charge ultime selon l'Eurocode 3

8. Conclusion

Le présent article vise à donner un bref aperçu de l'évolution des connaissances en matière de voilement. Il ne saurait être exhaustif. Son auteur a donc nécessairement fait des choix. Ainsi, il a souhaité s'attarder sur les matières ayant fait l'objet des développements les plus récents et commenter davantage ce qui constitue le fondement des règles de vérification au voilement de l'Eurocode 3.

Le lecteur soucieux d'élargir son champ d'intérêt dans le domaine du voilement des plaques consultera utilement un ouvrage déjà cité [14], préparé par la Convention européenne de la construction métallique. Si sa curiosité s'adresse davantage aux fondements des clauses normatives, il s'orientera plutôt vers un document préparé par les rédacteurs de la EN 1993-1-5 et destiné à servir de commentaire à ce code.

Les références bibliographiques de ces deux sources d'information sont reprises dans la fiche documentaire « Pour en savoir plus ».