

氏名	増利 晴也	探
学籍番号	4510077	点

基礎数学B中間テスト (平成23年6月11日)

氏名: 増利 晴也 学籍番号: 4510077

問1.  $u = \sin x + \cos y$ ,  $v = \log(xy)$  のとき,  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  を計算せよ.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin y \\ \frac{y}{xy} & \frac{x}{xy} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x}{xy} \cos x + \sin x \frac{y}{xy}$$

$$= \begin{vmatrix} x \cos x + y \sin x \\ xy \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} xz & yz \\ x+y & y+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} xz(y+x) - xy(x+y) \\ x^2(y-x) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x \cos x + y \sin x}{xy}$$

問2.  $z = \tan(3t + 2x^2 - y)$ ,  $x = \frac{1}{t}$ ,  $y = \sqrt{t}$  のとき,  $\frac{dz}{dt}$  を求めよ (最終結果を  $t$  で表わせ).

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)}$$

$$\frac{dx}{dt} = -t^{-2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} \left( -\frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} \left( \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} \left( -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \right)$$

問3.  $z^3 - 3xyz = a^3$  のとき,  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a^3}{z^2 - xy}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(z^2 - xy)^3}$  である. ただし,  $a$ ,  $x$ ,  $y$  は整式である.

$$z^3 - 3xyz - 3yz = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$z \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz^2}{z^2 - xy} - 3yz = 0$$

$$= \frac{yz^2 - 3yz(z^2 - xy)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{yz^2 - 3yz^3 + 3xy^2}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{yz^2 - 3yz^3 + 3xy^2}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{yz^2 - 3yz^3 + 3xy^2}{(z^2 - xy)^2}$$

$$a = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$x = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

問4.  $\begin{cases} \log(xyz) = a \\ xy + yz + zx = b \end{cases}$  のとき,  $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x^2(z-y)}$ ,  $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2(z-y)}$  である. ただし,  $a$ ,  $x$ ,  $y$  は整式である.

$$\frac{yz}{xyz} = \frac{yz}{xyz} \frac{dy}{dx} + \frac{yz}{xyz} \frac{dz}{dx}$$

$$-yz = xz \frac{dy}{dx} + xy \frac{dz}{dx}$$

$$-(y+z) = (x+z) \frac{dy}{dx} + (y+x) \frac{dz}{dx}$$

$$- \begin{vmatrix} -yz & xy \\ y+x & y+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & yz \\ x+z & -y+z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} xz & yz \\ x+z & -y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & yz \\ x+z & -y+z \end{vmatrix}$$

$$= yz(y+x) - xy(y+z)$$

$$= yz(y+x) - xy(y+z)$$

$$= yz(y+x) - xy(y+z)$$

$$= yz(y+x) - xy(y+z)$$

$$a = \frac{yz}{x^2(z-y)}$$

$$1 = \frac{yz}{x^2(z-y)}$$

問5. 関数  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  について,

$$(xy)^{\frac{1}{2}}$$

- $\nabla f$  を求めよ.
- 点  $(1, 2)$  から点  $(-2, 3)$  への方向を  $l$  方向とする. 点  $(4, 1)$  における方向  $l$  の方向微分係数  $\frac{\partial f}{\partial l}$  を求めよ.
- 点  $(4, 1)$  において, 方向微分係数が最大となる方向を  $n$  とする.  $n$  方向の微分係数  $\frac{\partial f}{\partial n}$  を求めよ.
- 点  $(4, 1)$  において, 方向微分係数がゼロとなる方向を  $m$  とする.  $m$  方向の単位ベクトル  $\vec{m}$  を求めよ.

$$1. \nabla f = \left( \frac{1}{2} y (xy)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} x (xy)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$2. \frac{\partial f}{\partial l}(1, 2) = \left( 2^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} 2^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left( 2^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} 2^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \left| \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{26}} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2 \cdot 26}$$

$$3. \frac{\partial f}{\partial n}(4, 1) = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{4}, 1 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{16+1}} = \left( \frac{\sqrt{17}}{4} \right)$$

$$-4, -1$$

$$\left( \frac{1}{4}, 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{4}, 1 \right) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

$\nabla f(x, y) =$	$\left( \frac{1}{2} (xy)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} (xy)^{-\frac{1}{2}} \right)$
$\frac{\partial f}{\partial l}(x, y) =$	$\frac{1}{\sqrt{26}}$
$\frac{\partial f}{\partial n}(3, 1) =$	$\frac{\sqrt{17}}{4}$
$\vec{m} =$	$\left( \frac{1}{4}, 1 \right)$

問6. 曲面  $x^2 + 2y^2 - \sqrt{z} = 3x$  上の点  $(3, 1, 4)$  におけるこの曲面と法線とを求めよ.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - \sqrt{z} - 3x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 3, \frac{\partial f}{\partial y} = 4y, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1, 4) = (3, 4, -\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \left[ 3(x-3) + 4(y-1) - \frac{1}{4}(z-4) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{4} \right]$$

$$\left( \frac{1}{4}, 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{4}, 1 \right) = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 1 = 0$$

接平面:	$3(x-3) + 4(y-1) - \frac{1}{4}(z-4) = 0$
法線:	$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{4}$