SECOND YEAR CIVIL STRUCTURAL ANALYSIS

VIRTUAL WORK METHOD

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL + \int \frac{Q_0 Q_1}{GA} dL + \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

2013 / 2014

9

VIRTUAL WORK

هى احدى طرق حساب الـ *defleftion*.

قيمة الـ *defleftion* تعتمد على ثلاثة أشياء و هم الـ *bending deformations* و هى التى تنتج من تأثير الـ *moment* و الـ *Shear deformations* و هى التى تنتج من تأثير الـ~~Shear~~ و الـ *Axial deformations* و هى التى تنتج من تأثير الـ *Normal*.

الطريقتين السابقتين لحساب الـ *defleftion* و هما الـ *Conjugate beam* و الـ *double integration method* كانتا تعتمدا فى حساب الـ *defleftion* على الـ *bending deformations* فقط أى على تأثير الـ *moment* فقط ولكن طريقة الـ *Virtual work* تأخذ فى اعتبارها الثلاثة أشياء و بالتالى تعتبر أفضل الطرق لحساب الـ *defleftion*.

و المعادلة التى تحسب منها الـ *defleftion*:

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL + \int \frac{Q_0 Q_1}{G A_r} dL + \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

Where

$\delta \Longrightarrow$ هى عبارة عن الـ *deformation* فمن الممكن أن تكون *defleftion* أو *Slope angle* أو *Horizontal displacement*.

$\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL \Longrightarrow$ *deformation* تأثير الـ *Normal* فى قيمة الـ

$\int \frac{Q_0 Q_1}{G A_r} dL \Longrightarrow$ *deformation* تأثير الـ *Shear* فى قيمة الـ

$\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL \Longrightarrow$ *deformation* تأثير الـ *moment* فى قيمة الـ

$E \Longrightarrow$ *modulus of elasticity* معاير المرونة

و هى عبارة عن مقاومة المادة لحدوث الـ *Normal stresses*

$G \Longrightarrow$ *Shear modulus*

و هى عبارة عن مقاومة المادة لحدوث الـ *Shear stresses*

$A \Longrightarrow$ *Area of cross section* مساحة مقطع الـ *member*

$I \Longrightarrow$ *Moment of inertia*

$A_r \Longrightarrow$ *Shear Area*

و لكن لا نستخدم المعادلة باجزائها الثلاثة فى جميع الحالات حيث أنه كثيرا ما يكون تأثير جزء أو جزئين من المعادلة *neglected* فمثلا :

1-For Beams

عادة فى الكمرات يكون الـ *Normal force* صغير جدا أو بصفر و فى نفس الوقت مقاومة الكمرات للـ *Normal force* كبيرة و ذلك لكبر مساحة مقطع الكمرة و بالتالى فان تأثير الـ *Normal force* على الكمرات يكون *neglected* فعند أى من قيم الـ *deformations* نهمل الترم الخاص بالـ *Normal* و بالتالى تكون المعادلة كالتالى :

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL + \int \frac{Q_0 Q_1}{G A_r} dL$$

ووجدنا أيضا أن تأثير الـ *Shear force* على قيم الـ *deformations* صغير جدا مقارنة بتأثير الـ *moment* و بالتالى فسوف نهمل تأثير الـ *Shear force* عند حساب قيم الـ *deformations* فى الكمرات و تصبح المعادلة كالتالى :

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL$$

ملحوظة هامة

لو طلب فى المسألة حساب تأثير الـ *Shear force* أو الـ *Normal force* أو الاثنان فسوف نحسبهم طبعا بالاضافة الى تأثير الـ *moment* و من الممكن طلب ذلك صراحة أو اعطاء الـ $G A_r$ فهذا معناه أننا سوف نأخذ تأثير الـ *Shear* أو اعطاء الـ $E A$ فهذا معناه أننا سوف نأخذ تأثير الـ *Normal* .

2-For Frames

عادة فى الـ *Frames* يؤثر الـ *moment* بحوالى 97% من قيمة الـ *deformations* و يكون تأثير الـ *normal & Shear* حوالى 3% فقط و لذلك نهمل تأثير الـ *normal & Shear* و تصبح المعادلة كالتالى :

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL$$

و لكن فى حالة وجود *Link member* فى الـ *Frames* نأخذ فى الحساب تأثير الـ *normal force* فى الـ *Link member* و تصبح المعادلة كالتالى :

$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL}_{Frame} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL}_{Link\ member}$$

و السبب فى ذلك :

١ - الـ *Link member* لا يوجد به سوى الـ *normal force* و بالتالى لابد من ادخالها فى الحسابات.

٢ - مساحة مقطع الـ *Link member* تكون صغيرة مقارنة بالـ *Frame* و لذلك يكون تأثير ترم الـ *normal force* كبير حيث أننا نقسم على الـ EA $\int \frac{N_0 N_1}{\boxed{EA}} dL$

٣ - قيمة الـ *normal force* فى الـ *Link member* تكون كبيرة.

3-For Trusses

الـ *Truss* تكون كل الـ *members* الموجودة به عبارة عن *Link members* أى أنه لا يوجد به سوى *normal force* و لذلك نأخذ تأثير الـ *normal force* فقط و تصبح المعادلة كالتالى .

$$\delta = \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

4-For Trussed beams and trussed frames

الـ *Trussed beams* هى كمرات يكون بها *Link members* والـ *Trussed frames* هى *Frames* يكون بها *Link members* و فى هذه الحالة نأخذ تأثير الـ *moment* فى الـ *Frames* أو الـ *Beams* بالاضافة الى الـ *Normal* فى الـ *Link members*.

$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL}_{\text{Frame Or Beam}} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL}_{\text{Link member}}$$

ملحوظة هامة

فى أى من الحالات السابقة لو طلب فى المسألة أخذ تأثير أى *Term* أخر ندخله معنا فى الحسابات بالاضافة الى الموجود فى كل حالة مع الاخذ فى الاعتبار أنه لو أعطى الـ GA_r فهذا معناه أننا سوف نأخذ تأثير الـ *Shear* و لو أعطى الـ EA فهذا معناه أننا سوف نأخذ تأثير الـ *Normal*.

ملخص الحالات السابقة

Case	Equation
Beams	$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL$
Frames	$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL$
Truss	$\delta = \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$
Trussed beams Trussed frames	$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL}_{\text{Frame Or Beam}} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL}_{\text{Link member}}$

Where

1-For Beams

$M_0 \Longrightarrow$ هو ال *B.M.D* نتيجة الاحمال المؤثرة على الكمرة

$Q_0 \Longrightarrow$ هو ال *S.F.D* نتيجة الاحمال المؤثرة على الكمرة

2-For Frames

$M_0 \Longrightarrow$ هو ال *B.M.D* نتيجة الاحمال المؤثرة على ال *Frame*

$N_0 \Longrightarrow$ هو ال *N.F.D* نتيجة الاحمال المؤثرة على ال *Frame*

3-For Trusses

$N_0 \Longrightarrow$ هو ال *N.F.D* لكل ال *members* نتيجة الاحمال المؤثرة على ال *Truss*

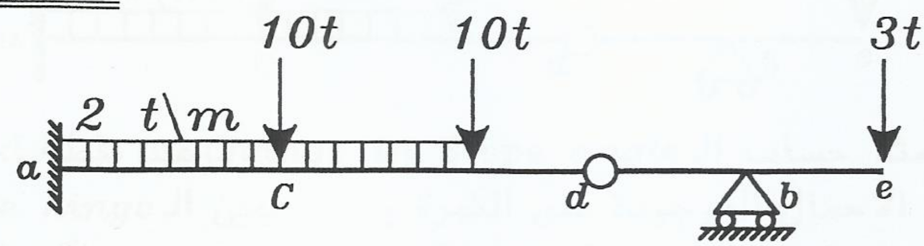
4-For Trussed beams or frames

$M_0 \Longrightarrow$ هو ال *B.M.D* نتيجة الاحمال المؤثرة على ال *Frame* أو ال *Beam*

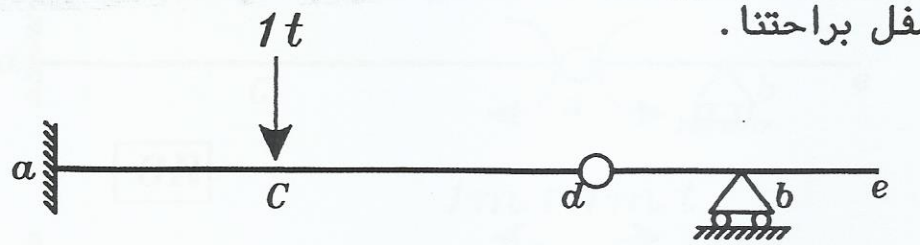
$N_0 \Longrightarrow$ هو ال *N.F.D* لل *Link members* نتيجة الاحمال المؤثرة على ال *Frame* أو ال *Beam*

و لحساب الـ δ المطلوبة نحتاج الى معرفة الـ $N_1 \& Q_1 \& M_1$ و هم يتوقفوا على نوع الـ δ المطلوب حسابها كالتالى :

1-Deflection

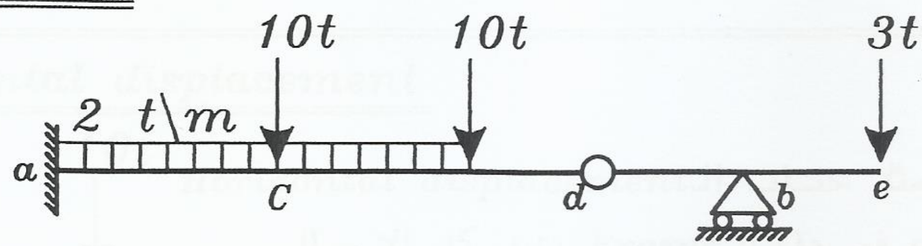


لو مطلوب مثلا حساب الـ $deflection$ عند نقطة C فى هذه الكمرة نزيل كل الاحمال الموجودة على الكمرة و نضع عند نقطة C قوة رأسية قيمتها $1t$ و نفرض اتجاهها لاعلى أو لاسفل براحتنا .

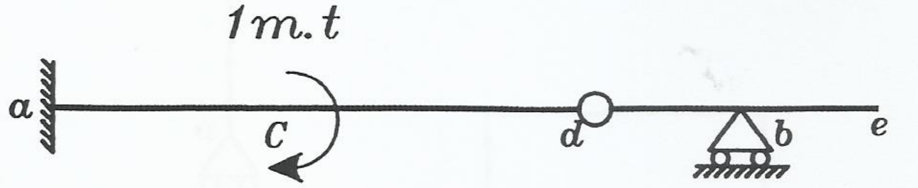


لو رسمنا الـ $B.M.D$ لهذه الكمرة يكون هو الـ M_1 و لو رسمنا الـ $S.F.D$ يكون هو الـ Q_1 و لو رسمنا الـ $N.F.D$ يكون هو N_1 .

2-Slope angle

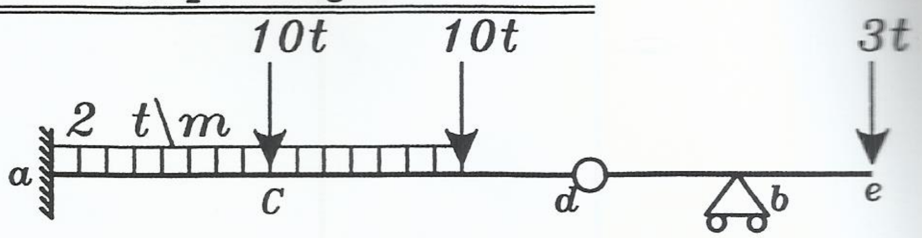


لو مطلوب مثلا حساب الـ $Slope\ angle$ عند نقطة C فى هذه الكمرة نزيل كل الاحمال الموجودة على الكمرة و نضع عند نقطة C عزم قيمته $1m.t$ و نفرض اتجاهه مع عقارب الساعة أو عكسها براحتنا.

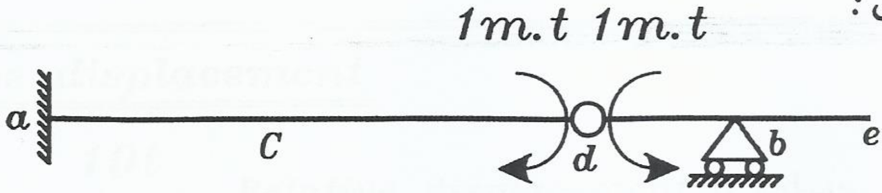


لو رسمنا الـ $B.M.D$ لهذه الكمرة يكون هو الـ M_1 و لو رسمنا الـ $S.F.D$ يكون هو الـ Q_1 و لو رسمنا الـ $N.F.D$ يكون هو N_1 .

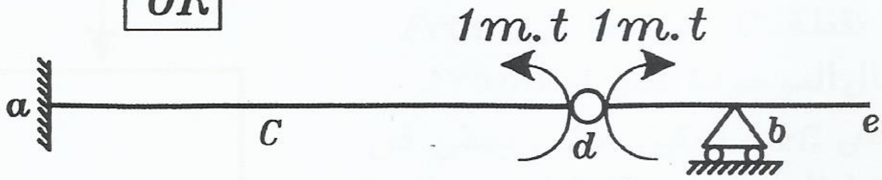
-Change in Slope angle at I.H



لو مطلوب مثلا حساب الـ *Change in Slope angle* عند نقطة *d* فى هذه الكمرة نزيل الاحمال الموجودة على الكمرة و نضع يمين الـ *Intermediate hinge* عزم مركز قيمته *1m.t* و يسارها عزم مركز أخر قيمته *1m.t* و لكن فى عكس الاتجاه كالتالى :

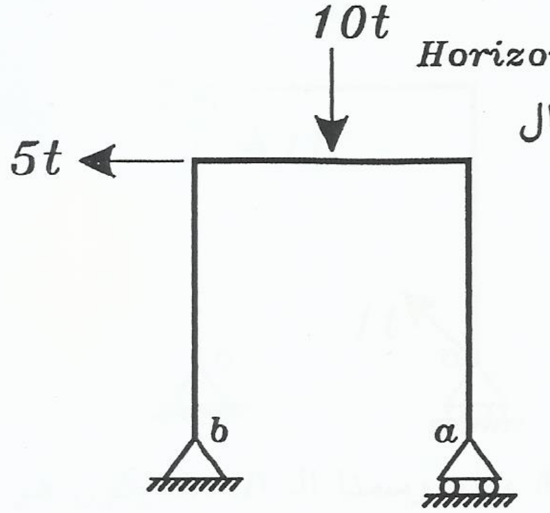


OR

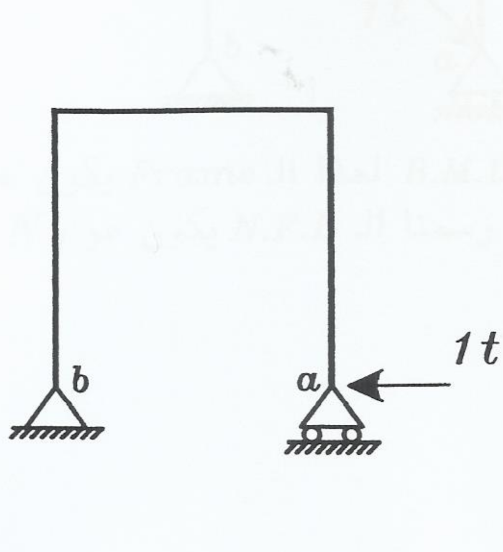


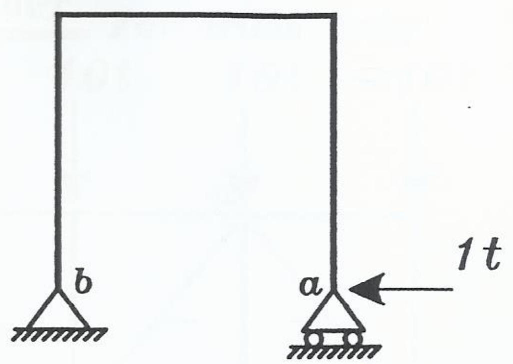
لو رسمنا الـ *B.M.D* لهذه الكمرة يكون هو الـ M_1 و لو رسمنا الـ *S.F.D* يكون هو الـ Q_1 و لو رسمنا الـ *N.F.D* يكون هو N_1 .

4-Horizontal displacement



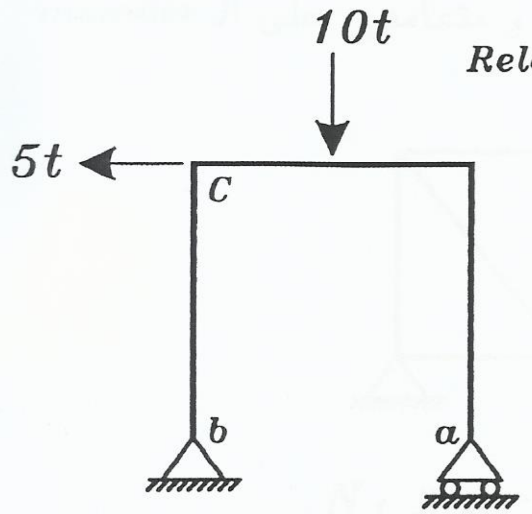
لو مطلوب مثلا حساب الـ *Horizontal displacement* عند نقطة *a* فى هذا الـ *Frame* نزيل كل الاحمال الموجودة على الـ *Frame* و نضع عند نقطة *a* قوة أفقية قيمتها *1t* و نفرض اتجاهها يمين أو شمال براحتنا .



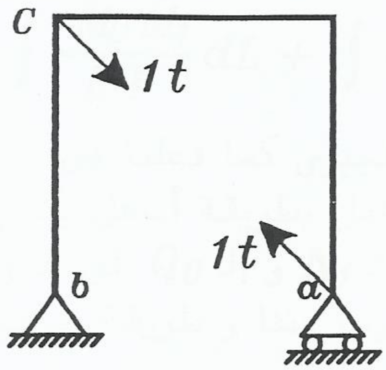


لو رسمنا الـ *B.M.D* لهذا الـ *Frame* يكون هو الـ M_1 و لو رسمنا الـ *S.F.D* يكون هو الـ Q_1 و لو رسمنا الـ *N.F.D* يكون هو N_1 .

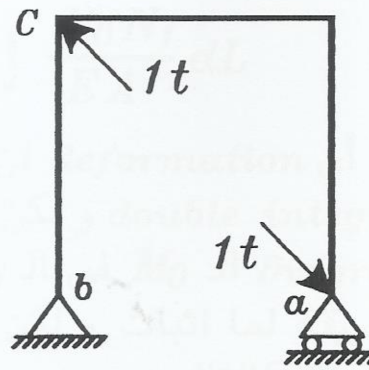
5–Relative displacement



لو مطلوب مثلا حساب الـ *Relative displacement* بين نقطة *a* و نقطة *C* فى هذا الـ *Frame* نزيل كل الاحمال الموجودة على الـ *Frame* و نضع عند نقطتى *a&C* قوتين عكس بعض فى الاتجاه على الخط الواصل بين النقطتين و قيمة كل قوة *1t* و نفرض اتجاه القوى كما نريد اما خارجين من النقطتين أو داخلين عليهما ولكن المهم أن يكونا عكس بعض فى الاتجاه .



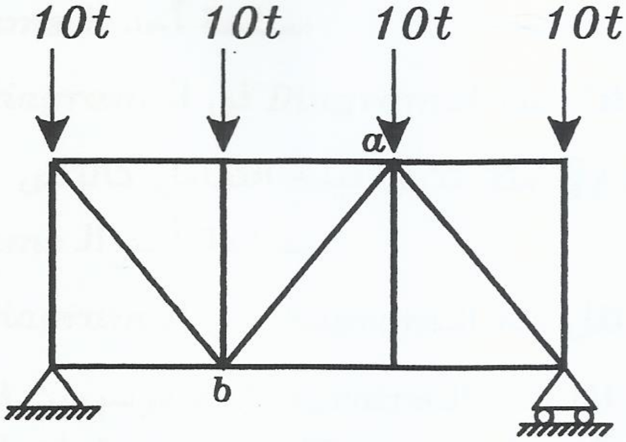
OR



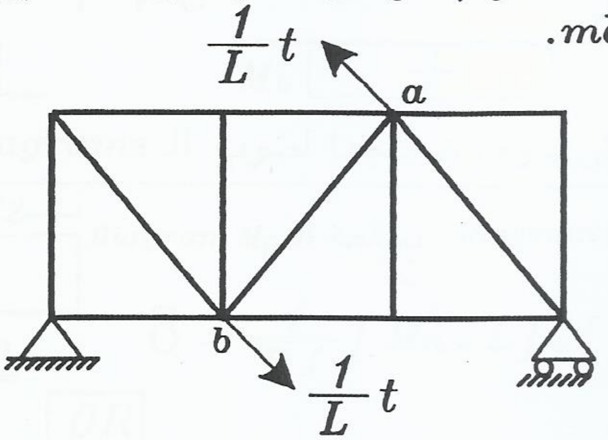
لو رسمنا الـ *B.M.D* لهذا الـ *Frame* يكون هو الـ M_1 و لو رسمنا الـ *S.F.D* يكون هو الـ Q_1 و لو رسمنا الـ *N.F.D* يكون هو N_1 .

-Rotation of member

For truss only



لو مطلوب مثلا حساب الـ *Rotation* للـ *member ab* فى هذا الـ *Truss*
نزيل الاحمال الموجودة على الكمرة و نضع عند بداية و نهاية الـ *member*
قوتين قيمة كل واحدة $\frac{1t}{L}$ عكس بعض فى الاتجاه و متعامدين على الـ *member*
حيث L هو طول الـ*member*.



لو رسمنا الـ *N.F.D* لكل الـ *Truss members* يكون هو الـ N_1 .

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL + \int \frac{Q_0 Q_1}{G A_r} dL + \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

و لحساب أى *deformation* لن نقوم بالتكامل الجبرى كما فعلنا فى طريقة الـ *double integration* و لكن سوف نقوم بالتكامل بطريقة أسهل بكثير عن ضرب *Diagram* الـ M_0 فى الـ M_1 و الـ N_0 فى الـ N_1 و الـ Q_0 فى الـ Q_1 .
و هذه الطريقة لها اثبات و لكن الاثبات غير مطلوب مننا و طريقة ضرب الـ *Diagrams* كالتالى :

١- نقسم الـ *Diagrams* الى أشكال يسهل التعامل معها كما فى طريقة الـ *Conjugate beam* .

٢- لضرب الـ M_0 فى الـ M_1 مثلا تكون قيمة التكامل كالتالى

$\frac{1}{EI}$ [مساحة أحد الـ *Diagrams*

طول هبوط مركز ثقل هذا الـ *Diagram* فى الـ *Diagram* الاخر X

٣- لضرب الـ N_0 فى الـ N_1 مثلا تكون قيمة التكامل كالتالى

$\frac{1}{EA}$ [مساحة أحد الـ Diagrams

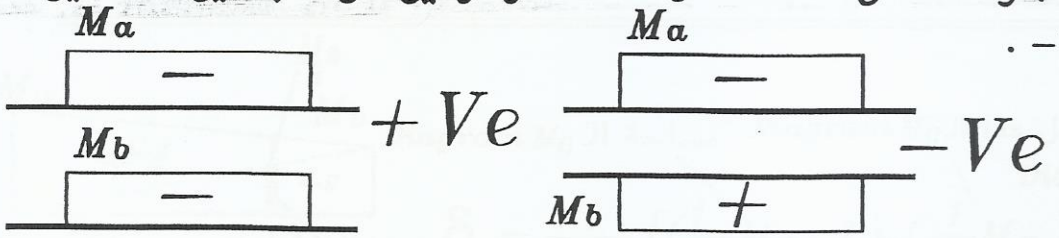
طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram فى الـ Diagram الاخر X]

٤- لضرب الـ Q_0 فى الـ Q_1 مثلا تكون قيمة التكامل كالتالى

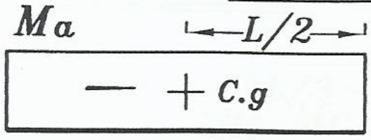
$\frac{1}{GA_r}$ [مساحة أحد الـ Diagrams

طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram فى الـ Diagram الاخر X]

و بالنسبة لاشارة الناتج اذا كان الـ 2-Diagrams مرسومين فى نفس الاتجاه تكون الاشارة +Ve و اذا كان الـ 2-Diagrams مرسومين فى اتجاهين مختلفين تكون الاشارة -Ve .



و هذه بعض الاشكال التى سوف نحتاجها لضرب الـ Diagrams

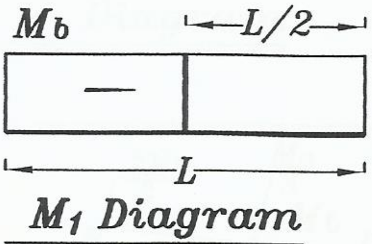


M_0 Diagram

مساحة الـ Diagram M_0 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_0 فى الـ Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}[M_a * L] * [M_b]$$

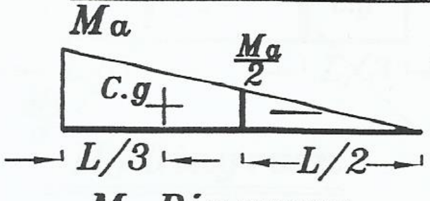
OR



M_1 Diagram

مساحة الـ Diagram M_1 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_1 فى الـ Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}[M_b * L] * [M_a]$$

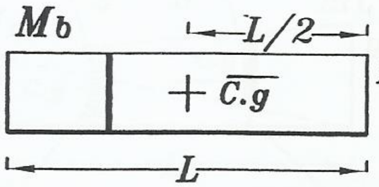


M_0 Diagram

مساحة الـ Diagram M_0 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_0 فى الـ Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}[\frac{1}{2}M_a * L] * [M_b]$$

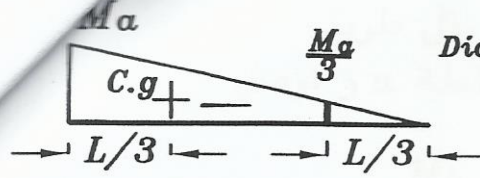
OR



M_1 Diagram

مساحة الـ Diagram M_1 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_1 فى الـ Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}[M_b * L] * [\frac{1}{2}M_a]$$



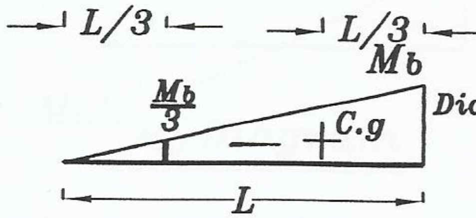
M_0 Diagram

مساحة ال $Diagram\ M_0$

طول هبوط مركز ثقل هذا ال $Diagram\ M_0$ فى ال $Diagram\ M_1$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}M_a * L\right] * \left[\frac{1}{3}M_b\right]$$

OR

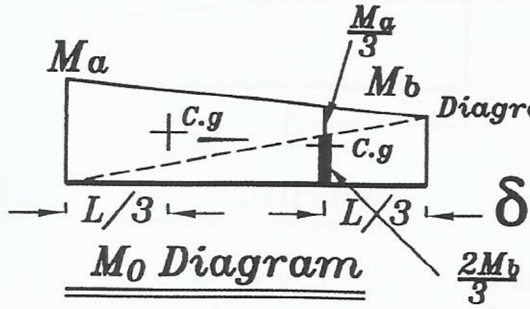


M_1 Diagram

مساحة ال $Diagram\ M_1$

طول هبوط مركز ثقل هذا ال $Diagram\ M_1$ فى ال $Diagram\ M_0$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}M_b * L\right] * \left[\frac{1}{3}M_a\right]$$



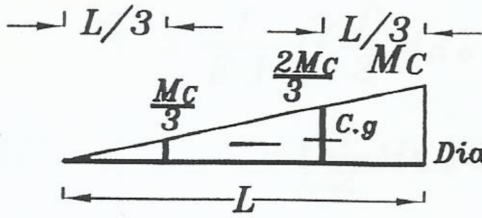
M_0 Diagram

مساحة ال $Diagram\ M_0$

طول هبوط مركز ثقل هذا ال $Diagram\ M_0$ فى ال $Diagram\ M_1$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}M_a * L\right) * \left(\frac{1}{3}M_C\right) + \left(\frac{1}{2}M_b * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_C\right)\right]$$

OR

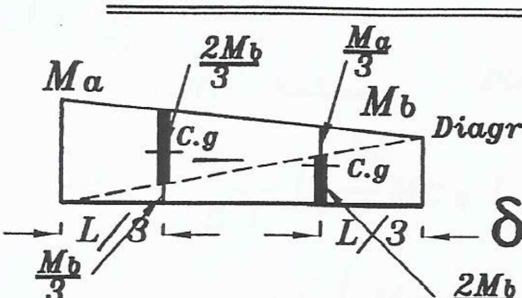


M_1 Diagram

مساحة ال $Diagram\ M_1$

طول هبوط مركز ثقل هذا ال $Diagram\ M_1$ فى ال $Diagram\ M_0$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}M_C * L\right] * \left[\frac{1}{3}M_a + \frac{2}{3}M_b\right]$$



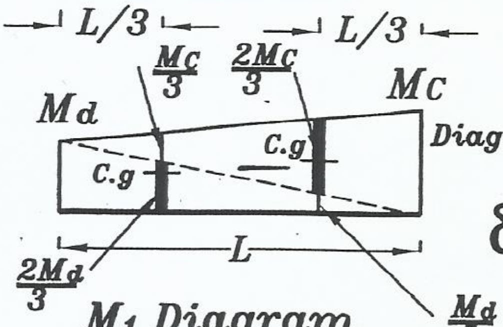
M_0 Diagram

مساحة ال $Diagram\ M_0$

طول هبوط مركز ثقل هذا ال $Diagram\ M_0$ فى ال $Diagram\ M_1$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}M_a * L\right) * \left(\frac{1}{3}M_C + \frac{2}{3}M_d\right) + \left(\frac{1}{2}M_b * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_C + \frac{1}{3}M_d\right)\right]$$

OR



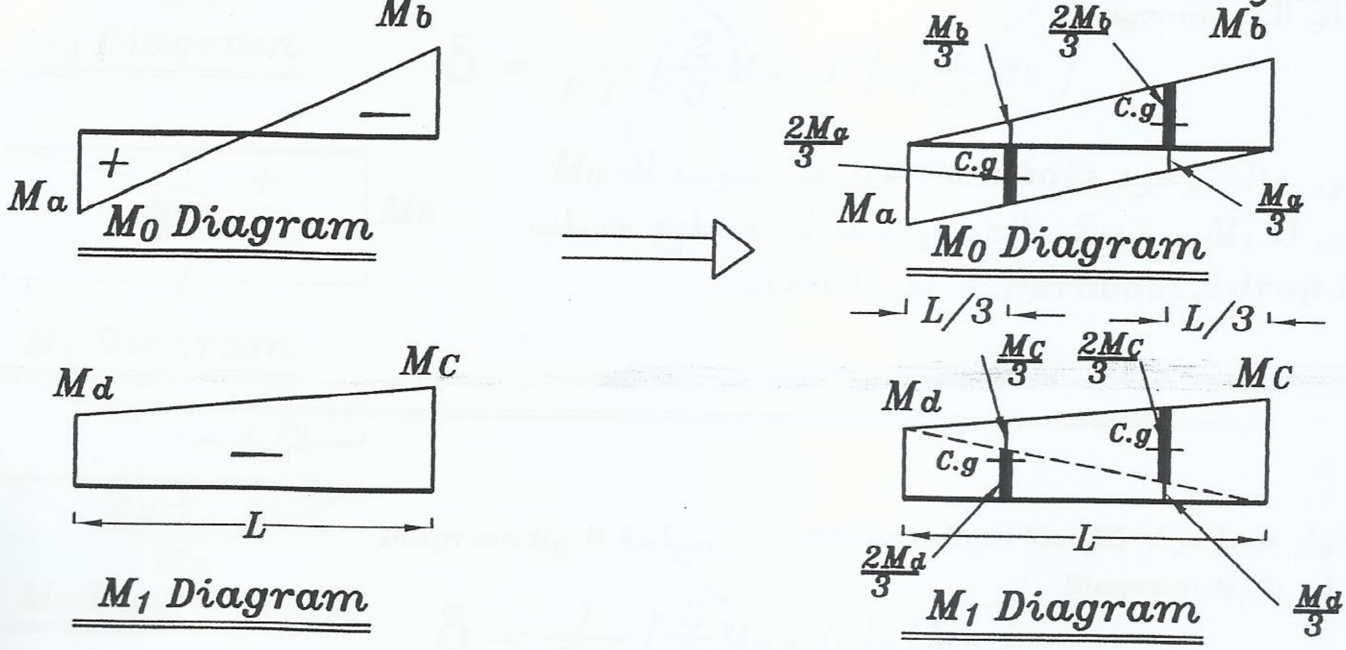
M_1 Diagram

مساحة ال $Diagram\ M_1$

طول هبوط مركز ثقل هذا ال $Diagram\ M_1$ فى ال $Diagram\ M_0$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}M_C * L\right) * \left(\frac{1}{3}M_a + \frac{2}{3}M_b\right) + \left(\frac{1}{2}M_d * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_a + \frac{1}{3}M_b\right)\right]$$

لو مثلث جزء منه فوق الـmember و جزء تحته نقسمه مثل طريقة الـ Conjugate beam حيث نوصل الـ M_b بالصفر عند نقطة a و نوصل الـ M_a بالصفر عند نقطة b .



مساحة الـ Diagram M_0 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_0 فى الـ Diagram M_1

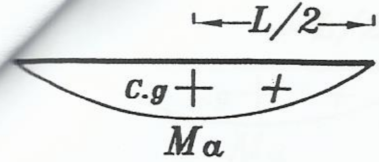
$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}M_a * L\right) * \left(-\frac{1}{3}M_C - \frac{2}{3}M_d\right) + \left(\frac{1}{2}M_b * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_C + \frac{1}{3}M_d\right)\right]$$

خد بالك اشارة الناتج اذا كان الـ 2-Diagrams مرسومين فى نفس الاتجاه تكون الاشارة +Ve و اذا كان الـ 2-Diagrams مرسومين فى اتجاهين مختلفين تكون الاشارة -Ve .

OR

مساحة الـ Diagram M_1 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_1 فى الـ Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}M_C * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_b - \frac{1}{3}M_a\right) + \left(\frac{1}{2}M_d * L\right) * \left(\frac{1}{3}M_b - \frac{2}{3}M_a\right)\right]$$

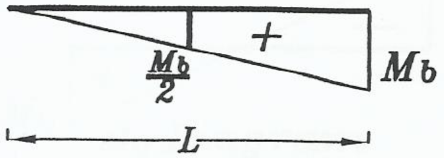


M_0 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_0 فى الـ Diagram M_1

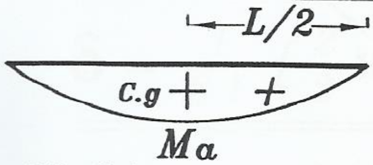
مساحة الـ Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}M_a * L\right] * \left[\frac{1}{2}M_b\right]$$



M_1 Diagram

فى حالة وجود Parabola لابد من ضرب الـ M_0 فى الـ M_1 و لايمكن العكس لاننا لا نستطيع حساب الـ drop للـ Parabola الا فى المنتصف

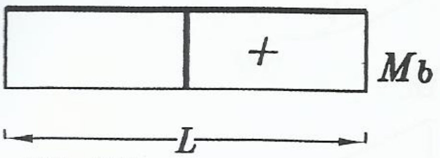


M_0 Diagram

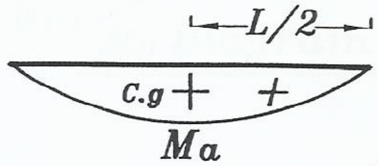
طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_0 فى الـ Diagram M_1

مساحة الـ Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}M_a * L\right] * \left[M_b\right]$$



M_1 Diagram

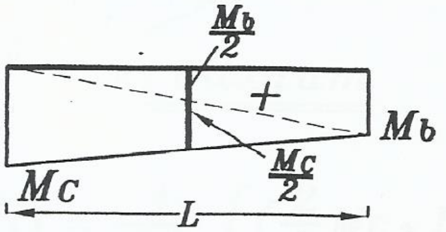


M_0 Diagram

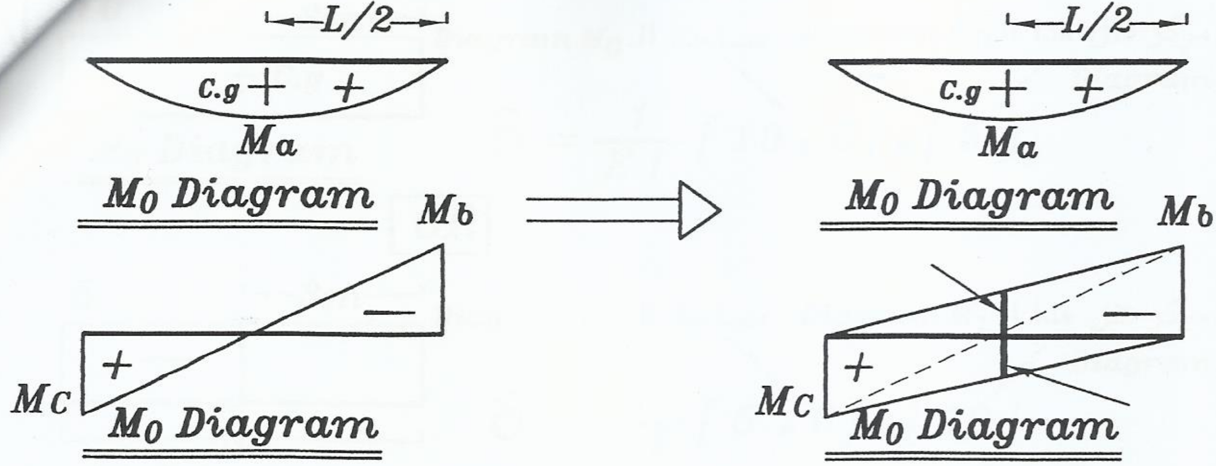
طول هبوط مركز ثقل هذا الـ Diagram M_0 فى الـ Diagram M_1

مساحة الـ Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}M_a * L\right] * \left[\frac{1}{2}M_b + \frac{1}{2}M_c\right]$$



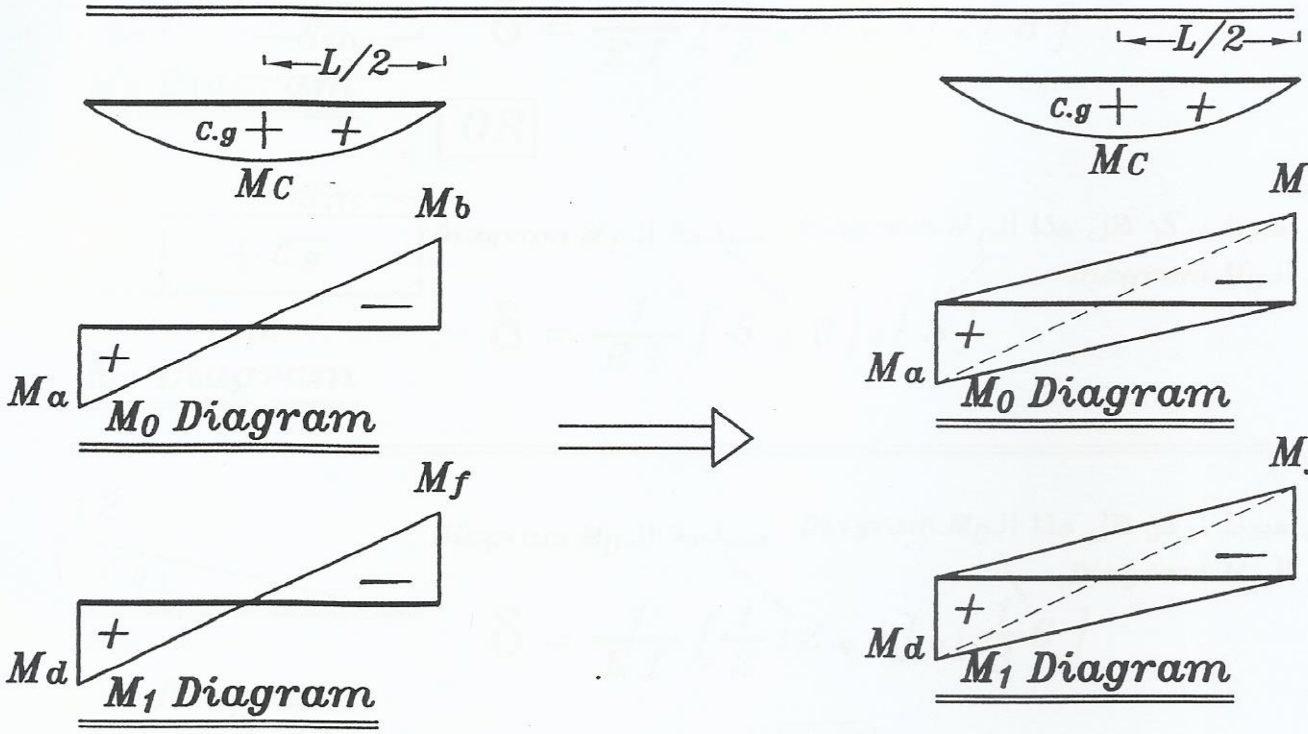
M_1 Diagram



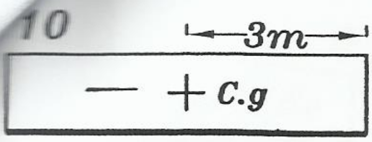
مساحة ال Diagram M_0 طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0

فى ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}M_a * L\right] * \left[\frac{1}{2}M_c - \frac{1}{2}M_b\right]$$



$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{2}{3}M_c * L\right) * \left(\frac{1}{2}M_d - \frac{1}{2}M_f\right) + \left(\frac{1}{2}M_a * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_d - \frac{1}{3}M_f\right) + \left(\frac{1}{2}M_b * L\right) * \left(\frac{2}{3}M_f - \frac{1}{3}M_d\right)\right]$$



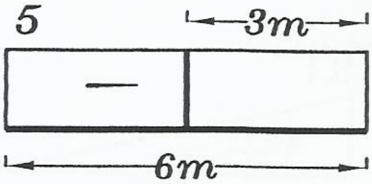
M_0 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0
في ال Diagram M_1

مساحة ال Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\,[\,10 * 6\,] * [\,5\,]$$

OR

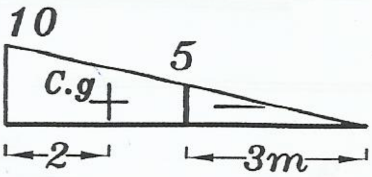


M_1 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_1
في ال Diagram M_0

مساحة ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\,[\,5 * 6\,] * [\,10\,]$$



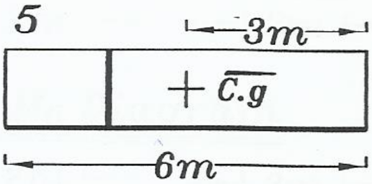
M_0 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0
في ال Diagram M_1

مساحة ال Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\,[\,\frac{1}{2} * 10 * 6\,] * [\,5\,]$$

OR

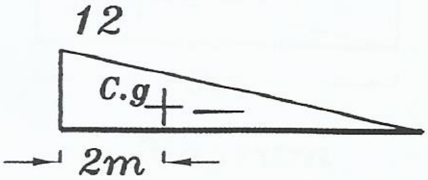


M_1 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_1
في ال Diagram M_0

مساحة ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\,[\,5 * 6\,] * [\,5\,]$$



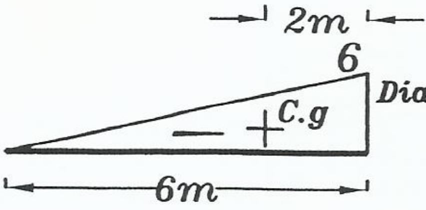
M_0 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0
في ال Diagram M_1

مساحة ال Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\,[\,\frac{1}{2}\,12 * 6\,] * [\,\frac{1}{3}\,6\,]$$

OR

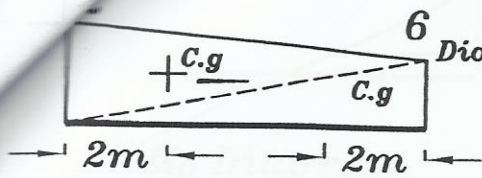


M_1 Diagram

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_1
في ال Diagram M_0

مساحة ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\,[\,\frac{1}{2}\,6 * 6\,] * [\,\frac{1}{3}\,12\,]$$

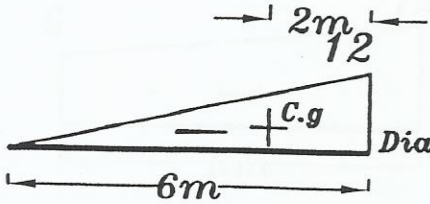


M_0 Diagram

مساحة ال Diagram M_0

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0 فى ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}12 * 6\right) * \left(\frac{1}{3}12\right) + \left(\frac{1}{2}\,6 * 6\right) * \left(\frac{2}{3}12\right)\right]$$



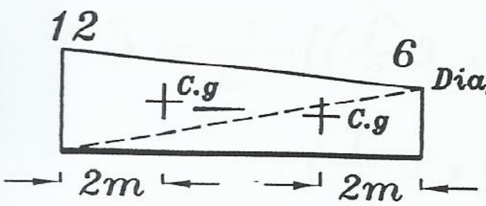
OR

M_1 Diagram

مساحة ال Diagram M_1

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_1 فى ال Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}12 * 6\right] * \left[\frac{1}{3}12 + \frac{2}{3}\,6\right]$$



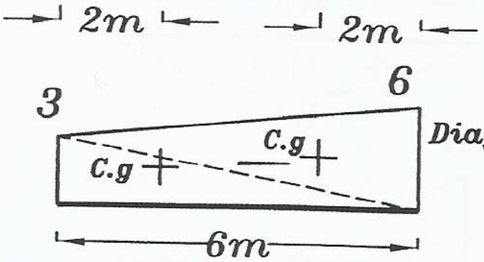
M_0 Diagram

مساحة ال Diagram M_0

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0 فى ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}12 * 6\right) * \left(\frac{1}{3}\,6 + \frac{2}{3}\,3\right) + \left(\frac{1}{2}\,6 * 6\right) * \left(\frac{2}{3}\,6 + \frac{1}{3}\,3\right)\right]$$

OR

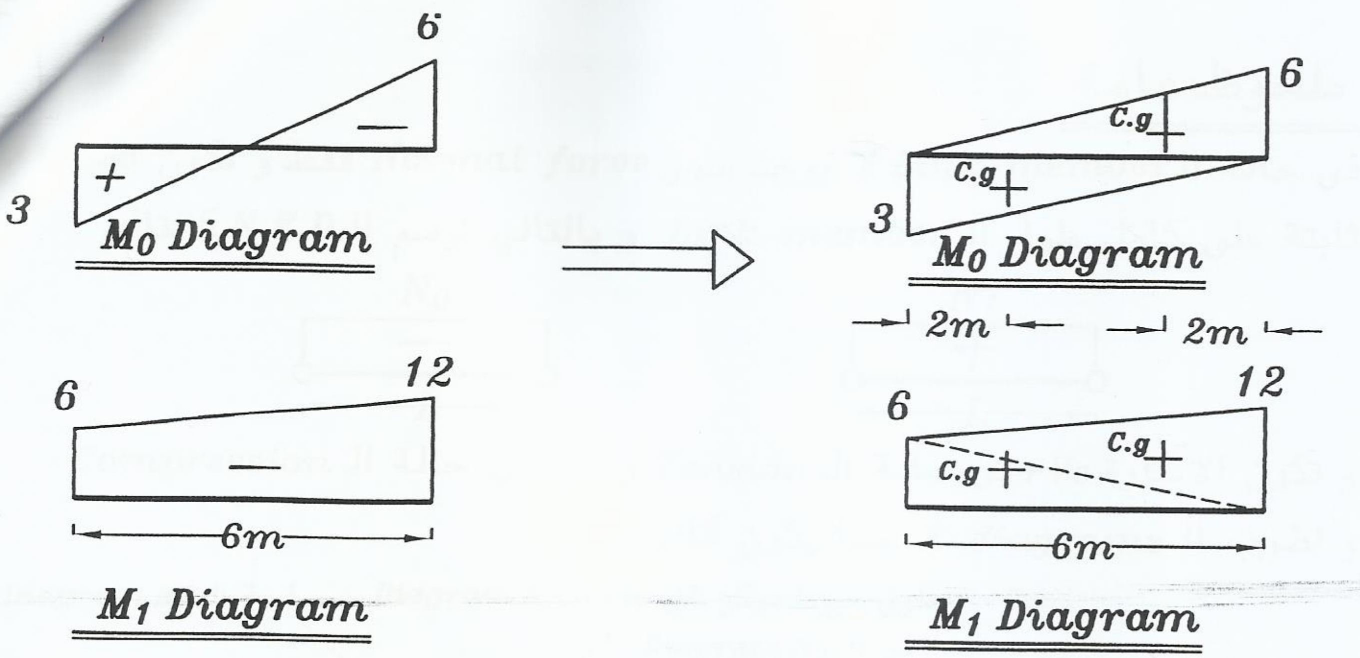


M_1 Diagram

مساحة ال Diagram M_1

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_1 فى ال Diagram M_0

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\,3 * 6\right) * \left(\frac{1}{3}\,6 + \frac{2}{3}12\right) + \left(\frac{1}{2}\,6 * 6\right) * \left(\frac{2}{3}\,6 + \frac{1}{3}12\right)\right]$$

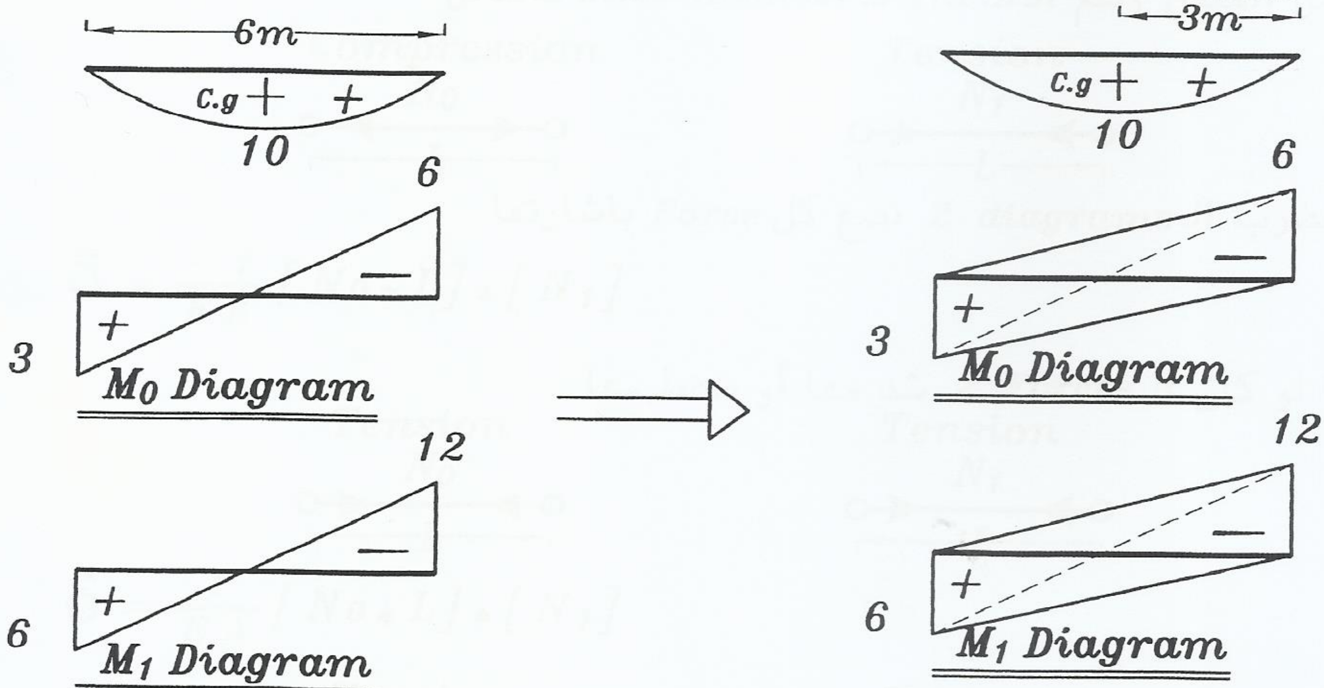


مساحة ال Diagram M_0

طول هبوط مركز ثقل هذا ال Diagram M_0 فى ال Diagram M_1

$$\delta = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2}3 * 6\right)*\left(-\frac{1}{3}12-\frac{2}{3}6\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}6 * 6\right)*\left(\frac{2}{3}12+\frac{1}{3}6\right)\Big]$$



$$\delta = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{2}{3}10 * 6\right)*\left(\frac{1}{2}6-\frac{1}{2}12\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}3 * 6\right)*\left(\frac{2}{3}6-\frac{1}{3}12\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}6 * 6\right)*\left(\frac{2}{3}12-\frac{1}{3}6\right)\Big]$$

ملحوظ هامة

فى حالة الـ *Link member* لا يوجد سوى *Normal force* فقط و تكون قيمتها ثابتة على كامل طول الـ *Link member* و بالتالى نرسم الـ *N.F.D* كالتالى

و تكون الاشارة *+Ve* فى حالة الـ *Tension* و *−Ve* فى حالة الـ *Compression*.

و لضرب الـ *2 diagrams* معا يكون كالتالى

مساحة الـ *Diagram* N_0 — طول هبوط مركز ثقل هذا الـ *Diagram* N_0 فى الـ *Diagram* N_1

$$\delta = \frac{-1}{EA}[N_0 * L] * [N_1]$$

OR

مساحة الـ *Diagram* N_1 — *Diagram* N_1 فى الـ *Diagram* N_0

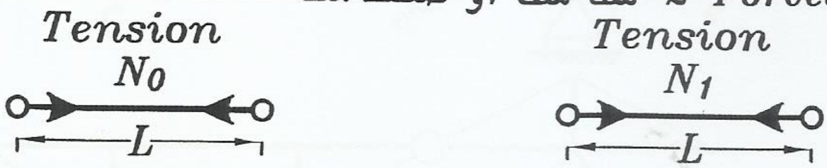
$$\delta = \frac{-1}{EA}[N_1 * L] * [N_0]$$

و من الممكن رسم الـ *N.F.D* للـ *Link member* كالتالى

و لضرب الـ *2 diagrams* نضع كل *Force* باشارتها

$$\delta = \frac{-1}{EA}[N_0 * L] * [N_1]$$

أما لو كان الـ *2 Forces* شد معا أو ضغط معا

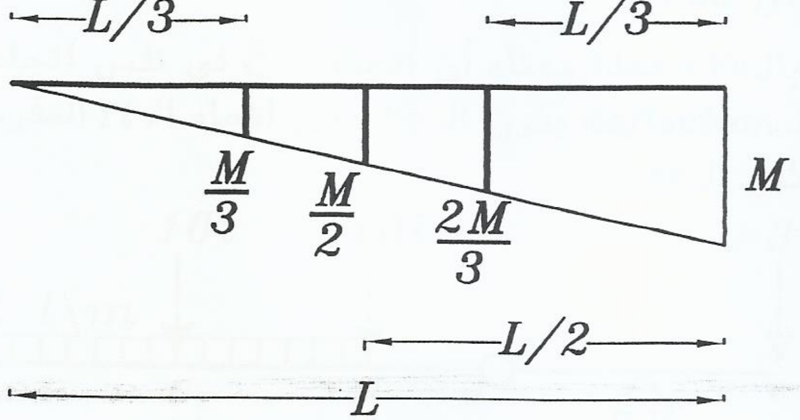


$$\delta = \frac{1}{EA}[N_0 * L] * [N_1]$$

$$\delta = \frac{1}{EA}[-N_0 * L] * [-N_1] = \frac{1}{EA}[N_0 * L] * [N_1]$$

ملحوظ هامة

فى حالة المثلث نحفظ القيم التالية



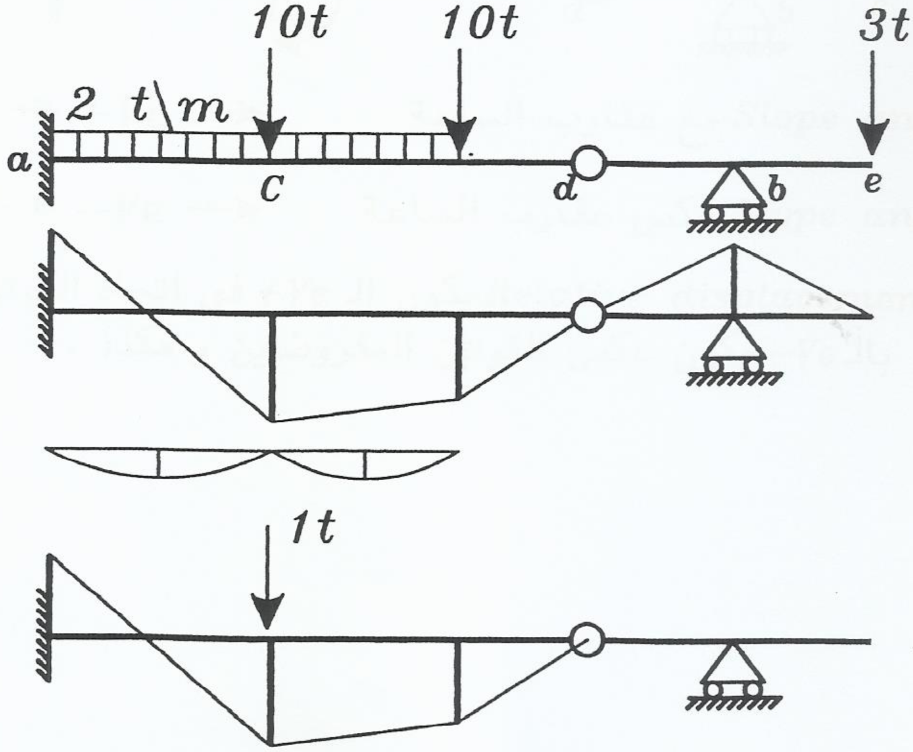
ملحوظات هامة جدا

١- فى حالة وجود *Parabola* لابد من ضرب الـ M_0 فى الـ M_1 و لايمكن العكس لاننا لا نستطيع حساب الـ *drop* للـ *Parabola* الا فى المنتصف .

٢- عند وجود كسرة فى أى من الـ M_0 أو الـ M_1 لا بد من تقسيم الاثنان الى مساحات مختلفة عند الكسرة .

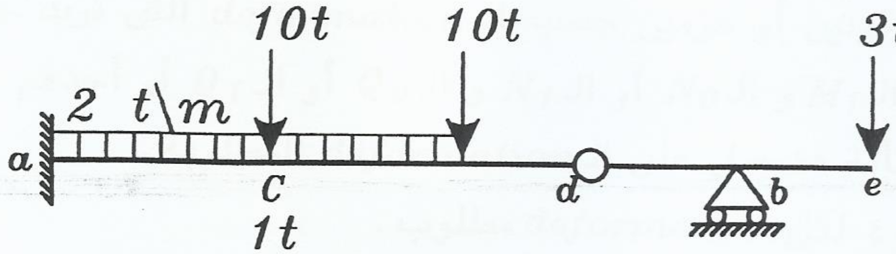
٣- نقط تقسيم المساحات فى الـ M_0 يجب أن تكون نقط لتقسيم المساحات فى الـ M_1 و العكس صحيح .

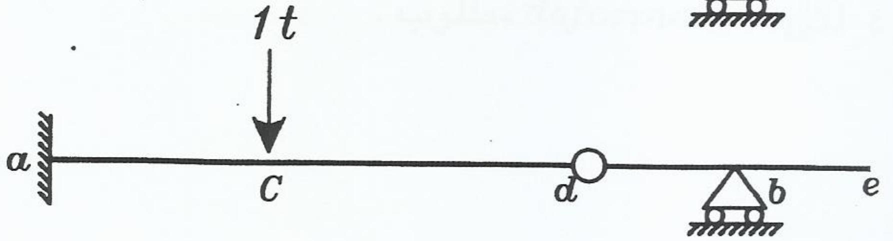
٤- نحسب الـ *moment* عند كل نقاط الكمرة كما فى الـ *Conjugate beam* .



٥- عند ضرب الـ M_0 فى الـ M_1 اذا كان الشكلان مرسومان فى نفس الجهة من الـ *member* تكون اشارة التكامل بالـ $+Ve$ و اذا كان مرسومان عكس بعض تكون اشارة التكامل بالـ $-Ve$.

٦- اذا كانت الـ δ بالـ $+Ve$ فهذا معناه أن اتجاه الـ δ فى نفس اتجاه الفرض فمثلا فى حالة الـ *deflection* يكون الـ $+Ve$ فى اتجاه الـ $1t$ المفروض و لو بالـ $-Ve$ يكون عكس الـ $1t$.

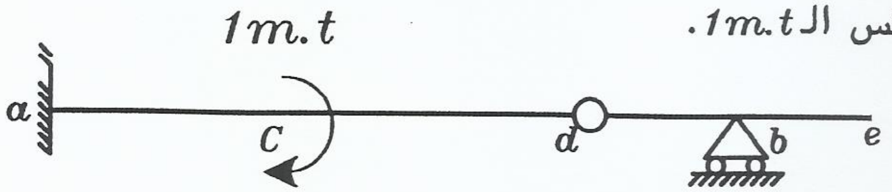




$\delta_c \longrightarrow +Ve \longrightarrow$ الـ *deflection* لاسفل

$\delta_c \longrightarrow -Ve \longrightarrow$ الـ *deflection* لاعلى

و فى حالة الـ *Slope sngle* يكون الـ $+Ve$ فى اتجاه الـ $1m.t$ المفروض و لو بالـ $-Ve$ يكون عكس الـ $1m.t$.



$\delta_c \longrightarrow +Ve \longrightarrow$ الـ *Slope angle* مع عقارب الساعة

$\delta_c \longrightarrow -Ve \longrightarrow$ الـ *Slope angle* عكس عقارب الساعة

و فى حالة الـ *Relative displacement* يكون الـ $+Ve$ فى اتجاه القوتين المفروضتين و لو بالـ $-Ve$ يكون عكس القوتين المفروضتين و هكذا .

خطوات الحل

١- نحدد الترمات التى سوف نستخدمها من المعادلة و ذلك حسب نوع المنشأ و المعطيات فى المسألة.

٢- نحل المنشأ الاصلى و نرسمله الـ M_0 أو الـ N_0 أو الـ Q_0 حسب الترم المستخدم.

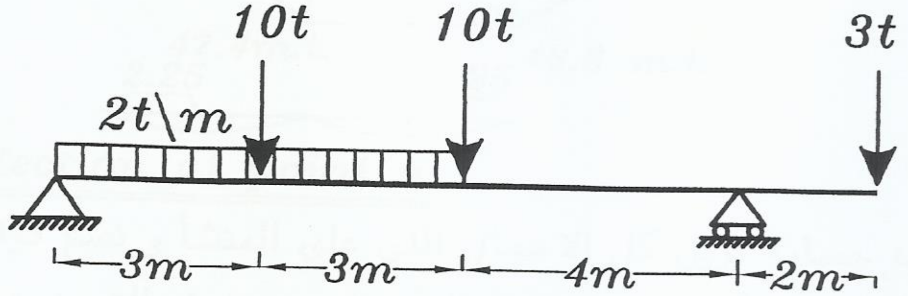
٣- حسب المطلوب حسابه نزيل كل الاحمال اللى على المنشأ و نضع قوة $1t$ أو عزم $1m.t$ أو قوتين أو عزمين حسب الـ $deformation$ التى نريد حسابها.

٤- نضرب الـ M_0 أو الـ M_1 و الـ N_0 أو الـ N_1 و الـ Q_0 أو الـ Q_1 أو أحدهم حسب الموجود فى المسألة فنحصل على الـ $deformation$ المطلوبة.

٥- نكرر الخطوتين ٣ و ٤ لكل $deformation$ مطلوب.

Example:

For the shown beam find the deflection at points (a,b) and the slope angle at points (a,c) using virtual work method.

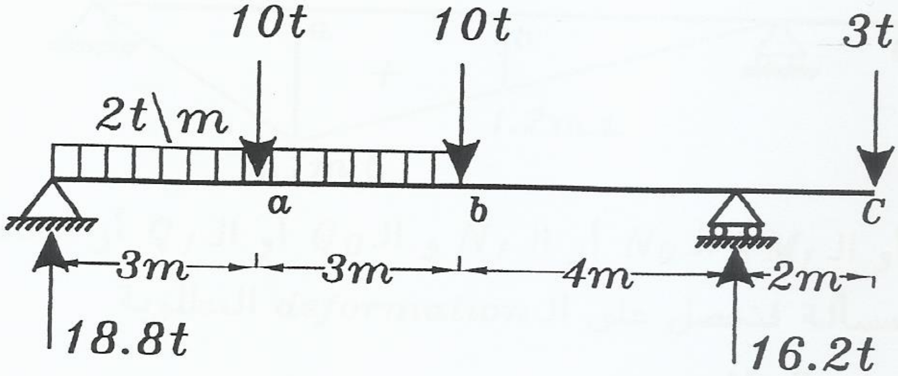


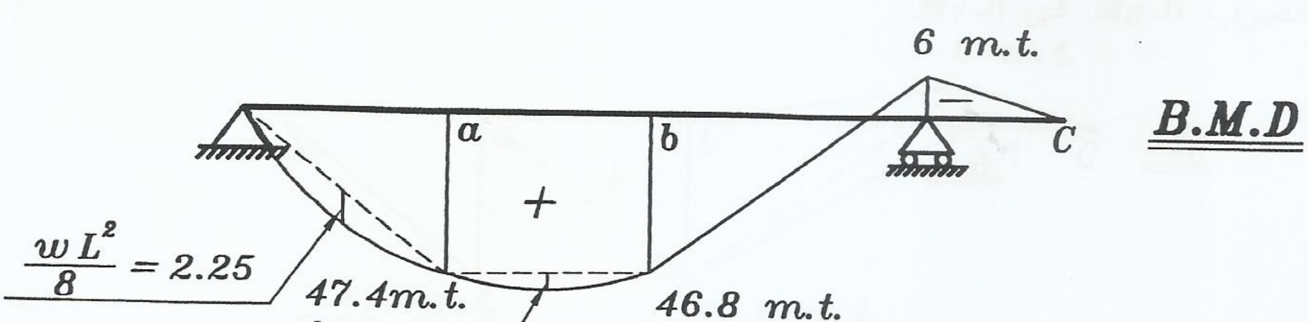
١- نحدد الترمات التى سوف نستخدمها من المعادلة و ذلك حسب نوع المنشأ و المعطيات فى المسألة.

و حيث أنها كمرة فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بالـ *moment* فقط حيث أنه لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير الـ *normal* و الـ *Shear* و لم يعطى الـ $G A_r$ أو الـ $E A$.

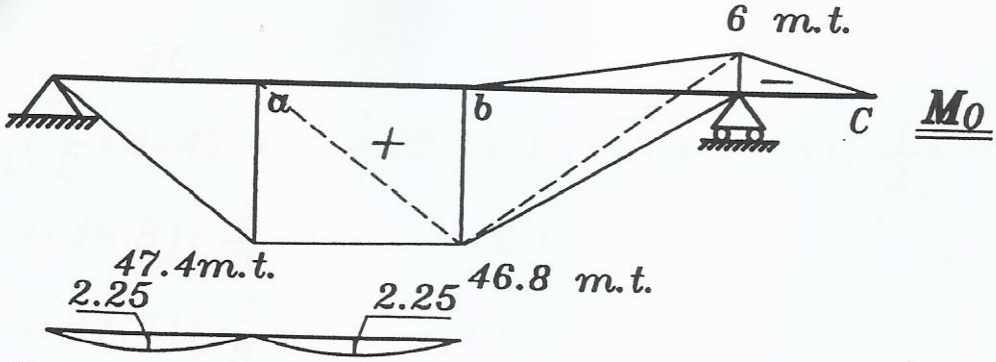
$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{E I} \, dL$$

٢- نحل المنشأ الاصلى و نرسمله الـ M_0.





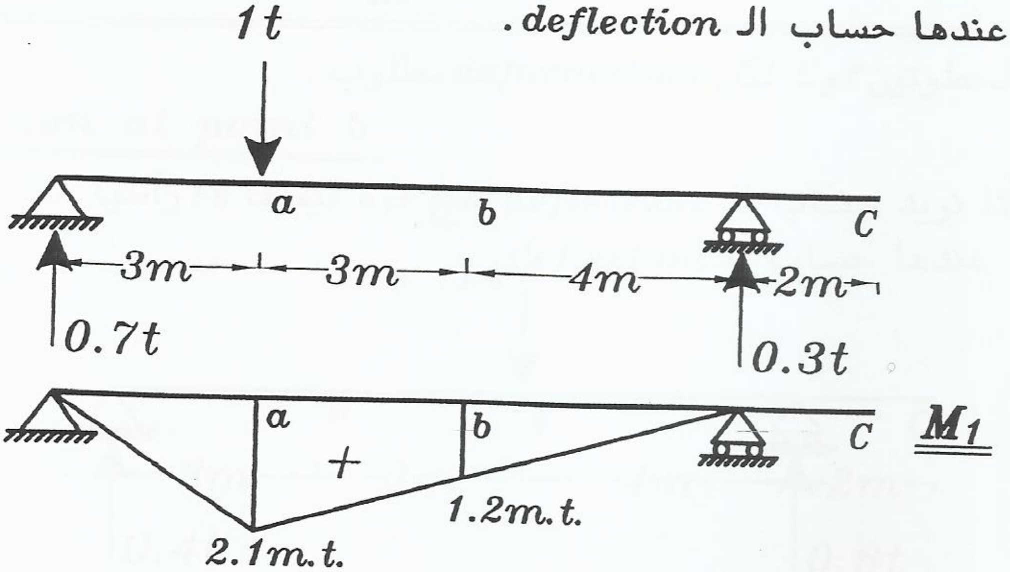
نفصل الـ *Parabola* و نقسم الاشكال



1-Deflection at point a

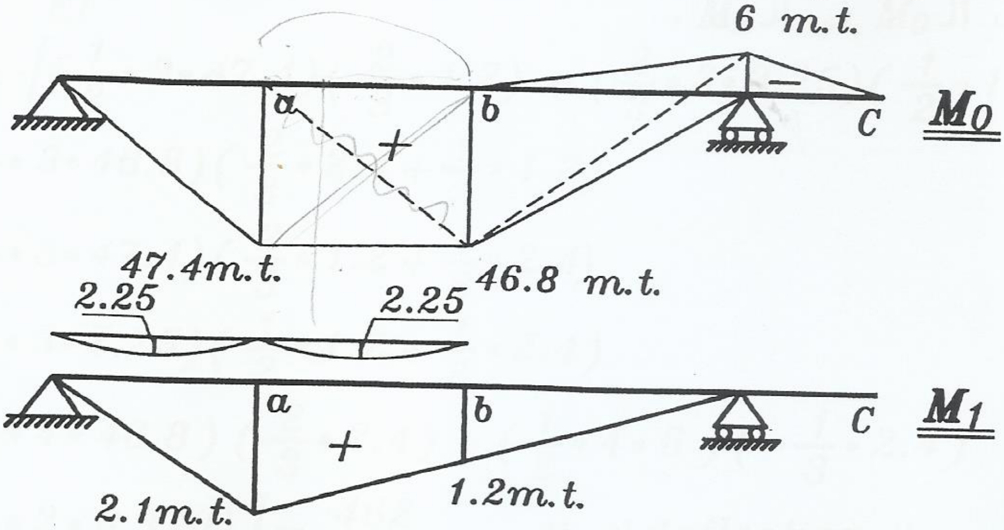
٣- حسب المطلوب حسابه نزيل كل الاحمال اللى على المنشأ و نضع قوة $1t$ أو عزم $1m.t$ أو قوتين أو عزمين حسب الـ *deformation* التى نريد حسابها.

و هنا لاننا نريد حساب الـ *deflection* نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *deflection*.



٤- نضرب الـ M_0 أو الـ M_1 و الـ N_0 أو الـ N_1 و الـ Q_0 أو الـ Q_1 أو أحدهم حسب الموجود فى المسألة فنحصل على الـ *deformation* المطلوبة.

وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_1.



$$\delta_a = \int \frac{M_0\, M_1}{EI}\, dL$$

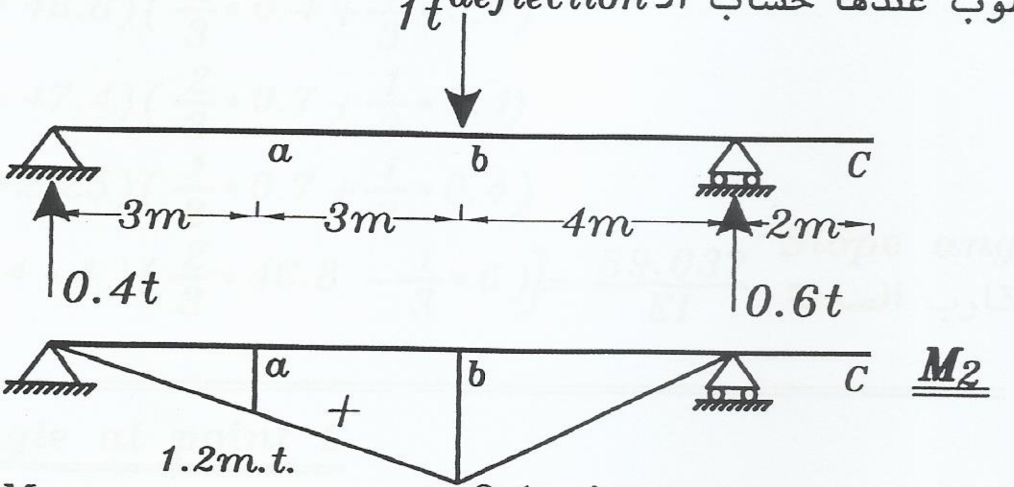
$$\delta_a = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2} \ast 3 \ast 47.4\right)\left(\frac{2}{3} \ast 2.1\right) + \left(\frac{2}{3} \ast 3 \ast 2.25\right)\left(\frac{1}{2} \ast 2.1\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 3 \ast 46.8\right)\left(\frac{2}{3} \ast 1.2 + \frac{1}{3} \ast 2.1\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 3 \ast 47.4\right)\left(\frac{2}{3} \ast 2.1 + \frac{1}{3} \ast 1.2\right)$$
$$+ \left(\frac{2}{3} \ast 3 \ast 2.25\right)\left(\frac{1}{2} \ast 2.1 + \frac{1}{2} \ast 1.2\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 4 \ast 46.8\right)\left(\frac{2}{3} \ast 1.2\right) + \left(\frac{1}{2} \ast 4 \ast 6\right)\left(-\frac{1}{3} \ast 1.2\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 2 \ast 6\right)(0)\Big] = \frac{415.05}{EI}$$

الـ *deflection* لاسفل

٥- نكرر الخطوتين ٣ و ٤ لكل *deformation* مطلوب .

2-Deflection at point b

و هنا لاننا نريد حساب الـ *deflection* نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *deflection*



$$\delta_b = \int \frac{M_0\, M_2}{EI}\, dL$$

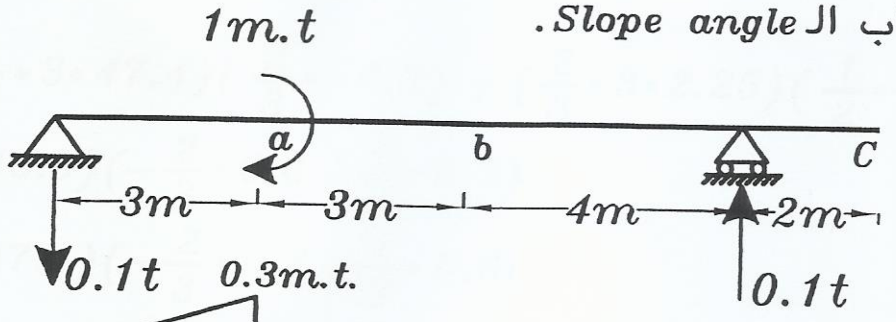
وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_2 .

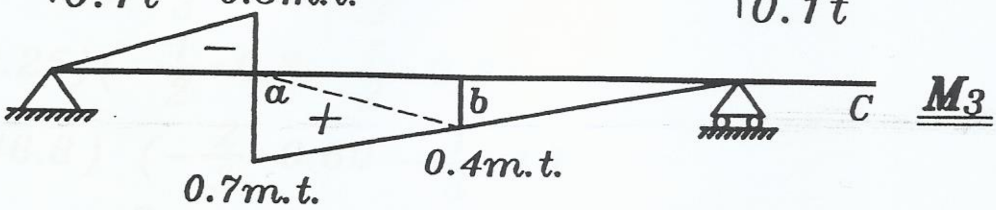
$$\delta_b = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2} \ast 3 \ast 47.4\right)\left(\frac{2}{3} \ast 1.2\right) + \left(\frac{2}{3} \ast 3 \ast 2.25\right)\left(\frac{1}{2} \ast 1.2\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 3 \ast 46.8\right)\left(\frac{2}{3} \ast 2.4 + \frac{1}{3} \ast 1.2\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 3 \ast 47.4\right)\left(\frac{2}{3} \ast 1.2 + \frac{1}{3} \ast 2.4\right)$$
$$+ \left(\frac{2}{3} \ast 3 \ast 2.25\right)\left(\frac{1}{2} \ast 1.2 + \frac{1}{2} \ast 2.4\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 4 \ast 46.8\right)\left(\frac{2}{3} \ast 2.4\right) + \left(\frac{1}{2} \ast 4 \ast 6\right)\left(-\frac{1}{3} \ast 2.4\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \ast 2 \ast 6\right)(0)\Big] = \frac{462}{EI}$$

الـ *deflection* لاسفل

Slope angle at point a

و هنا لاننا نريد حساب ال*Slope angle* نضع عزم قيمته $1m.t$ عند النقطة المطلوب عندها حساب ال*Slope angle*.





M_3

Slope angle

وهنا نضرب الM_0 فى الM_3 .

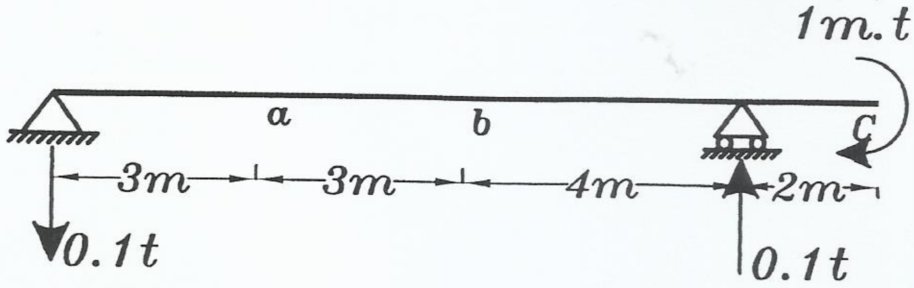
$$\delta_a = \int \frac{M_0\, M_3}{EI}\, dL$$

$$\delta_a = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2}*3*47.4\right)\left(\frac{2}{3}*-0.3\right) + \left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(\frac{1}{2}*-0.3\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}*3*46.8\right)\left(\frac{2}{3}*0.4+\frac{1}{3}*0.7\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}*3*47.4\right)\left(\frac{2}{3}*0.7+\frac{1}{3}*0.4\right)$$
$$+ \left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(\frac{1}{2}*0.7+\frac{1}{2}*0.4\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}*0.4*4\right)\left(\frac{2}{3}*46.8-\frac{1}{3}*6\right)\Big] = \frac{89.037}{EI}$$

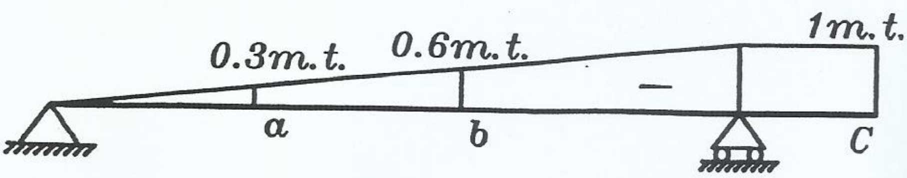
ال*Slope angle* مع عقارب الساعة

4-Slope angle at point C

و هنا لاننا نريد حساب ال*Slope angle* نضع عزم قيمته $1m.t$ عند النقطة المطلوب عندها حساب ال*Slope angle*.



M_4



angle

وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_4 .

$$\delta_C = \int \frac{M_0\, M_4}{EI}\, dL$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2}*3*47.4\right)\left(\frac{2}{3}*-0.3\right) + \left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(\frac{1}{2}*-0.3\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}*3*46.8\right)\left(-\frac{2}{3}*0.6-\frac{1}{3}*0.3\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}*3*47.4\right)\left(-\frac{2}{3}*0.3+\frac{1}{3}*0.6\right)$$

$$+ \left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(-\frac{1}{2}*0.3-\frac{1}{2}*0.6\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}*4*46.8\right)\ \left(-\frac{2}{3}*0.60-\frac{1}{3}*1\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}*4*6\right)\ \left(\frac{2}{3}*1-\frac{1}{3}*0.6\right) + \left(\frac{1}{2}*2*6\right)\ (1)\Big]$$

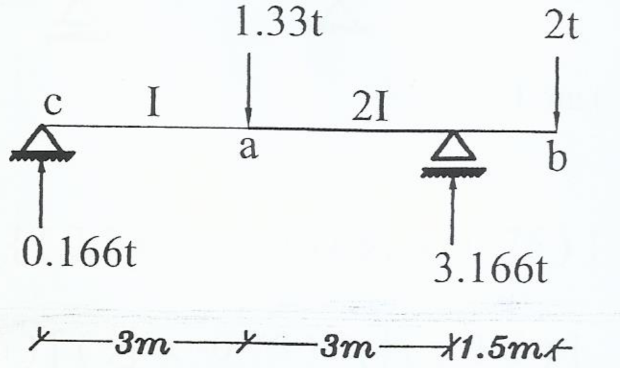
$= \dfrac{-132.7}{EI}$ الـ Slope angle

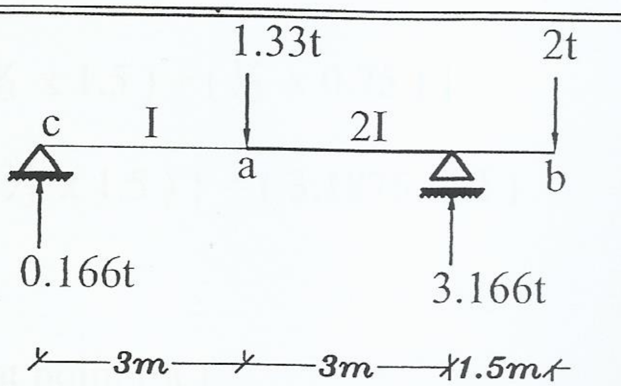
عكس عقارب الساعة

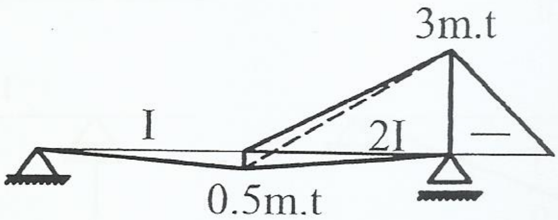
و يفضل دائما ضرب الـ M_0 فى الـ Diagram الاخر حتى يكون دائما الترم الخاص بالـ M_0 فى المعادلة ثابت و اللى يتغير فى كل deformation مطلوب هو الترم الاخر فقط .

ample:

For the shown beam find the deflection at points (a , b) and the slope angle at points (a , c) using virtual work method.



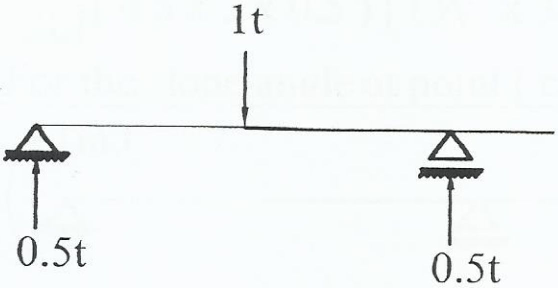


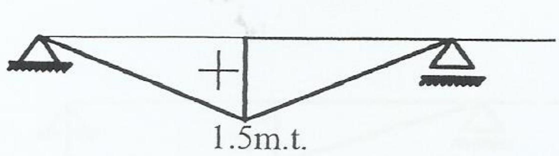


B.M.D (M_0)

1- Deflection

For the deflection at point (a)



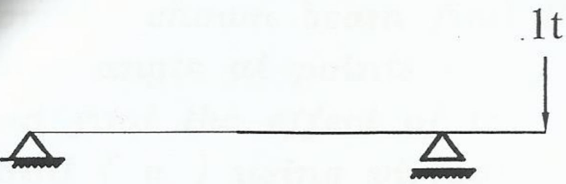


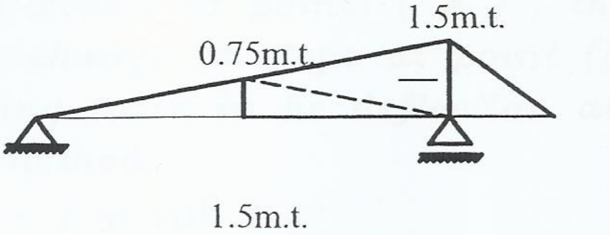
B.M.D (M_1)

$$\delta\, a\,(\text{vertical}) = \frac{1}{EI}\left\{ (0.5 \times 3 \times 0.5)\left(\tfrac{2}{3} \times 1.5\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2EI}(0.5 \times 3 \times 1.5)\left[\left(\tfrac{2}{3} \times 0.5\right) - \left(\tfrac{1}{3} \times 3\right)\right]\right\} = (\text{Zero} / EI)$$

For the deflection at point (b)





B.M.D (M_2)

$$\delta b \text{ (vertical) } = \frac{1}{EI}\{ (0.5 \times 3 \times 0.5)(\tfrac{2}{3} \times -0.75)\}$$

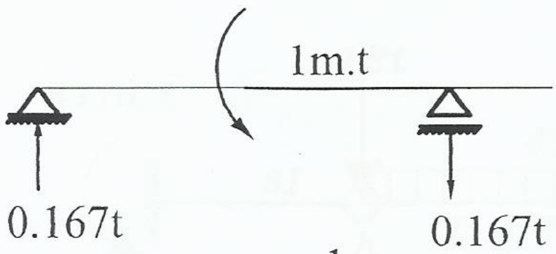
$$+\frac{1}{2EI}\{(0.5 \times 3 \times 1.5)[(\tfrac{2}{3} \times -0.75) - (\tfrac{1}{3} \times 1.5)]$$

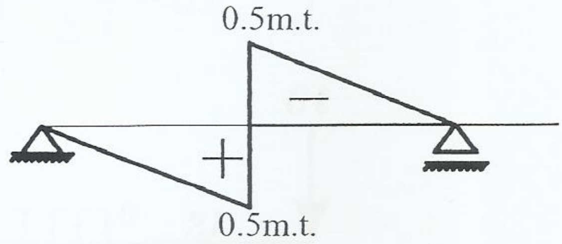
$$+(0.5 \times 3 \times 3)[(\tfrac{2}{3} \times 1.5) + (\tfrac{1}{3} \times 0.75)]$$

$$+(0.5 \times 1.5 \times 3)(\tfrac{2}{3} \times 1.5)\} = (3.1875 / EI)$$

2- Slope angle:

For the slope angle at point (a)



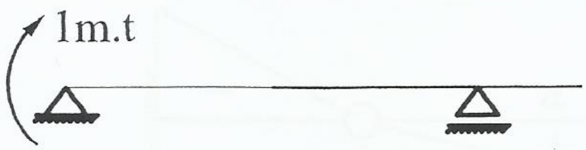


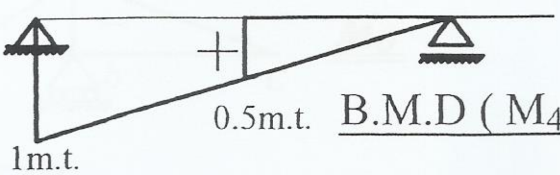
$$\alpha a \text{ (vertical) } = \frac{1}{EI}\{ (0.5 \times 3 \times 0.5)(\tfrac{2}{3} \times 0.5)$$

B.M.D (M_3)

$$+\frac{1}{2EI}(0.5 \times 3 \times 0.5)[(\tfrac{1}{3} \times 3) - (\tfrac{2}{3} \times 0.5)]\} = (0.50 / EI)$$

For the slope angle at point (c)





B.M.D (M_4)

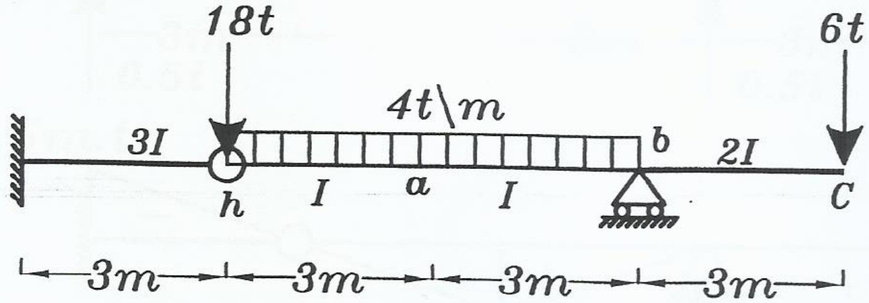
$$\alpha b \text{ (vertical) } = \frac{1}{EI}\{ (0.5 \times 3 \times 0.5)[(\tfrac{2}{3} \times -0.5) + (\tfrac{1}{3} \times -1)]$$

$$+\frac{1}{2EI}(0.5 \times 3 \times 0.50)[(\tfrac{2}{3} \times -0.5) + (\tfrac{1}{3} \times 3)]\} = (-0.25 / EI)$$

Example:

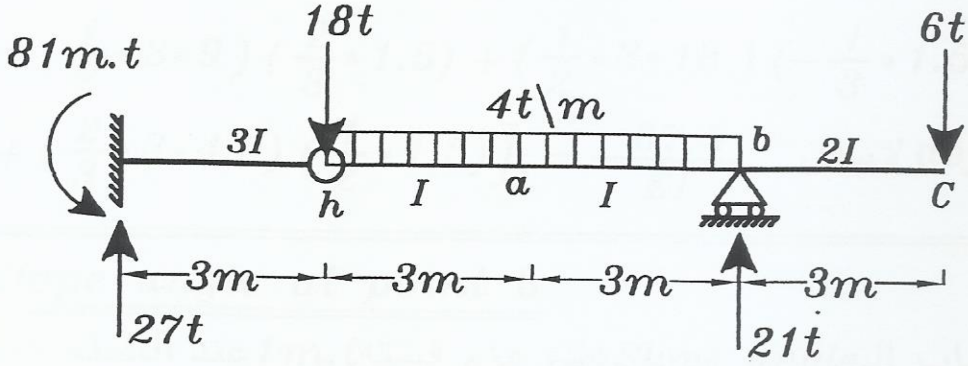
For the shown beam find the deflection at points (a) , the slope angle at points (b) , the change in slope at point (h) and find the effect of the shearing force in he deflection at point (a) using virtual work method.

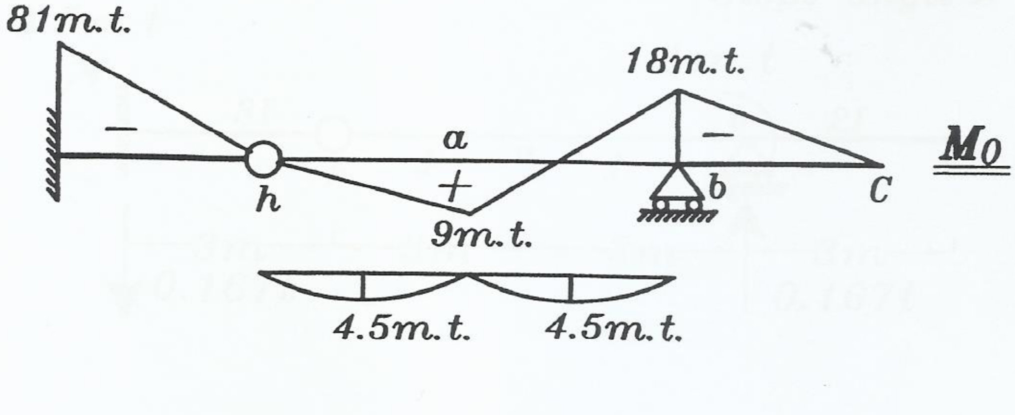
($EI = 100000$ t / m & $GA_r = 4 \times 10^6$ t)



و حيث أنها كمرة فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بال moment فقط حيث أنه لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير ال normal و ال Shear و لم يعطى ال GA_r أو الـ EA و لكنه في أخر مطلوب طلب تأثير الـ Shear و أعطى قيمة الـ GA_r و لكننا لن ندخل تأثير ال Shear الا فى أخر مطلوب .

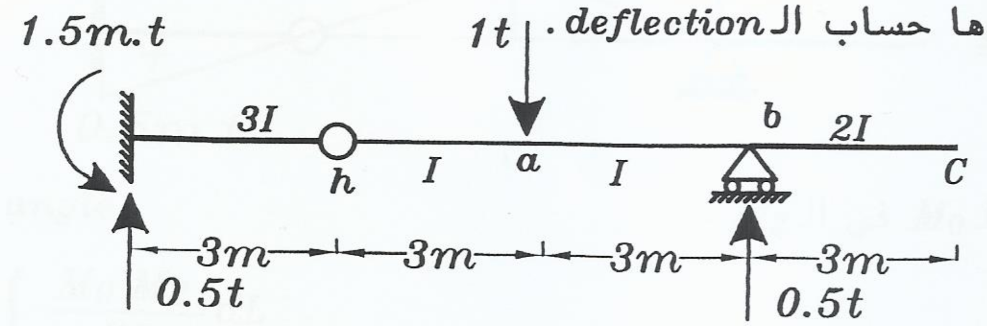
$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL$$

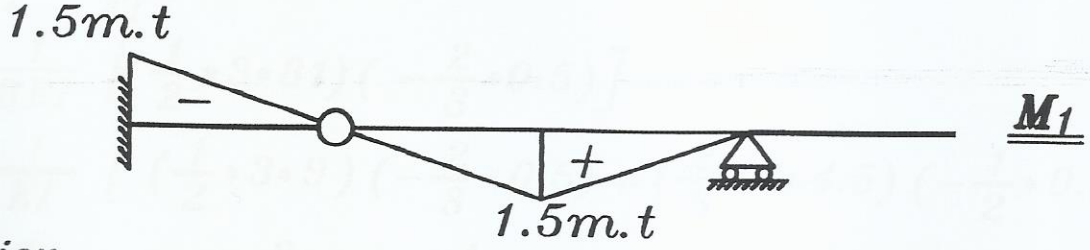




flection at point a

و هنا لاننا نريد حساب ال *deflection* نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب ال *deflection*.





وهنا نضرب ال M_0 فى ال M_1.

deflection

$$\delta_a = \int \frac{M_0\, M_1}{EI}\, dL$$

$$\delta_a = \frac{1}{3EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*81\right)\left(\frac{2}{3}*1.5\right)\right]$$

$$+\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(\frac{2}{3}*1.5\right)+\left(\frac{2}{3}*3*4.5\right)\left(\frac{1}{2}*1.5\right)\right.$$

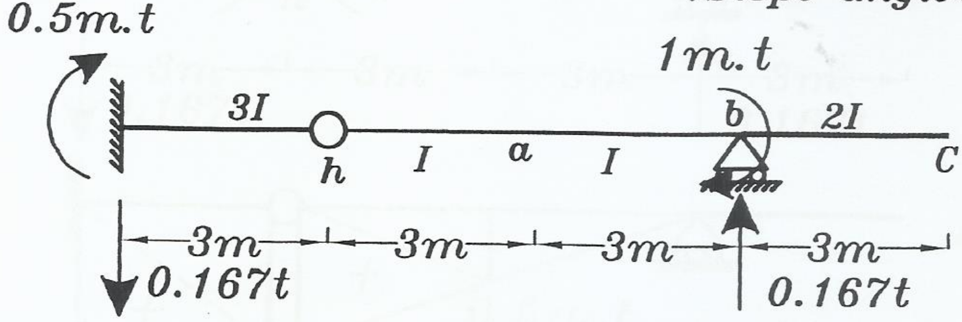
$$+\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(\frac{2}{3}*1.5\right)+\left(\frac{1}{2}*3*18\right)\left(-\frac{1}{3}*1.5\right)$$

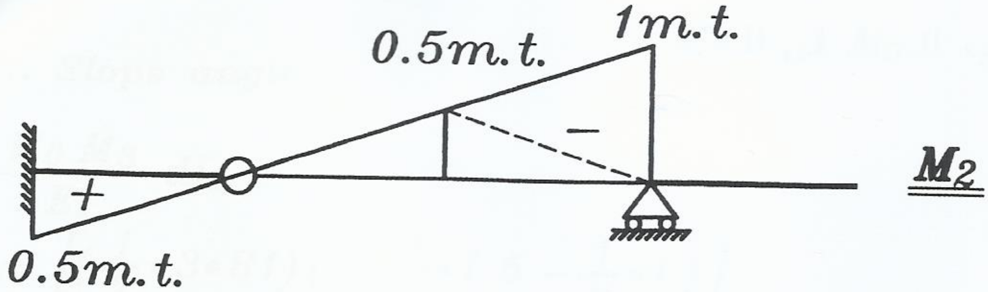
$$\left.+\left(\frac{2}{3}*3*4.5\right)\left(\frac{1}{2}*1.5\right)\right] = \frac{67.5}{EI}$$

ال *deflection* لاسفل

2–Slope angle at point b

و هنا لاننا نريد حساب ال *Slope angle* نضع عزم قيمته $1m.t$ عند النقطة المطلوب عندها حساب ال *Slope angle*.





وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_2 .

Slope angle

$$\delta_b = \int \frac{M_0\, M_2}{EI}\, dL$$

$$\delta_b = \frac{1}{3EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*81\right)\left(-\frac{2}{3}*0.5\right)\right]$$

$$+\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(-\frac{2}{3}*0.5\right)+\left(\frac{2}{3}*3*4.5\right)\left(-\frac{1}{2}*0.5\right)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(-\frac{2}{3}*0.5-\frac{1}{3}*1\right)$$

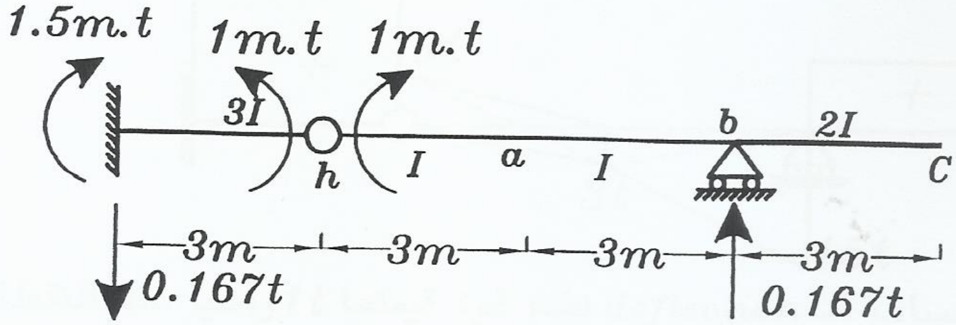
$$+\left(\frac{1}{2}*3*18\right)\left(\frac{1}{3}*0.5+\frac{2}{3}*1\right)$$

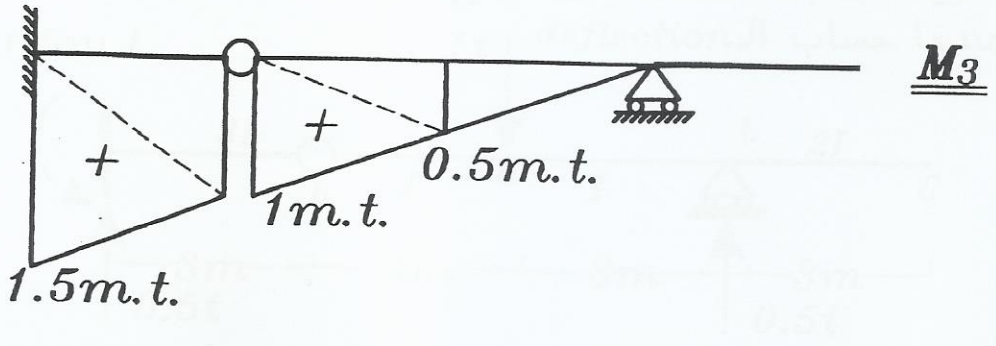
$$\left.+\left(\frac{2}{3}*3*4.5\right)\left(\frac{1}{2}*0.5+\frac{1}{2}*1\right)\right] = \frac{-13.5}{EI}$$

الـ Slope angle عكس عقارب الساعة

3-Change in Slope angle at point h

و هنا لاننا نريد حساب الـ Change in Slope angle نضع عزمين قيمة كلا منهما 1m.t عكس بعض فى الاتجاه عند النقطة المطلو ب عندها حساب الـ Change .





وهنا نضرب ال M_0 فى ال M_3 .

Change in Slope angle

$$\delta_h = \int \frac{M_0\, M_3}{EI}\, dL$$

$$\delta_h = \frac{1}{3EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*81\right)\left(-\frac{2}{3}*1.5-\frac{1}{3}*1\right)\right]$$

$$+\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(\frac{2}{3}*0.5+\frac{1}{3}*1\right)+\left(\frac{2}{3}*3*4.5\right)\left(\frac{1}{2}*0.5\right)\right.$$

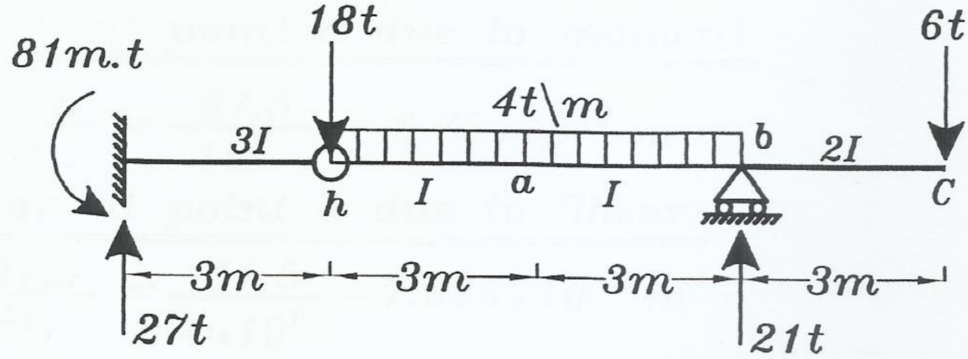
$$+\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(\frac{2}{3}*0.5\right)$$

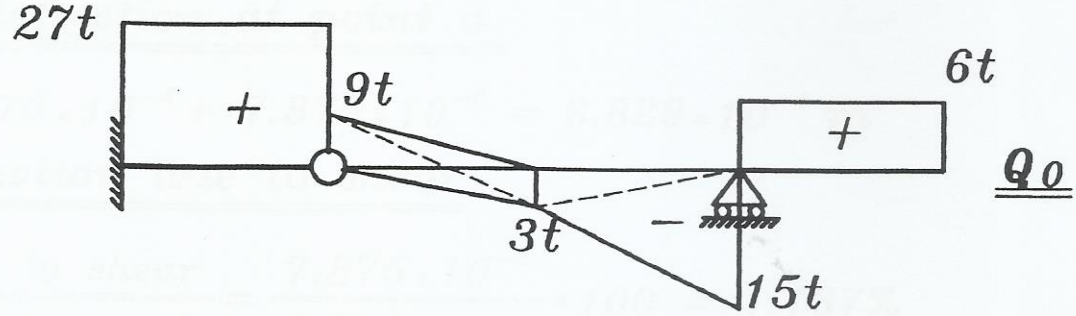
$$+\left(\frac{1}{2}*3*18\right)\left(-\frac{1}{3}*0.5\right)$$

$$\left.+\left(\frac{2}{3}*3*4.5\right)\left(-\frac{1}{2}*0.5\right)\right] = \frac{-36}{EI}$$

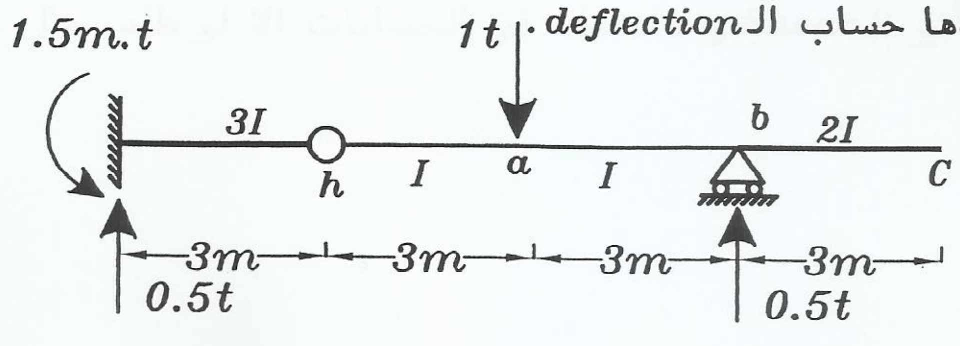
4–Effect of the shear force for deflection at point a

نحتاج اولا الى رسم ال *Shear force diagram* للكمرة الاصلية و نسميه Q_0

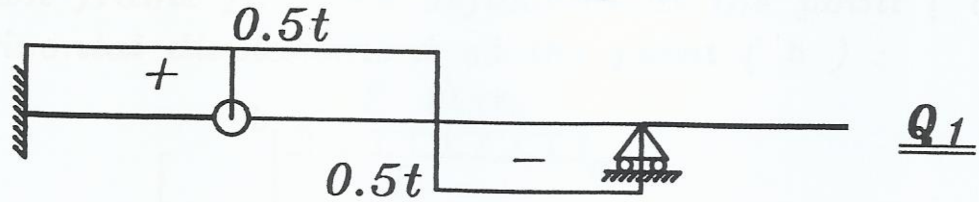




و هنا لاننا نريد حساب ال *deflection* نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب ال *deflection*.



ثم نرسم الـ Shear force diagram لهذه الكمرة و نسميه Q_1



وهنا نضرب الـ Q_0 فى الـ Q_1 لحساب قيمة الـ deflection نتيجة تأثير الـShear.

deflection

$$\delta_a = \int \frac{Q_0\, Q_1}{EI}\, dL$$

$$\delta_a = \frac{1}{3GA_r}\left[(3*27)(0.5)\right]$$

$$+\ \frac{1}{GA_r}\left[\left(\frac{1}{2}*3\right)\left(\frac{1}{2}*9-\frac{1}{2}*3\right)+\left(\frac{1}{2}*3\right)\left(\frac{1}{2}*3+\frac{1}{2}*15\right)\right]$$

$$= \frac{31.5}{GA_r}$$ الـ deflection لاسفل

Deflection at point a due to moment

$$\delta_a = \frac{67.5}{EI} = \frac{67.5}{10^5} = 6.75*10^{-4}\ m$$

Deflection at point a due to Shear

$$\delta_a = \frac{31.5}{GA_r} = \frac{31.5}{4*10^6} = 7.875*10^{-6}\ m$$

Total deflection at point a

$$\delta_a = 6.75*10^{-4} + 7.875*10^{-6} = 6.829*10^{-4}\ m$$

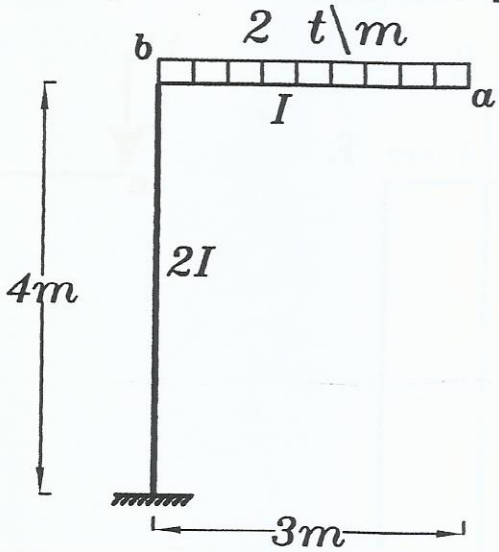
% deflection due to shear

$$\frac{\delta_{a\ \text{due to shear}}}{\delta_{a\ \text{Total}}} = \frac{7.875*10^{-6}}{6.829*10^{-4}}*100 = 1.167\%$$

لذلك نهمل تأثير الـShear و لا ندخله فى الحسابات الا لو طلب مثل هذه المسألة.

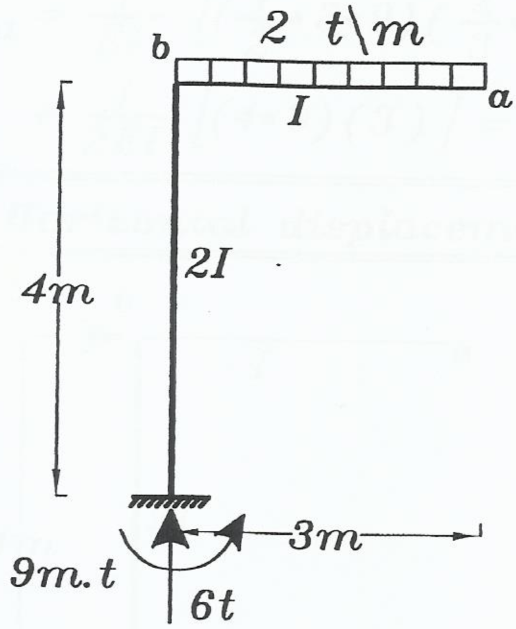
...ample:

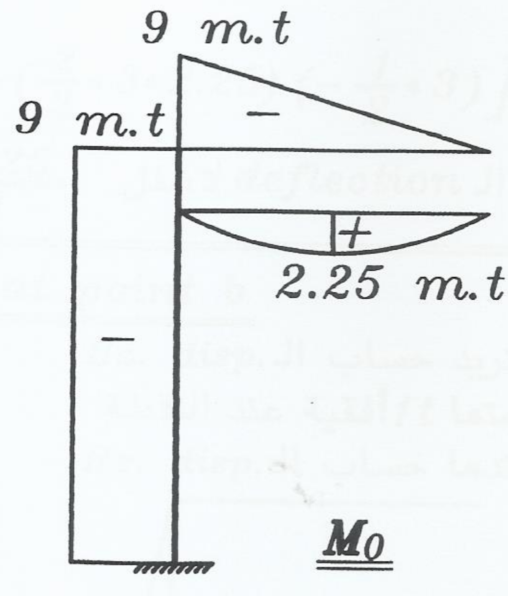
...or the shown frame find the deflection at the point (a), and the horizontal displacement at the point (b).



حيث أنه Frame فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بال moment فقط حيث أنه لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير ال normal و ال Shear و لم يعطى ال $G\,A_r$ أو ال $E\,A$.

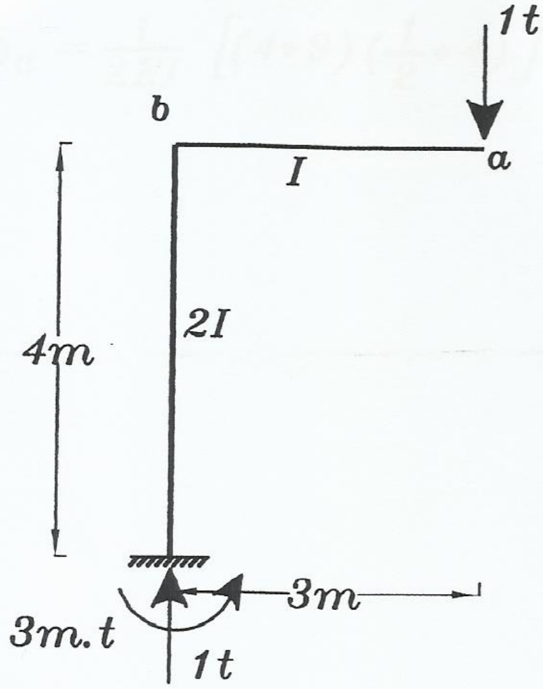
$$\delta = \int \frac{M_0\,M_1}{E\,I}\,dL$$

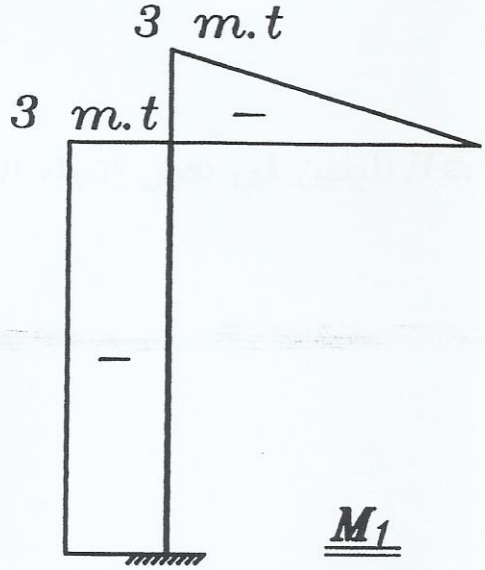




Deflection at point a

و هنا لاننا نريد حساب الـ deflection نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ deflection.





$\underline{M_1}$

وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_1.

deflection

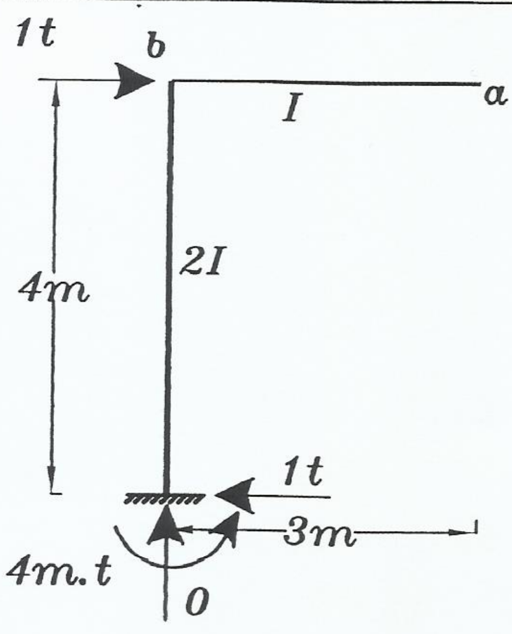
$$\delta_a = \int \frac{M_0\, M_1}{EI}\, dL$$

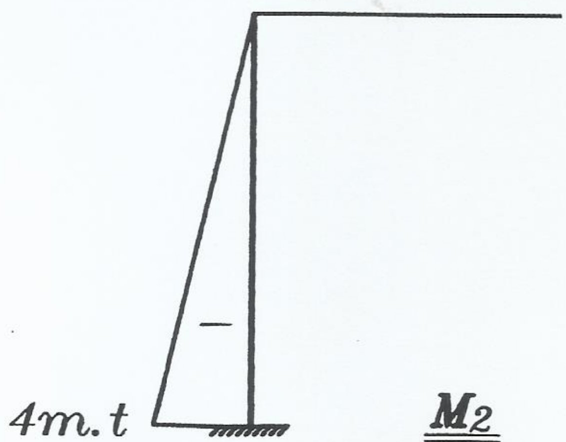
$$\delta_a = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*9\right)\left(\frac{2}{3}*3\right)+\left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(-\frac{1}{2}*3\right)\right]$$

$$+\ \frac{1}{2EI}\left[(4*9)(3)\right] = \frac{74.25}{EI}$$ الـ deflection لاسفل

2–Horizontal displacement at point b

و هنا لاننا نريد حساب الـ Hz. disp. نضع قوة قيمتها $1t$ أفقية عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ Hz. disp.





$\underline{M_2}$

...ontal displacement

وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_2 .

$$\delta_a = \int \frac{M_0 M_2}{EI} dL$$

$$\delta_a = \frac{1}{2EI} \left[(4*9)(\frac{1}{2}*4)\right] = \frac{36}{EI}$$

الـ $Hz.\ disp.$ لليمين فى نفس اتجاه الـ $1t$

Example:

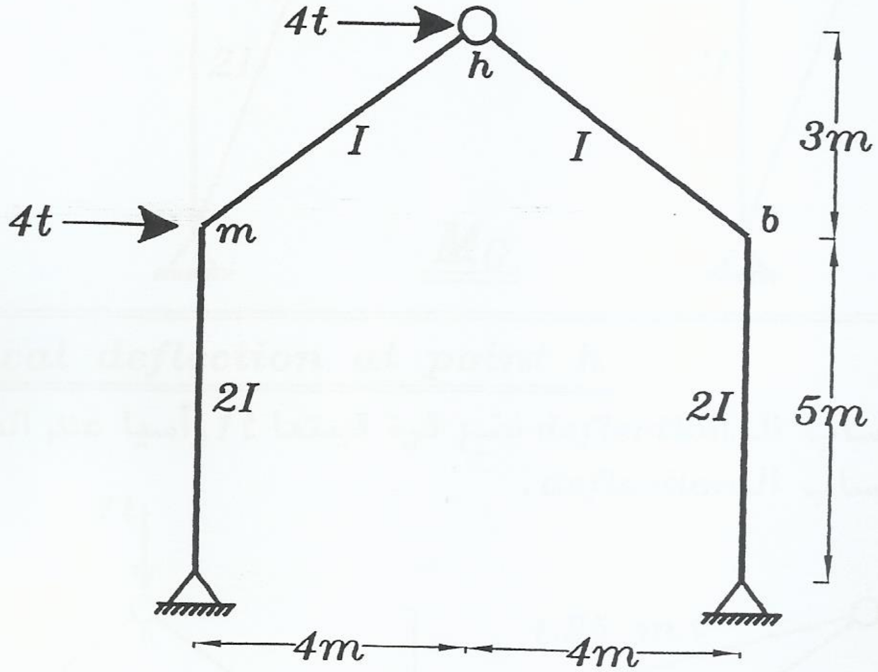
For the shown frame find :

1 – The vertical deflection at points (h) .

2 – The horizontal displacement at point (b) .

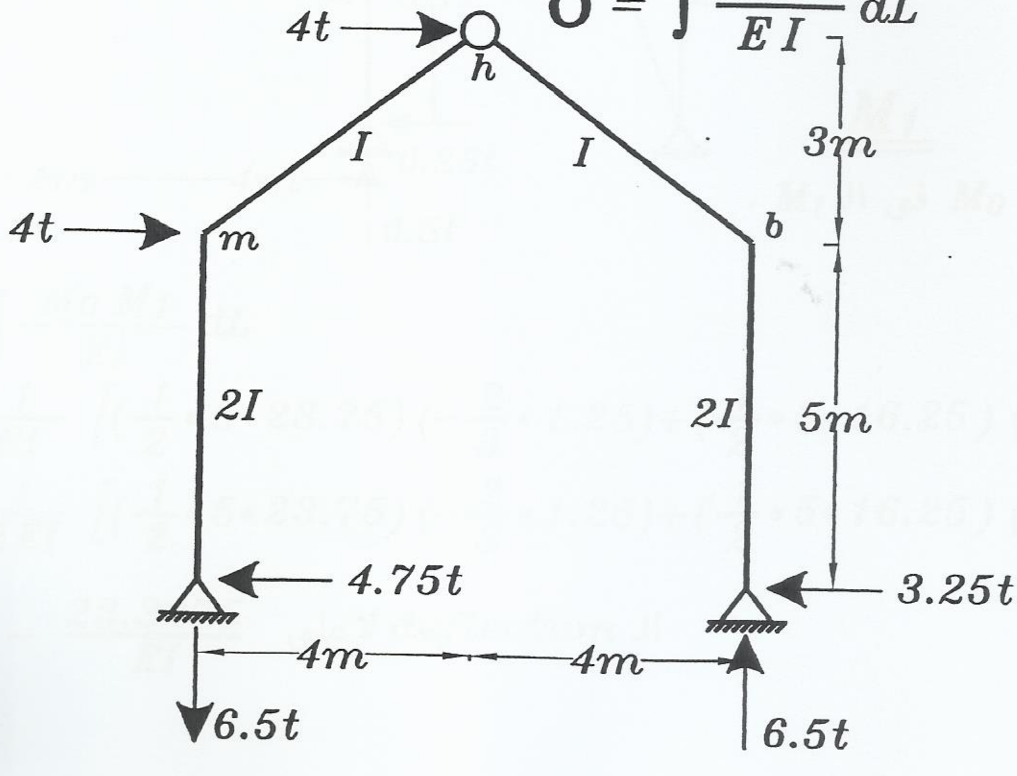
3 – The change in slope angle at point (h) .

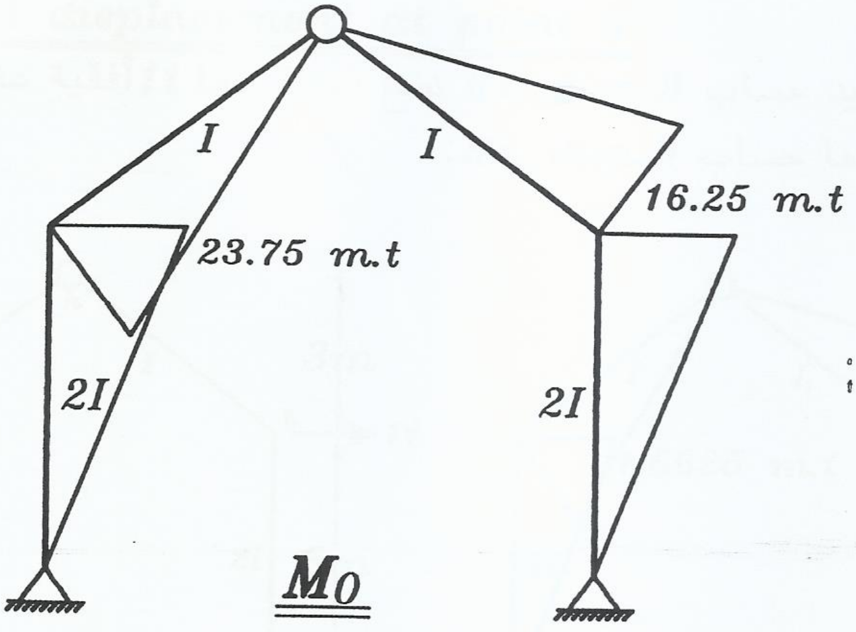
4 – The relative displacement between points (m & b) .



حيث أنه Frame فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بالـ moment فقط حيث أنه لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير الـ normal و الـ Shear و لم يعطى الـ $G A_r$ أو الـ $E A$.

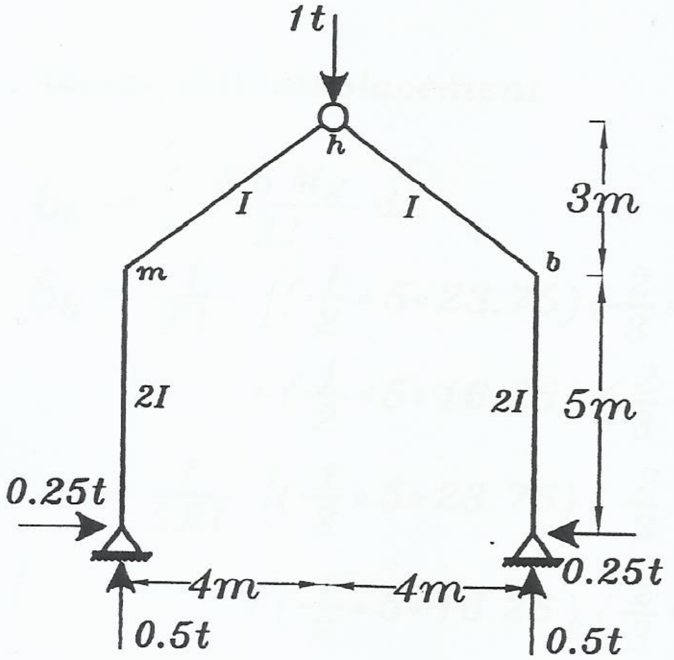
$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{E I} dL$$

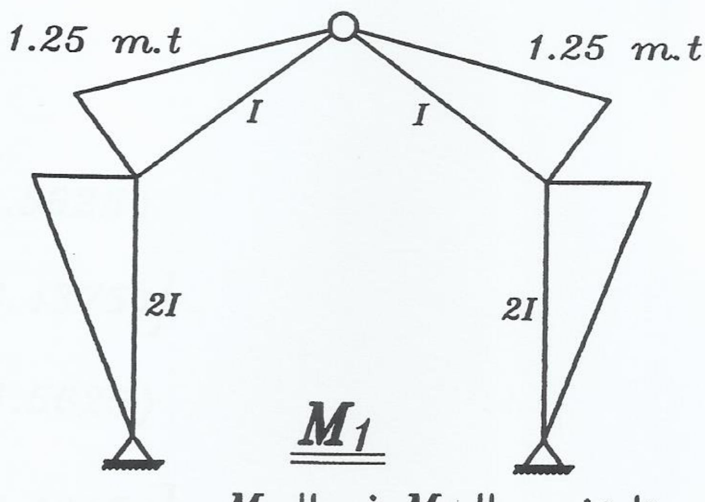




1-Vertical deflection at point h

و هنا لاننا نريد حساب ال *deflection* نضع قوة قيمتها *1t* رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب ال *deflection*.





وهنا نضرب ال M_0 فى ال M_1 .

$$\delta_h = \int \frac{M_0\, M_1}{EI}\, dL$$

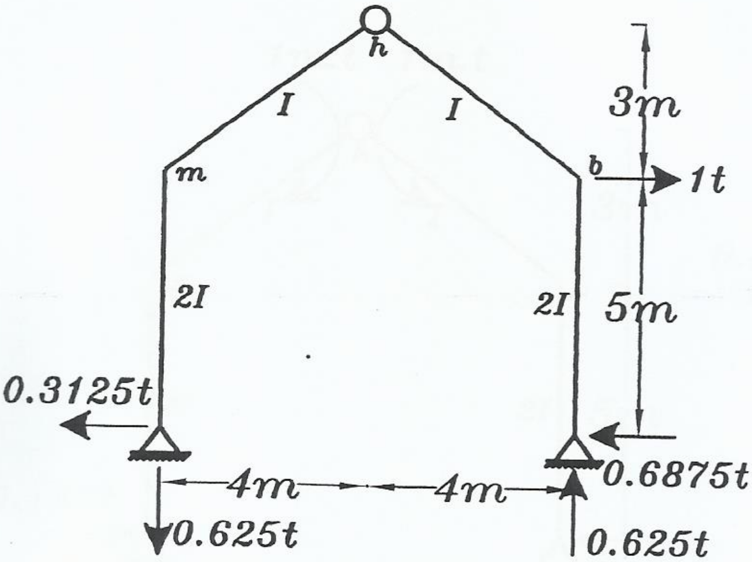
$$\delta_h = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2} * 5 * 23.75\right)\left(-\frac{2}{3} * 1.25\right) + \left(\frac{1}{2} * 5 * 16.25\right)\left(\frac{2}{3} * 1.25\right)\right]$$

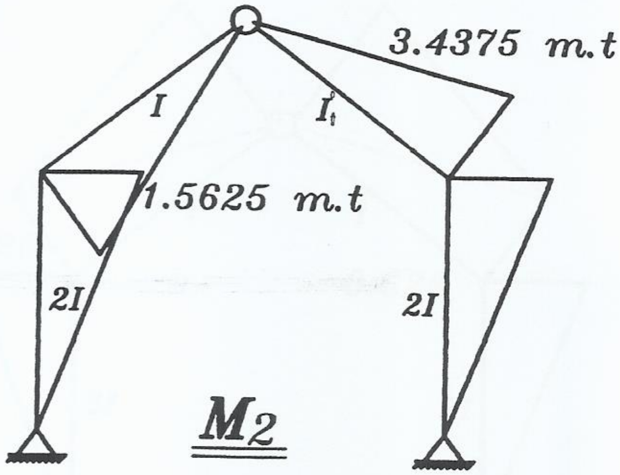
$$+ \frac{1}{2EI}\left[\left(\frac{1}{2} * 5 * 23.75\right)\left(-\frac{2}{3} * 1.25\right) + \left(\frac{1}{2} * 5 * 16.25\right)\left(\frac{2}{3} * 1.25\right)\right]$$

$$= -\frac{23.3475}{EI}$$ ال *deflection* لاعلى

Horizontal displacement at point b

و هنا لاننا نريد حساب الـ $Hz.\ disp.$ نضع قوة قيمتها $1t$ أفقية عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ $Hz.\ disp.$





وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_2 .

Horizontal displacement

$$\delta_b = \int \frac{M_0\,M_2}{EI}\,dL$$

$$\delta_b = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*5*23.75\right)\left(\frac{2}{3}*1.5625\right) + \left(\frac{1}{2}*5*16.25\right)\left(\frac{2}{3}*3.4375\right)\right]$$

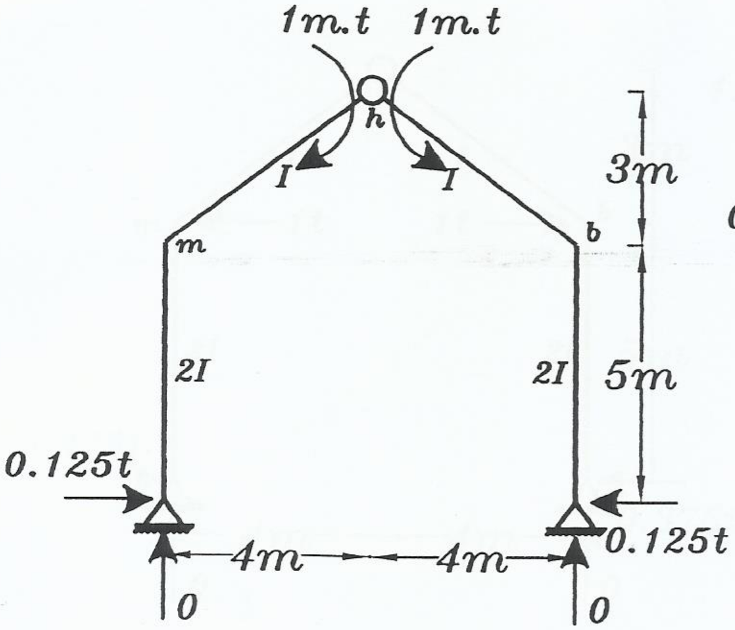
$$+\frac{1}{2EI}\left[\left(\frac{1}{2}*5*23.75\right)\left(\frac{2}{3}*1.5625\right) + \left(\frac{1}{2}*5*16.25\right)\left(\frac{2}{3}*3.4375\right)\right]$$

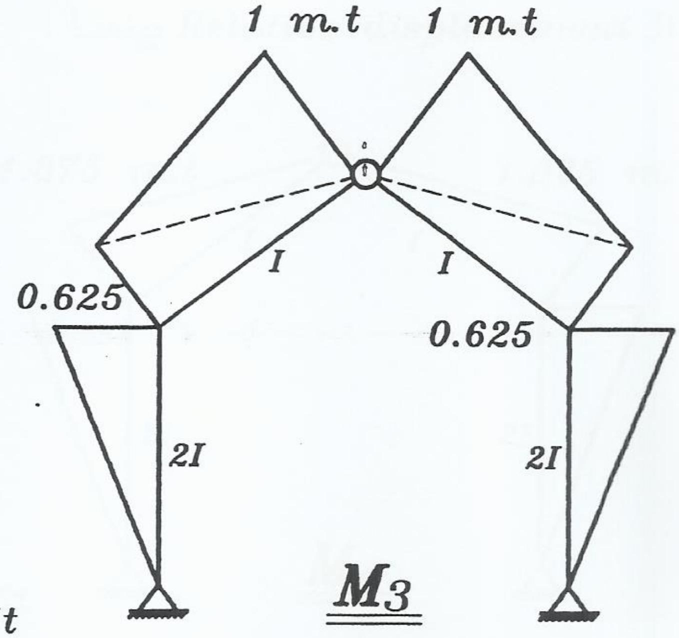
$$= \frac{232.422}{EI}$$ الـ $Hz.\ disp.$ لليمين فى نفس اتجاه الـ $1t$

...ange in Slope angle at point h

و هنا لاننا نريد حساب الـ Change in Slope angle نضع عزمين قيمة كلا ...

1m.t عكس بعض فى الاتجاه عند النقطة المطلو ب عندها حساب الـ Change .





وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_3 .

Change in slopa angle

$$\delta_h = \int \frac{M_0\, M_3}{EI}\, dL$$

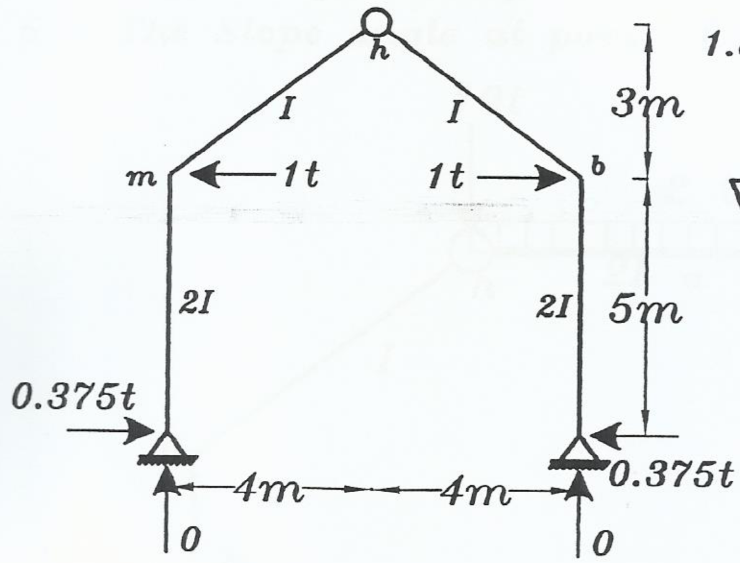
$$\delta_h = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*5*23.75\right)\left(-\frac{2}{3}*0.625-\frac{1}{3}*1\right)+\left(\frac{1}{2}*5*16.25\right)\left(\frac{2}{3}*0.625+\frac{1}{3}*1\right)\right]$$

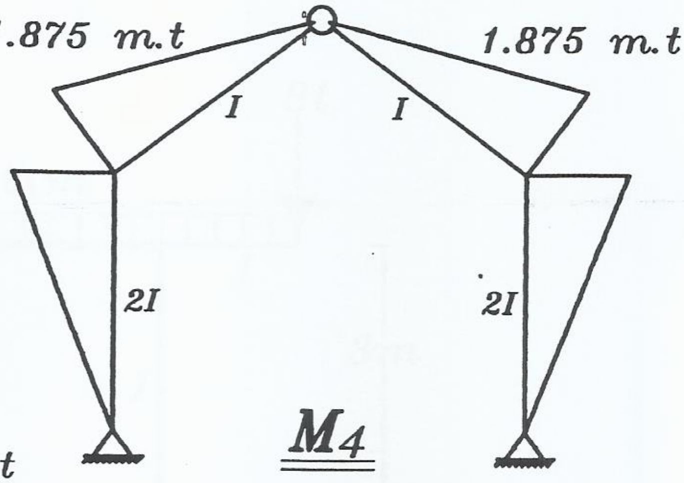
$$+\frac{1}{2EI}\left[\left(\frac{1}{2}*5*23.75\right)\left(-\frac{2}{3}*0.625\right)+\left(\frac{1}{2}*5*16.25\right)\left(\frac{2}{3}*0.625\right)\right]$$

$$= -\frac{17.968}{EI}$$

Relative displacement between b&m

و هنا لاننا نريد حساب ال *Relative displacement* نضع قوتين قيمة الواحدة $1t$ عكس بعض فى الاتجاه على الخط الواصل بين النقطتين المراد حساب ال *Relative displacement* بينهما .





$\underline{\underline{M_4}}$

وهنا نضرب ال M_0 فى ال M_4 .

Relative displacement

$$\delta_h = \int \frac{M_0\, M_4}{EI}\, dL$$

$$\delta_h = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*5*23.75\right)\left(-\frac{2}{3}*1.875\right) + \left(\frac{1}{2}*5*16.25\right)\left(\frac{2}{3}*1.875\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2EI}\left[\left(\frac{1}{2}*5*23.75\right)\left(-\frac{2}{3}*1.875\right) + \left(\frac{1}{2}*5*16.25\right)\left(\frac{2}{3}*1.875\right)\right]$$

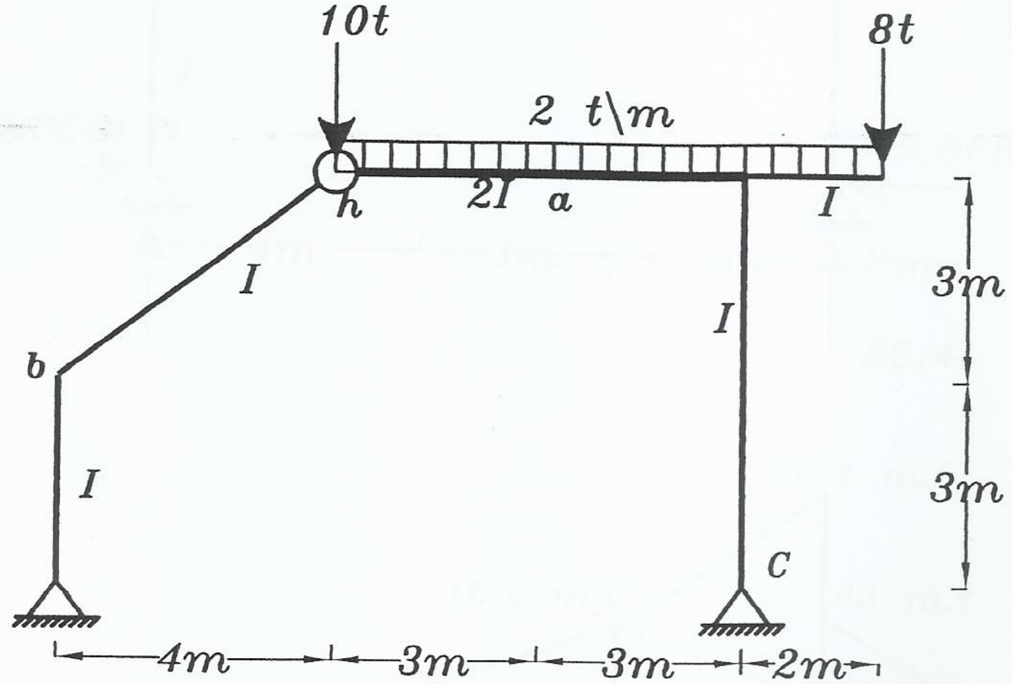
$$= -\frac{35.156}{EI}$$

الاشارة ال $-Ve$ معناها أن النقطتين $b\&m$ يتحركا عكس اتجاه ال $1t$ المفروض أى أنهما يقتربا من بعض .

Example:

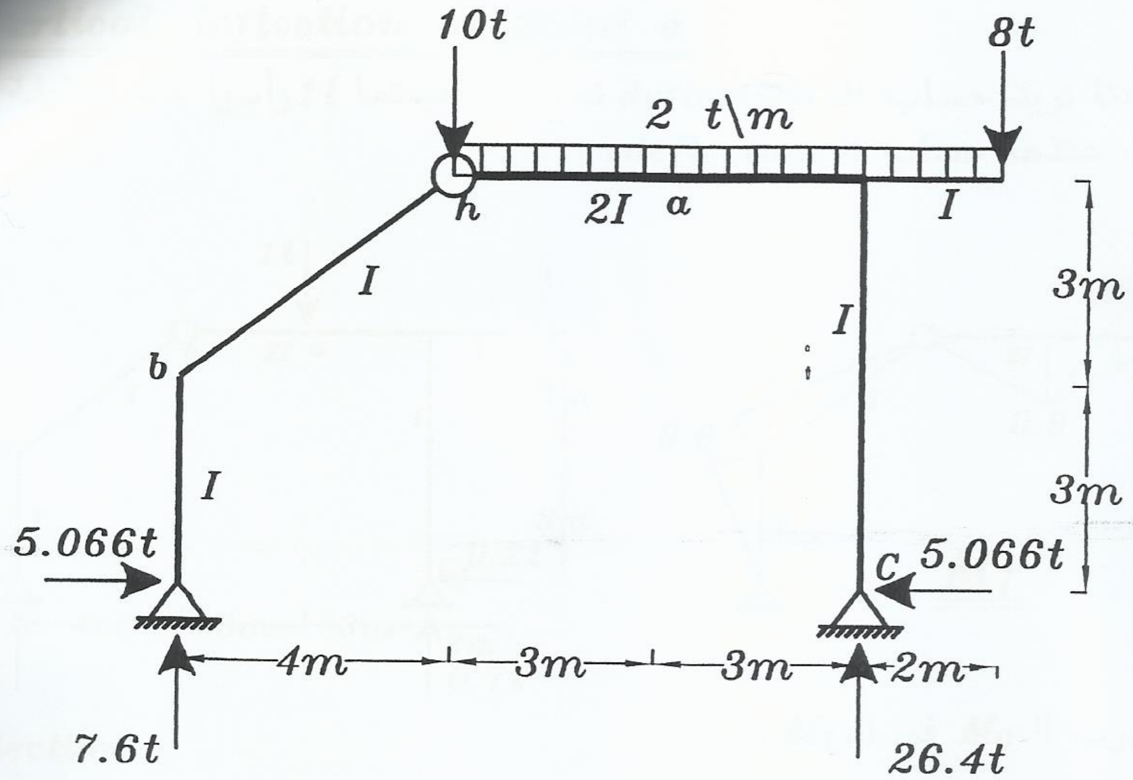
For the shown frame find :

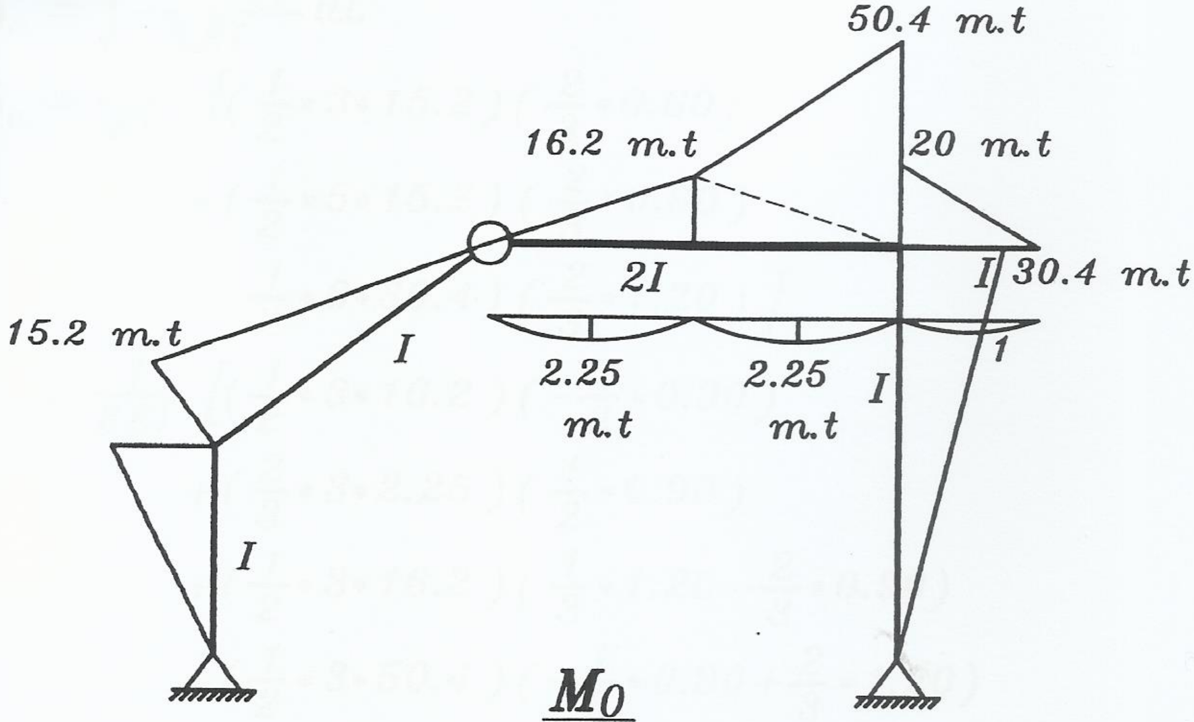
1 – The vertical deflection at points (a) .
2 – The vertical deflection at points (h) .
3 – The horizontal displacement at point (b) .
4 – The change in slope angle at point (h) .
5 – The Slope angle at point (c) .



حيث أنه Frame فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بال moment فقط حيث أنه لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير ال normal و ال Shear و لم يعطى ال $G A_r$ أو ال $E A$.

$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{E I} dL$$

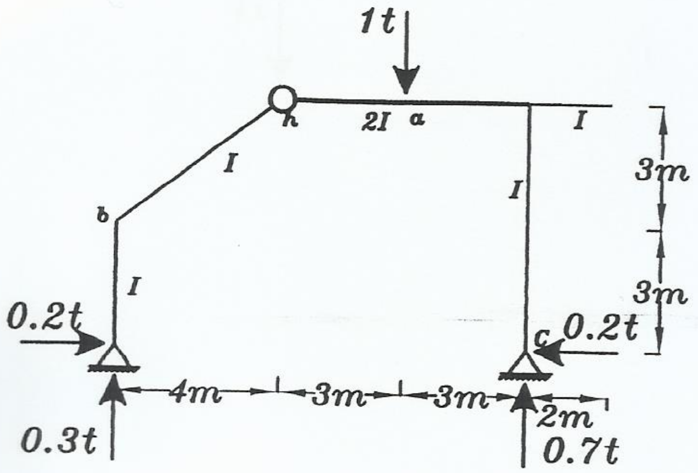


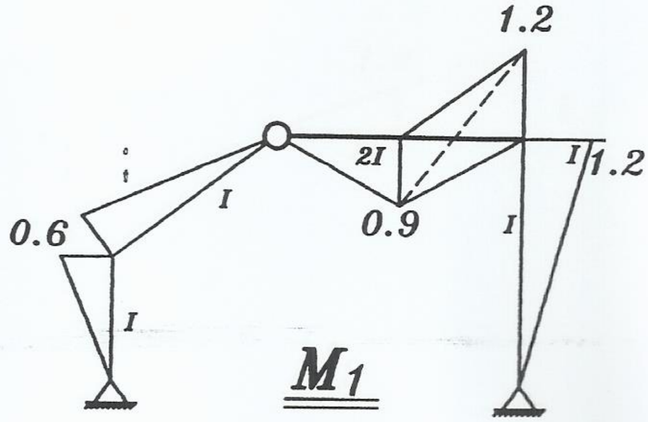


$\underline{\underline{M_0}}$

...rtical deflection at point a

و هنا لاننا نريد حساب ال deflection نضع قوة قيمتها 1t رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب ال deflection.





وهنا نضرب ال M_0 فى ال M_1.

deflection

$$\delta_a = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL$$

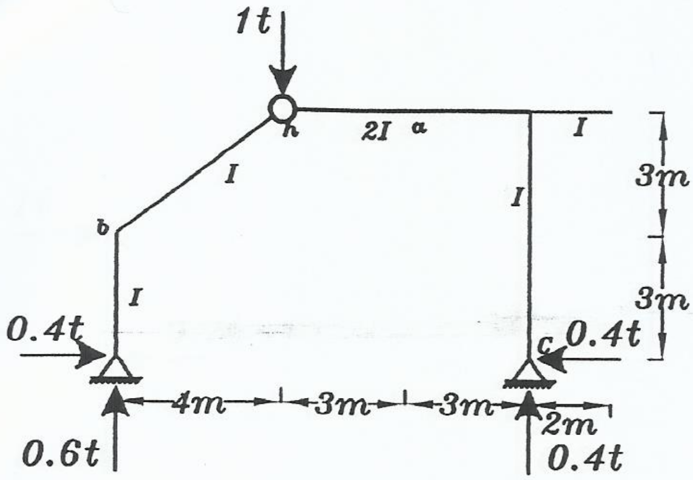
$$\delta_a = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*15.2\right)\left(\frac{2}{3}*0.60\right) + \left(\frac{1}{2}*5*15.2\right)\left(\frac{2}{3}*0.60\right) + \left(\frac{1}{2}*6*30.4\right)\left(\frac{2}{3}*1.20\right)\right]$$

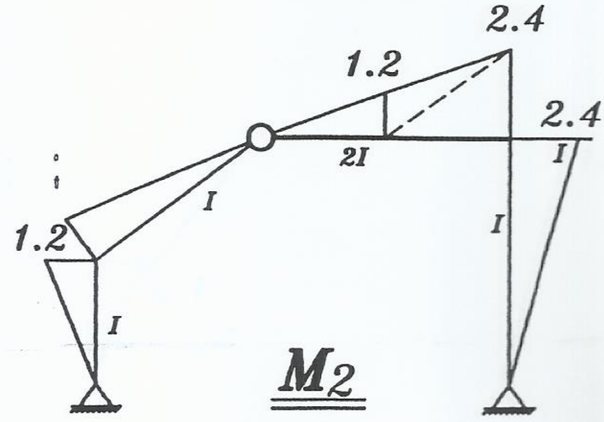
$$+ \frac{1}{2EI}\left[\left(\frac{1}{2}*3*16.2\right)\left(-\frac{2}{3}*0.90\right) + \left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(\frac{1}{2}*0.90\right) + \left(\frac{1}{2}*3*16.2\right)\left(\frac{1}{3}*1.20-\frac{2}{3}*0.90\right) + \left(\frac{1}{2}*3*50.4\right)\left(-\frac{1}{3}*0.90+\frac{2}{3}*1.20\right) + \left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(\frac{1}{2}*0.90-\frac{1}{2}*1.20\right)\right]$$

$$= \frac{107.135}{EI}$$ ال deflection لاسفل

...rtical deflection at point h

و هنا لاننا نريد حساب ال deflection نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب ال deflection.





وهنا نضرب ال M_0 في ال M_2 .

deflection

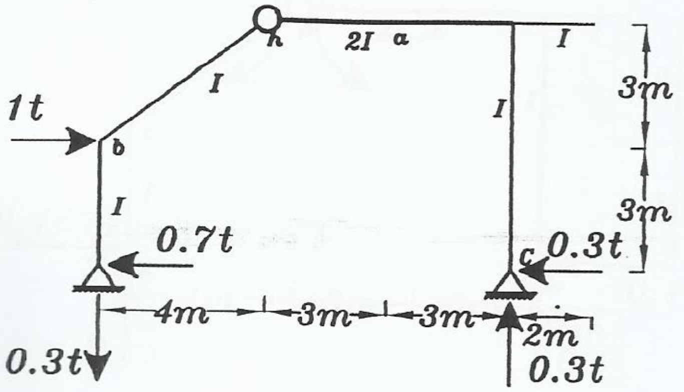
$$\delta_h = \int \frac{M_0\, M_2}{EI}\, dL$$

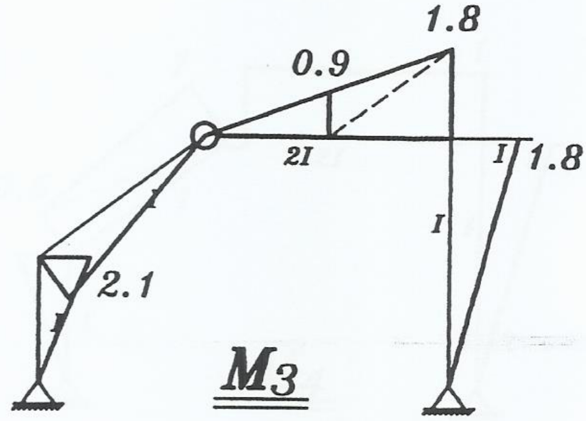
$$\begin{aligned}
\delta_h = \frac{1}{EI} & \Big[\left(\tfrac{1}{2} * 3 * 15.2\right)\left(\tfrac{2}{3} * 1.20\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 5 * 15.2\right)\left(\tfrac{2}{3} * 1.20\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 6 * 30.4\right)\left(\tfrac{2}{3} * 2.40\right) \Big] \\
+ \frac{1}{2EI} & \Big[\left(\tfrac{1}{2} * 3 * 16.2\right)\left(\tfrac{2}{3} * 1.20\right) \\
& + \left(\tfrac{2}{3} * 3 * 2.25\right)\left(-\tfrac{1}{2} * 1.20\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 3 * 16.2\right)\left(\tfrac{1}{3} * 2.40 + \tfrac{2}{3} * 1.20\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 3 * 50.4\right)\left(\tfrac{1}{3} * 1.20 + \tfrac{2}{3} * 2.40\right) \\
& + \left(\tfrac{2}{3} * 3 * 2.25\right)\left(-\tfrac{1}{2} * 1.20 - \tfrac{1}{2} * 2.40\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$= \frac{293.919}{EI}$$ ال deflection لاسفل

...rizontal displacement at point b

و هنا لاننا نريد حساب الـ $Hz.\ disp.$ نضع قوة قيمتها $1t$ أفقية عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ $Hz.\ disp.$.





Horizontal displacement

وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_3.

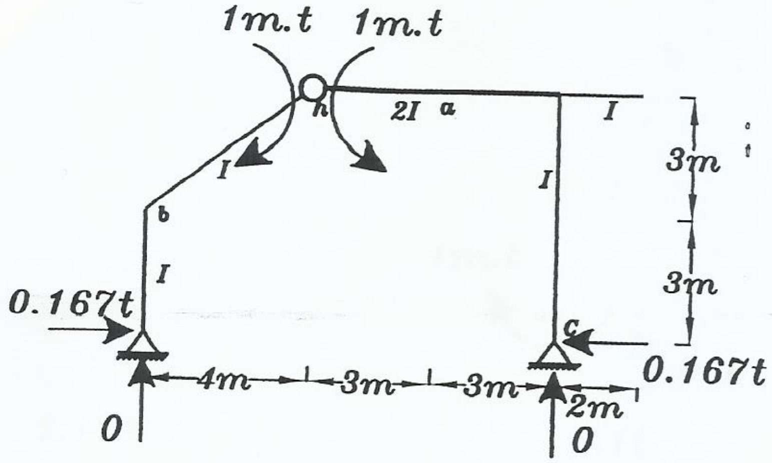
$$\delta_b = \int \frac{M_0\, M_3}{EI}\, dL$$

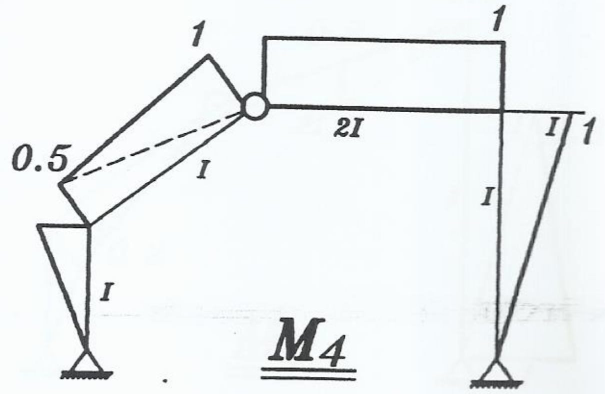
$$\begin{aligned}
\delta_b = \frac{1}{EI} \Big[& \left(\tfrac{1}{2} * 3 * 15.2\right)\left(-\tfrac{2}{3} * 2.10\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 5 * 15.2\right)\left(-\tfrac{2}{3} * 2.10\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 6 * 30.4\right)\left(\tfrac{2}{3} * 1.80\right) \Big] \\
+ \frac{1}{2EI} \Big[& \left(\tfrac{1}{2} * 3 * 16.2\right)\left(\tfrac{2}{3} * 0.90\right) \\
& + \left(\tfrac{2}{3} * 3 * 2.25\right)\left(-\tfrac{1}{2} * 0.90\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 3 * 16.2\right)\left(\tfrac{1}{3} * 1.80 + \tfrac{2}{3} * 0.90\right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} * 3 * 50.4\right)\left(\tfrac{1}{3} * 0.90 + \tfrac{2}{3} * 1.80\right) \\
& + \left(\tfrac{2}{3} * 3 * 2.25\right)\left(-\tfrac{1}{2} * 0.90 - \tfrac{1}{2} * 1.80\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$= \frac{98.839}{EI}$$ الـ $Hz.\ disp.$ لليمين فى نفس اتجاه الـ $1t$

...ange in Slope angle at point h

و هنا لاننا نريد حساب الـ *Change in Slope angle* نضع عزمين قيمة كلا منه... *1m.t* عكس بعض فى الاتجاه عند النقطة المطلو ب عندها حساب الـ *Change* .





وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_4 .

Change in slope angle

$$\delta_h = \int \frac{M_0\, M_4}{EI}\, dL$$

$$\delta_h = \frac{1}{EI}\Big[\left(\tfrac{1}{2}*3*15.2\right)\left(\tfrac{2}{3}*0.50\right)$$

$$+\left(\tfrac{1}{2}*5*15.2\right)\left(\tfrac{2}{3}*0.50+\tfrac{1}{3}*1\right)$$

$$+\left(\tfrac{1}{2}*6*30.4\right)\left(\tfrac{2}{3}*1\right)\Big]$$

$$+\frac{1}{2EI}\Big[\left(\tfrac{1}{2}*3*16.2\right)(1)$$

$$+\left(\tfrac{2}{3}*3*2.25\right)(-1)$$

$$+\left(\tfrac{1}{2}*3*16.2\right)(1)$$

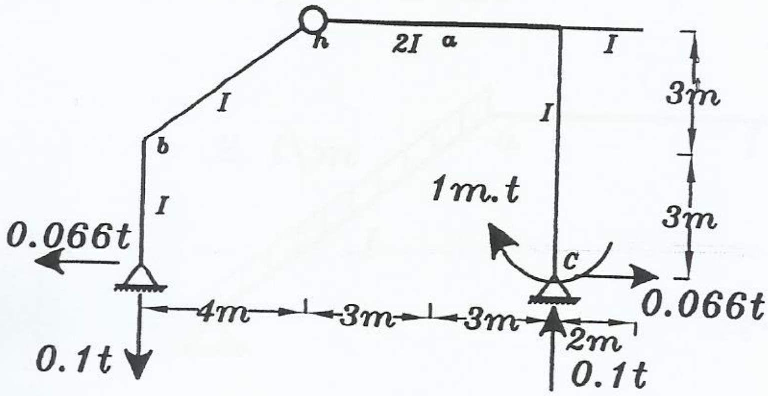
$$+\left(\tfrac{1}{2}*3*50.4\right)(1)$$

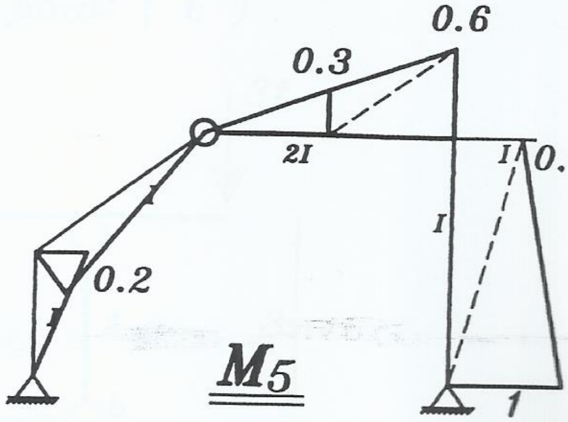
$$+\left(\tfrac{2}{3}*3*2.25\right)(-1)\Big]$$

$$= \frac{151.333}{EI}$$

Slope angle at point C

و هنا لاننا نريد حساب الـ $Slope\ angle$ نضع عزم قيمته $1m.t$ عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ $Slope\ angle$.





وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_5 .

Slope angle

$$\delta_C = \int \frac{M_0\, M_5}{EI}\, dL$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2}*3*15.2\right)\left(-\frac{2}{3}*0.20\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}*5*15.2\right)\left(-\frac{2}{3}*0.20\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}*6*30.4\right)\left(\frac{2}{3}*0.60+\frac{1}{3}*1\right)\Big]$$
$$+\ \frac{1}{2EI}\Big[\left(\frac{1}{2}*3*16.2\right)\left(\frac{2}{3}*0.30\right)$$
$$+\left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(-\frac{1}{2}*0.30\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}*3*16.2\right)\left(\frac{1}{3}*0.60+\frac{2}{3}*0.30\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}*3*50.4\right)\left(\frac{1}{3}*0.30+\frac{2}{3}*0.60\right)$$
$$+\left(\frac{2}{3}*3*2.25\right)\left(-\frac{1}{2}*0.30-\frac{1}{2}*0.60\right)\Big]$$

$$= \frac{83.61}{EI}$$ الـ $Slope\ angle$ مع عقارب الساعة

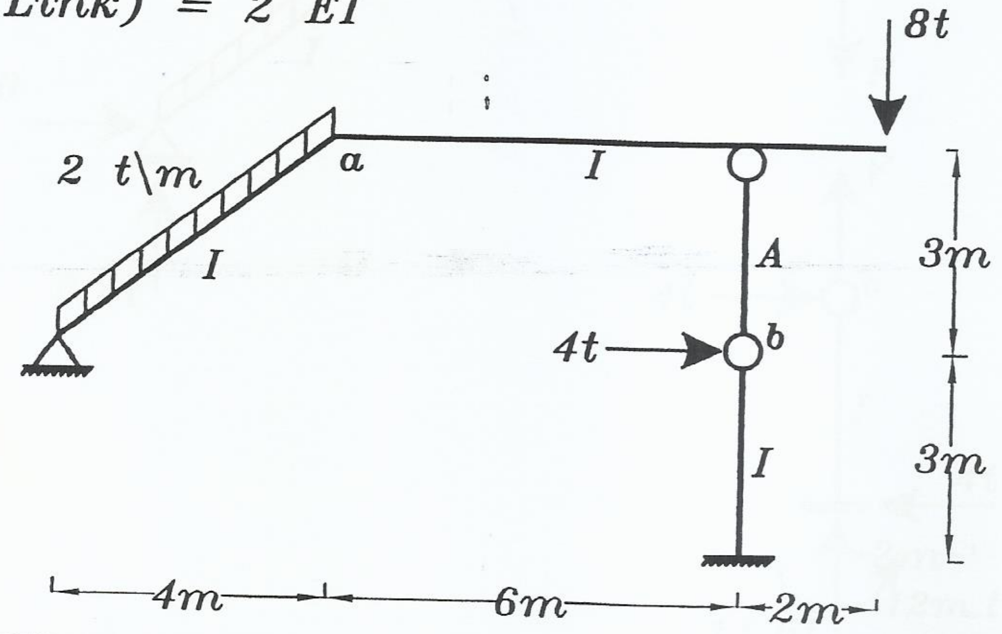
Example:

For the shown frame find :

1 - The vertical deflection at points (a) .

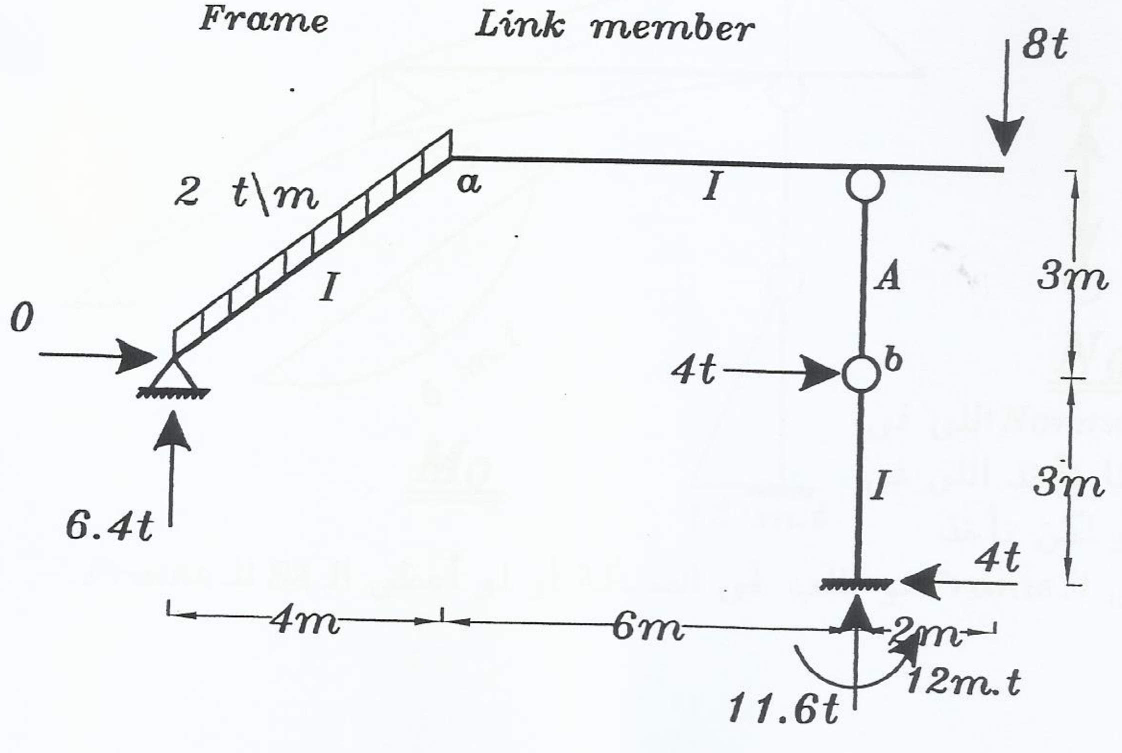
2 - The horizontal displacement at point (b) .

$EA \text{ (Link)} = 2\ EI$

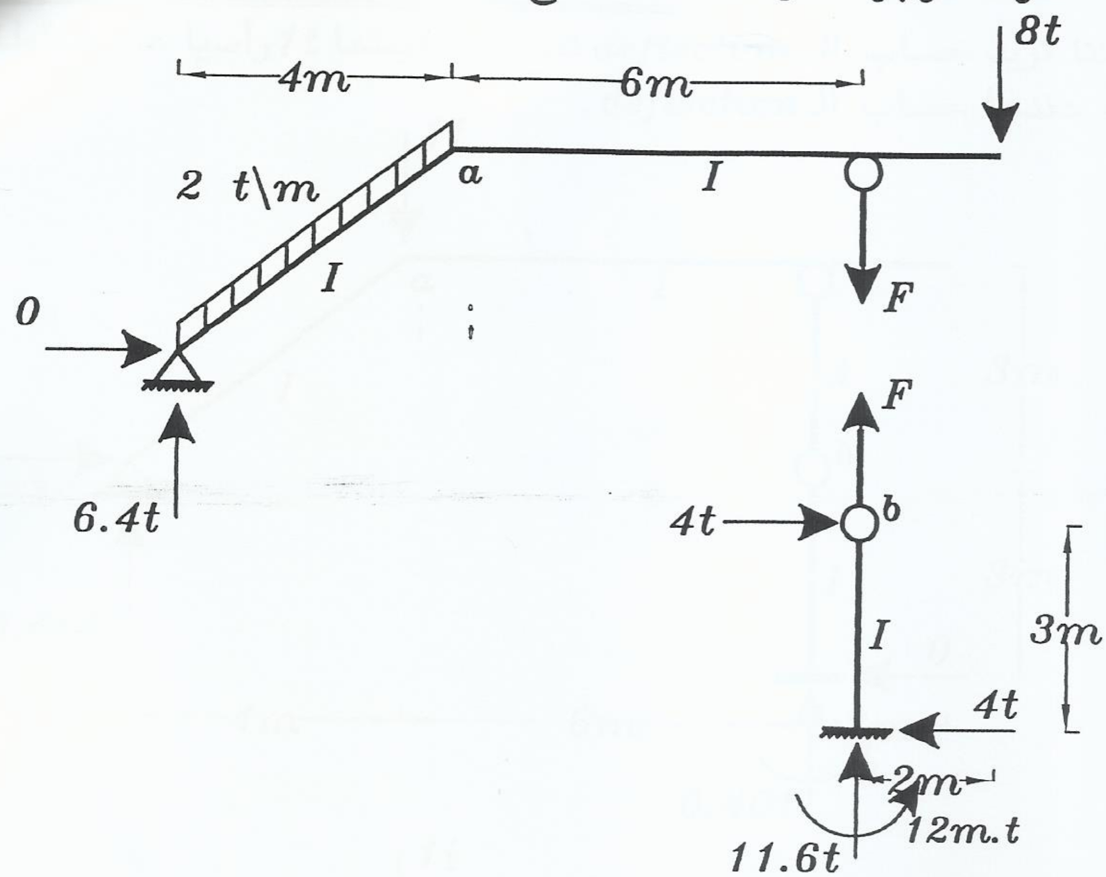


حيث أنه Frame فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بال moment فقط حيث أنه لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير ال normal و ال Shear و لم يعطى ال $G A_r$ أو ال $E A$ و لكن لوجود Link member نأخذ تأثير ال Normal فى ال Link و لذلك أعطى ال $E A$ للـ Link .

$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI}\, dL}_{\text{Frame}} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA}\, dL}_{\text{Link member}}$$

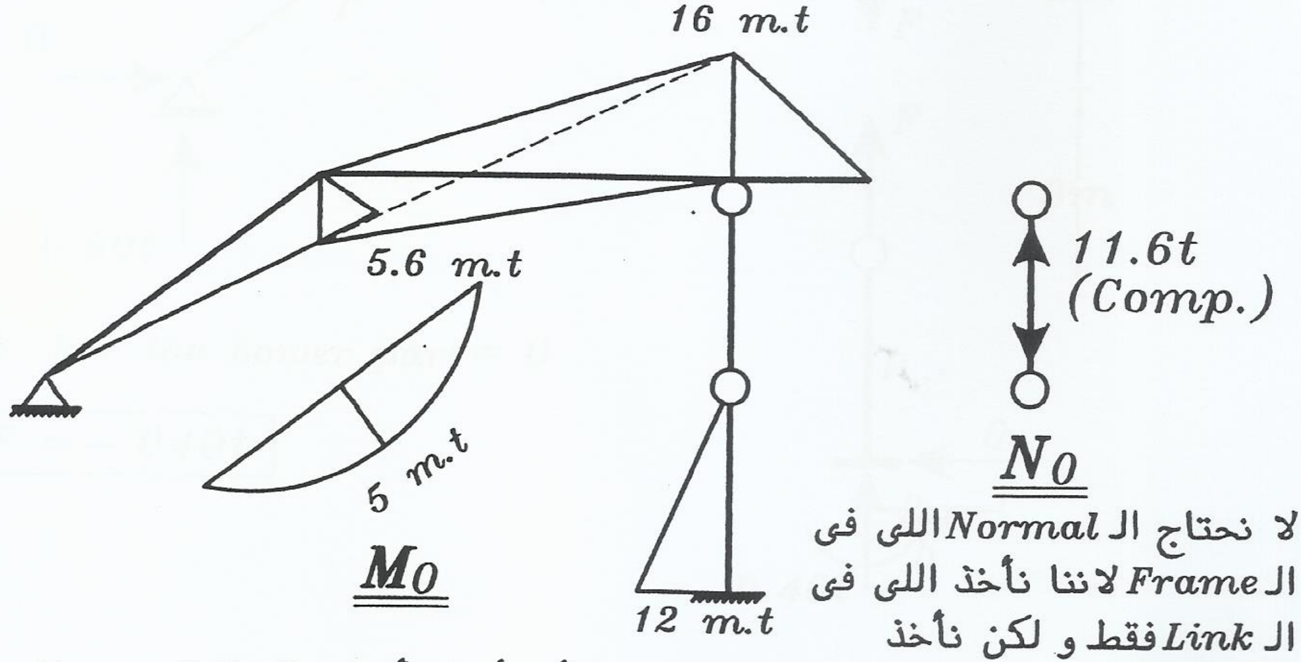


و لحساب القوة الموجودة فى الـ *Link* نقطع الـ *Link*



و نحسب القوة (F) من أى من الجزئين ولو طلعت بالـ $+Ve$ تكون مع الفرض و لو بالـ $-Ve$ تكون عكس الفرض.

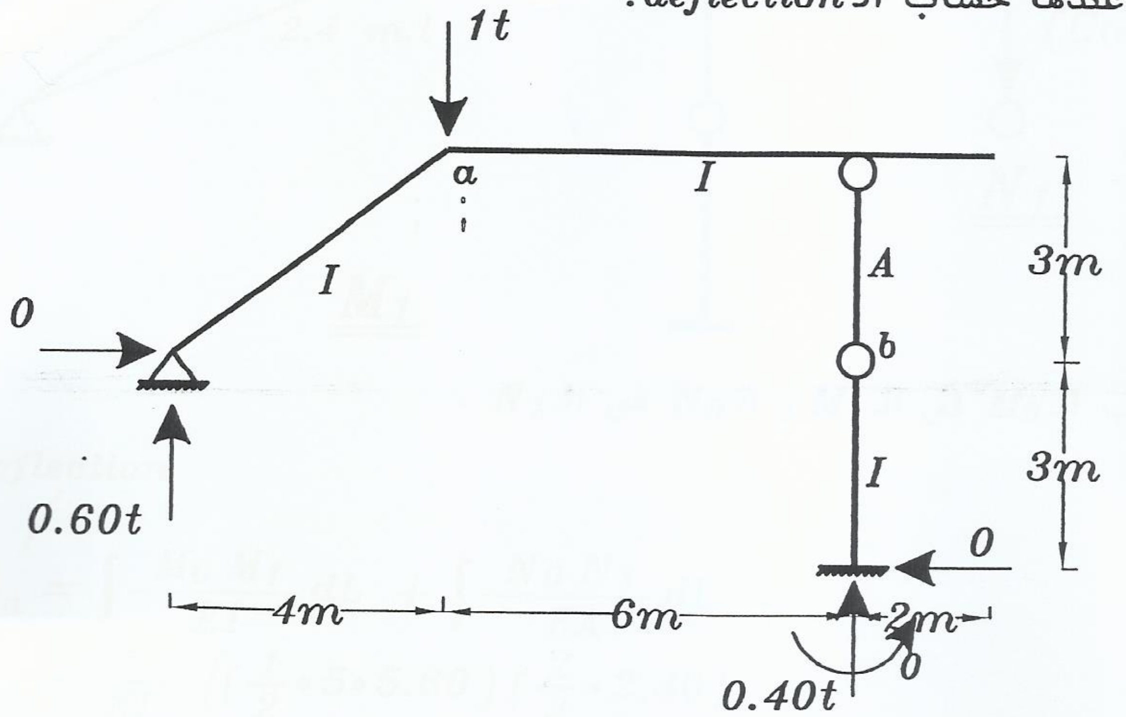
ΣY *For the Lower part* $= 0$ $\boxed{F = -11.6t}$

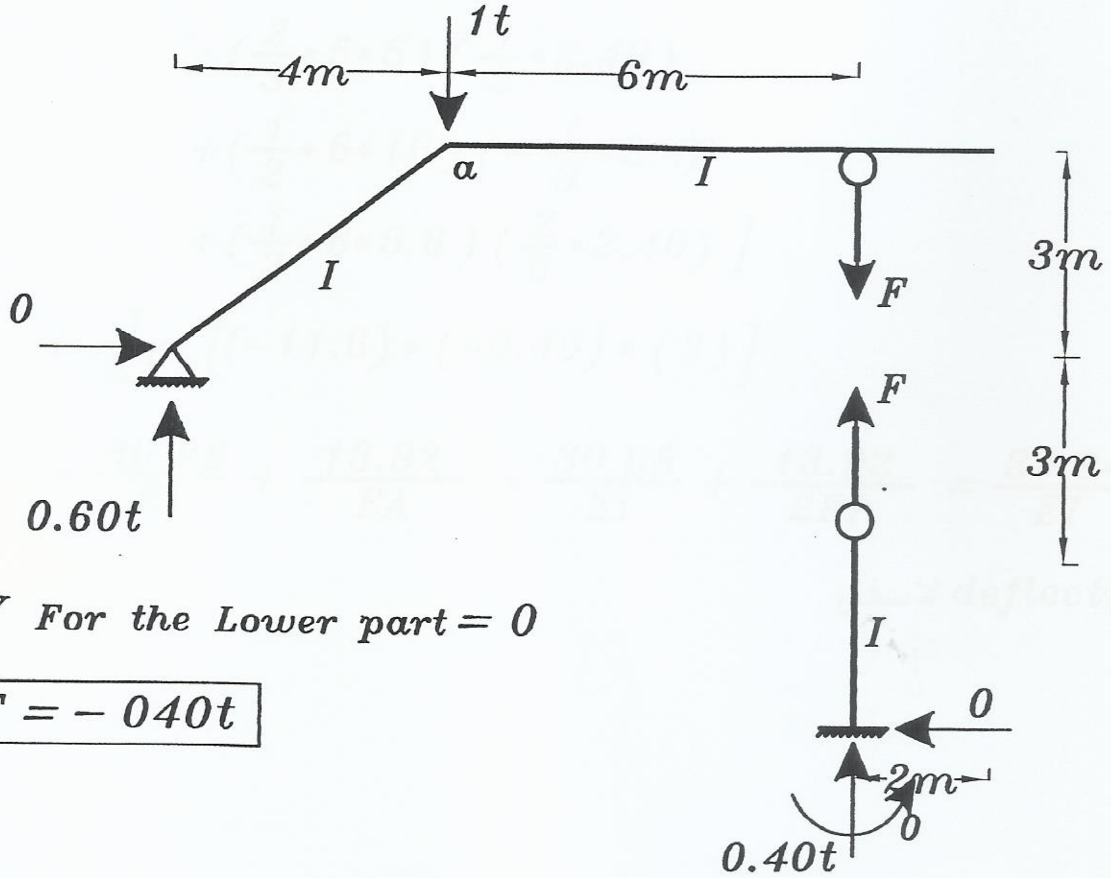


لا نحتاج الـ *Normal* اللى فى الـ *Frame* لاننا نأخذ اللى فى الـ *Link* فقط و لكن نأخذ الـ *Normal* فى الـ *Frame* لو طلب فى المسألة أو لو أعطى الـ *EA* للـ *Frame*.

...rtical deflection at point a

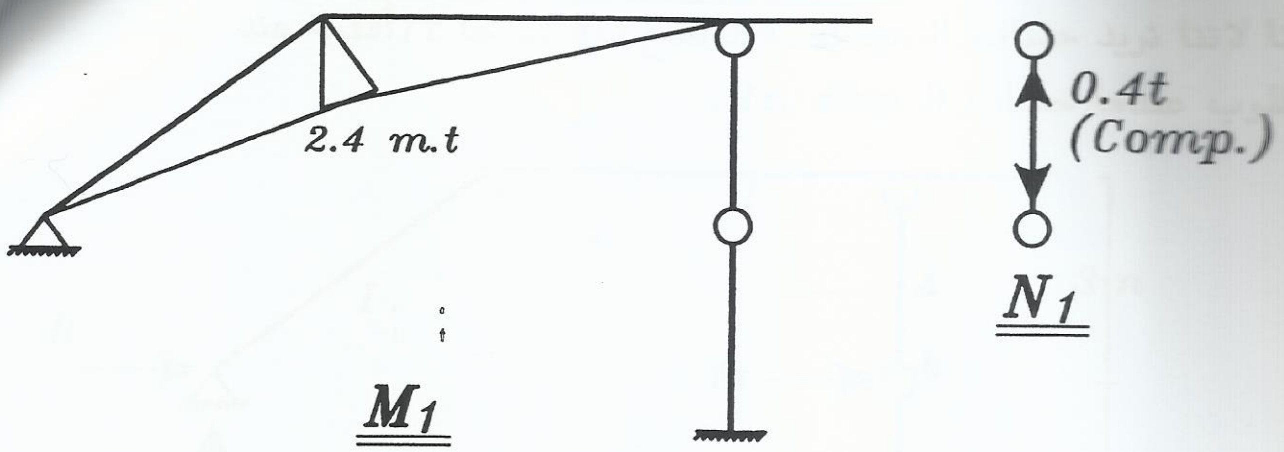
و هنا لاننا نريد حساب ال *deflection* نضع قوة قيمتها $1t$ رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب ال *deflection*.





ΣY For the Lower part $= 0$

$$\boxed{F = -\ 040t}$$



وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_1 و الـ N_0 فى الـ N_1 .

deflection

$$\delta_a = \int \frac{M_0\,M_1}{EI}\,dL + \int \frac{N_0\,N_1}{EA}\,dL$$

$$\delta_a = \frac{1}{EI}\Big[\left(\frac{1}{2}*5*5.60\right)\left(\frac{2}{3}*2.40\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}*5*5\right)\left(\frac{1}{2}*2.40\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}*6*16\right)\left(-\frac{1}{3}*2.40\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}*6*5.6\right)\left(\frac{2}{3}*2.40\right)\Big]$$

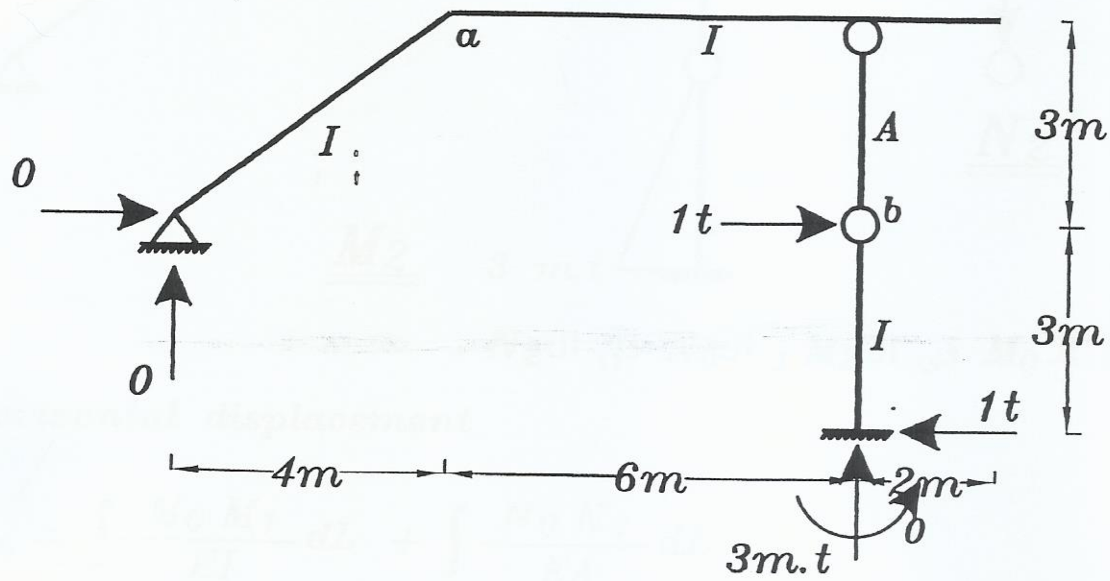
$$+\frac{1}{EA}\Big[(-11.6)*(-0.40)*(3)\Big]$$

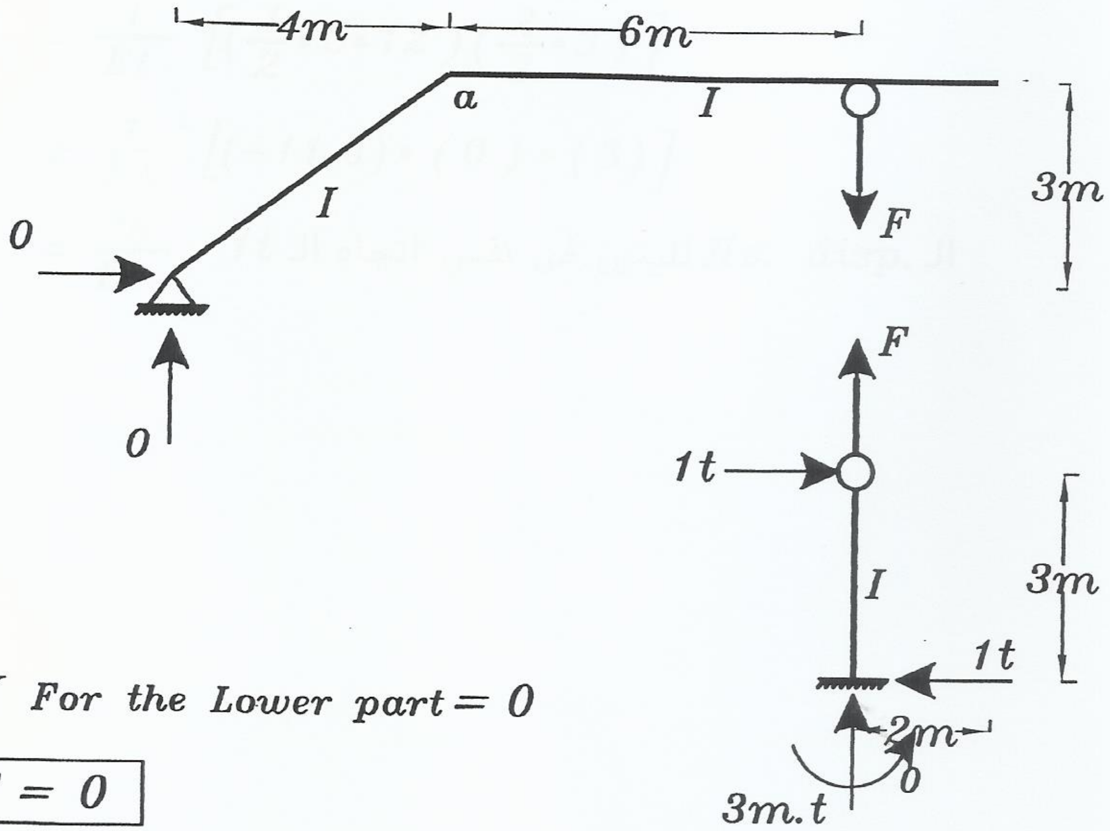
$$= \frac{30.88}{EI} + \frac{13.92}{EA} = \frac{30.88}{EI} + \frac{13.92}{2EI} = \frac{37.84}{EI}$$

الـ deflection لاسفل

...rizontal displacement at point b

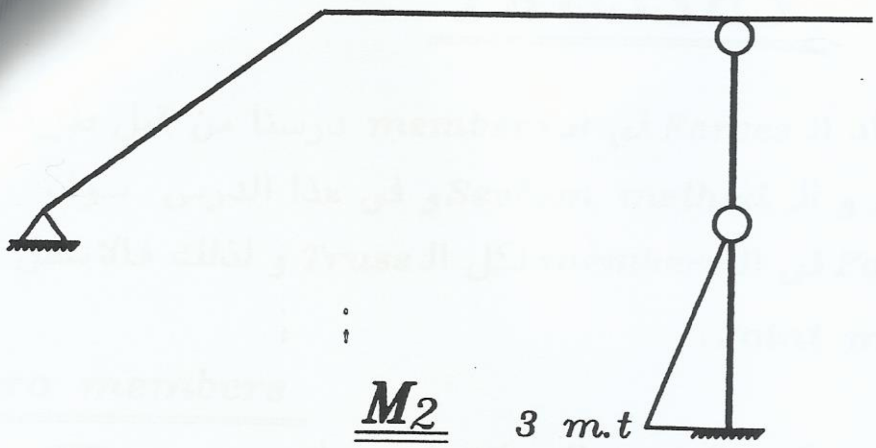
و هنا لاننا نريد حساب ال .*Hz. disp* نضع قوة قيمتها $1t$ أفقية عند النقطة المطلوب عندها حساب ال .*Hz. disp*.





ΣY *For the Lower part* $= 0$

$$\boxed{F = 0}$$



$\underline{\underline{M_2}}$

$\underline{\underline{N_2}}$

وهنا نضرب الـ M_0 فى الـ M_2 و الـ N_0 فى الـ N_2 .

Horizontal displacement

$$\delta_b = \int \frac{M_0\, M_1}{EI}\, dL + \int \frac{N_0\, N_1}{EA}\, dL$$

$$\delta_b = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2} * 3 * 12\right)\left(\frac{2}{3} * 3\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{EA}\left[(-11.6) * (0) * (3)\right]$$

$$= \frac{36}{EI}$$

الـ $Hz.\ disp.$ لليمين فى نفس اتجاه الـ $1t$

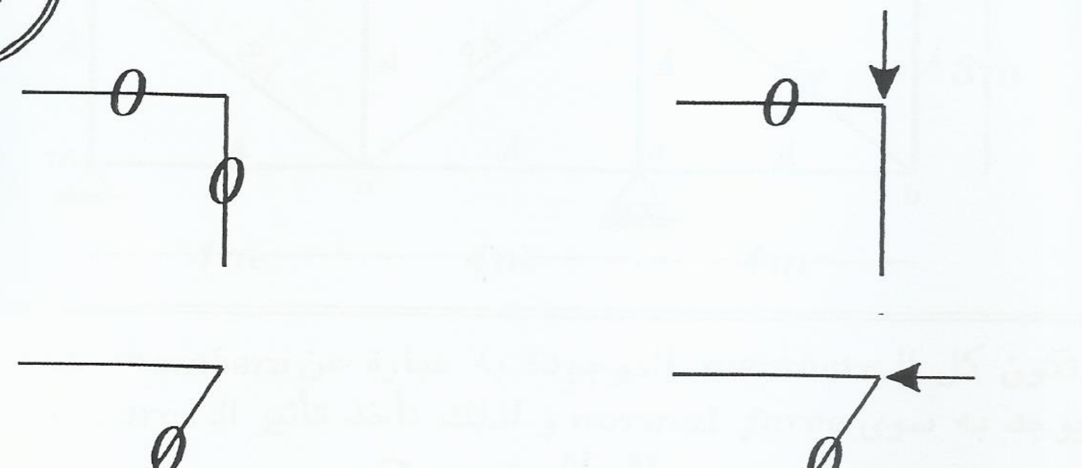
TRUSSES

فى حالة الـ *Trusses* لايجاد الـ *Forces* فى الـ *members* درسنا من قبل طريقتان و هما الـ *Joint method* و الـ *Section method* و فى هذا الدرس سوف نحتاج الى حساب الـ *Forces* فى الـ *members* لكل الـ *Truss* و لذلك فالاسهل استخدام طريقة الـ *Joint method* .

Zero members

هى *members* فى الـ *Truss* تكون الـ *Forces* بها تساوى صفر

حفظ



من الممكن أن تكون القوى فى *members* أخرى تساوى صفر و لكنها تظهر من الحساب .

Example:

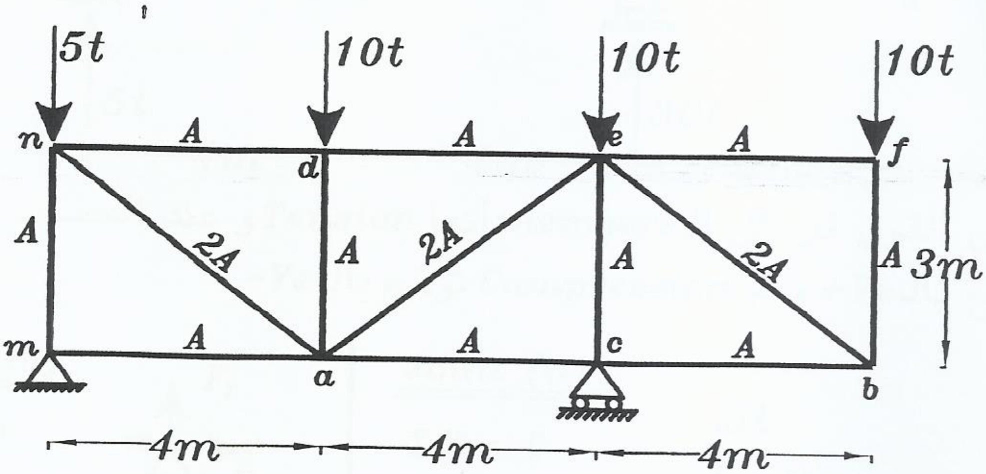
For the shown Truss find :

1 – The vertical deflection at points (a) .

2 – The horizontal displacement at point (b) .

3 – The relative displacement between points (d & c) .

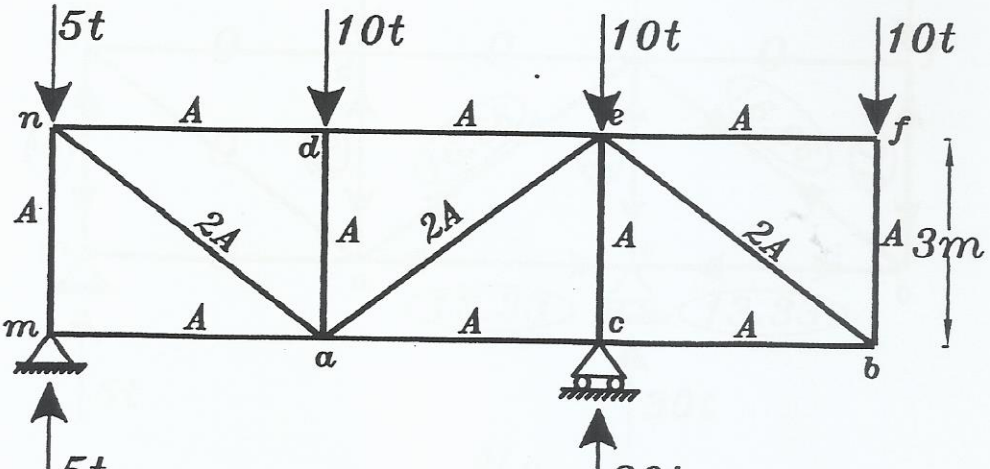
4 – The rotation of member (m – n).

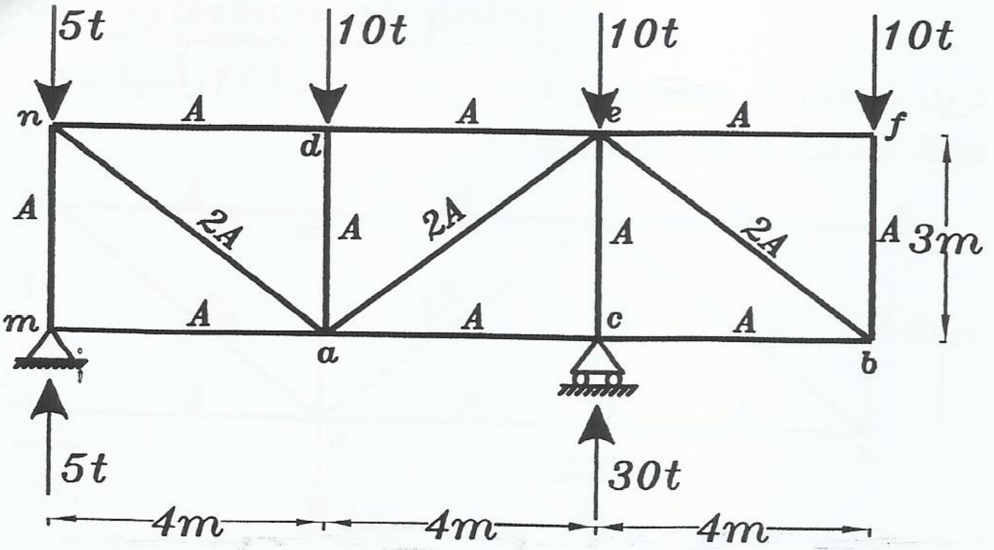


ال Truss تكون كل ال members الموجودة به عبارة عن Link members أى أنه لا يوجد به سوى normal force و لذلك نأخذ تأثير ال normal force فقط .

$$\delta = \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

و لحساب ال N_0 نحتاج لحساب ال force فى كل members ال Truss نتيجة الاحمال المؤثرة عليه و نرسم ال N.F.D للـ Truss.





يفضل أن نفرض القوى فى كل الـ *members* أنها *Tension* و عند الحساب لو طلعت *Tension* توضع بالـ $+Ve$ و لو *Compression* توضع بالـ $-Ve$.

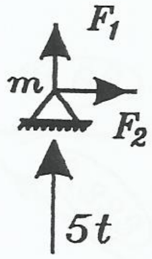
Joint (m)

$\Sigma X = 0$

$F_1 = 0$

$\Sigma Y = 0$

$F_2 = -5t$



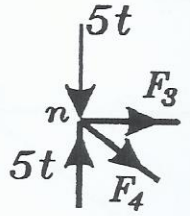
Joint (n)

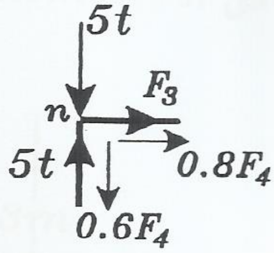
$\Sigma Y = 0$

$F_4 = 0$

$\Sigma X = 0$

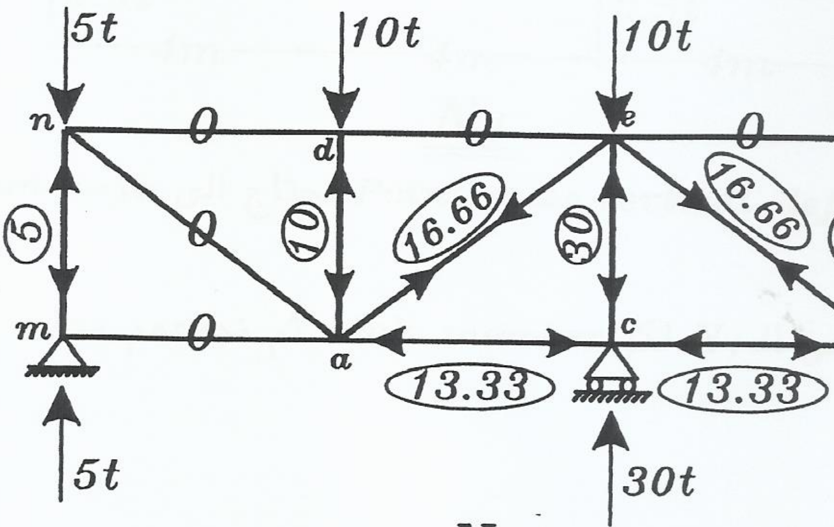
$F_3 = 0$





عند وضع القوة F_2 على *Joint 2* نضعها فى الاتجاه الصحيح و هو الـ *Comp.* و لذلك نضعها داخلة على الـ *Joint 2*.

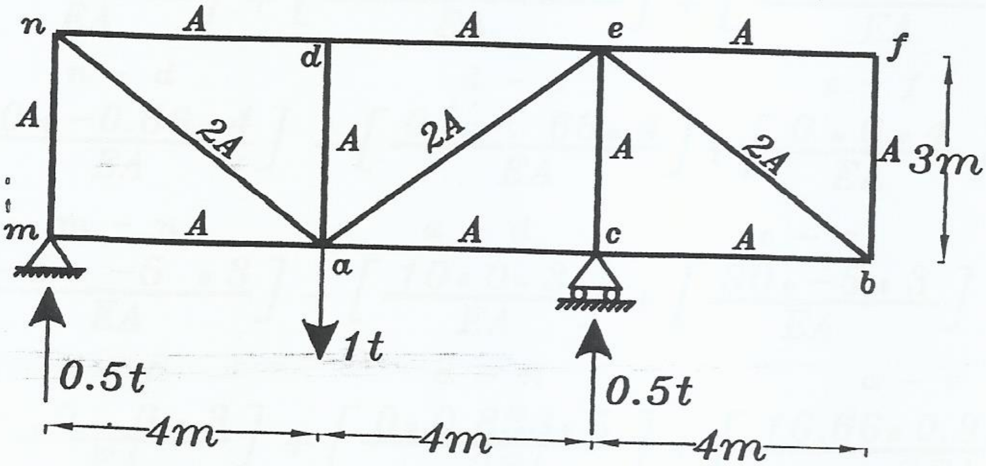
ثم نكمل حل باقى الـ *Truss*



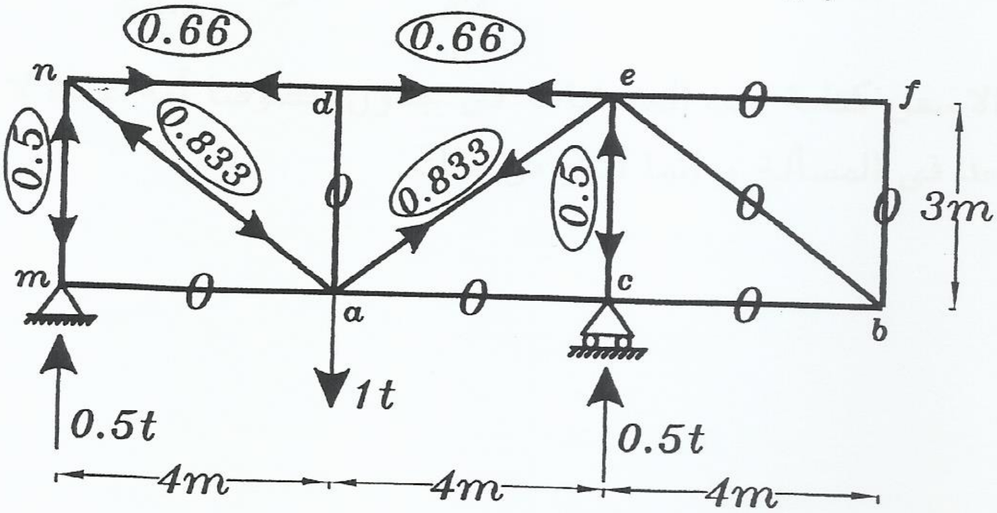
N_0

Vertical deflection at point a

و هنا لاننا نريد حساب الـ *deflection* نضع قوة قيمتها *1t* رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *deflection*.



ويفضل أن نحدد الـ*Zero members* فى البداية و بعدها نحسب الـ *Forces* فى الـ *members* المتبقية.



N_1

ولحساب الـ *Vertical deflection* عند *Point a* نحتاج الى ضرب *diagram* الـ N_0 فى الـ N_1.

حيث نضرب الـ N_0 فى الـ N_1 لكل *Link member* ثم نجمعهم معا

$$= \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

$$\begin{aligned}
\delta_a = {} & \overset{m-a}{\left[\frac{0 * 0 * 4}{EA}\right]} + \overset{a-c}{\left[\frac{-13.33 * 0 * 4}{EA}\right]} + \overset{c-b}{\left[\frac{-13.33 * 0 * 4}{EA}\right]} \\
& + \overset{n-d}{\left[\frac{0 * -0.66 * 4}{EA}\right]} + \overset{d-e}{\left[\frac{0 * -0.66 * 4}{EA}\right]} + \overset{e-f}{\left[\frac{0 * 0 * 4}{EA}\right]} \\
& + \overset{m-n}{\left[\frac{-5 * -5 * 3}{EA}\right]} + \overset{a-d}{\left[\frac{10 * 0 * 3}{EA}\right]} + \overset{c-e}{\left[\frac{30 * -5 * 3}{EA}\right]} \\
& + \overset{b-f}{\left[\frac{-10 * 0 * 3}{EA}\right]} + \overset{a-n}{\left[\frac{0 * 0.833 * 5}{2EA}\right]} + \overset{a-e}{\left[\frac{16.66 * 0.833 * 5}{2EA}\right]} \\
& + \overset{e-b}{\left[\frac{16.66 * 0 * 5}{2EA}\right]} = \frac{78.194}{EA}
\end{aligned}$$

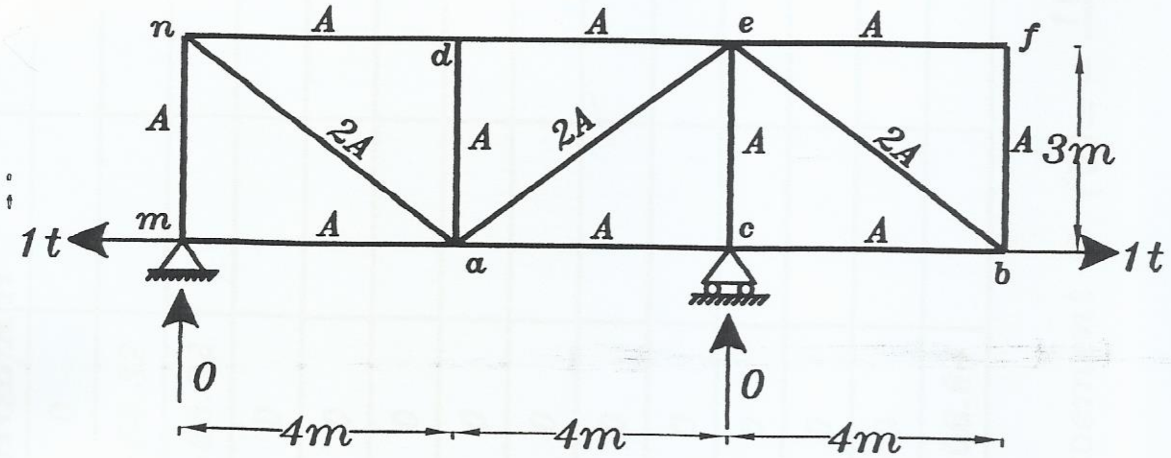
و لكن من الاسهل كتابة هذه الحسابات فى جدول خصوصا أنه عادة لا يكون مطلوب واحد فى المسألة و انما أكثر من ذلك

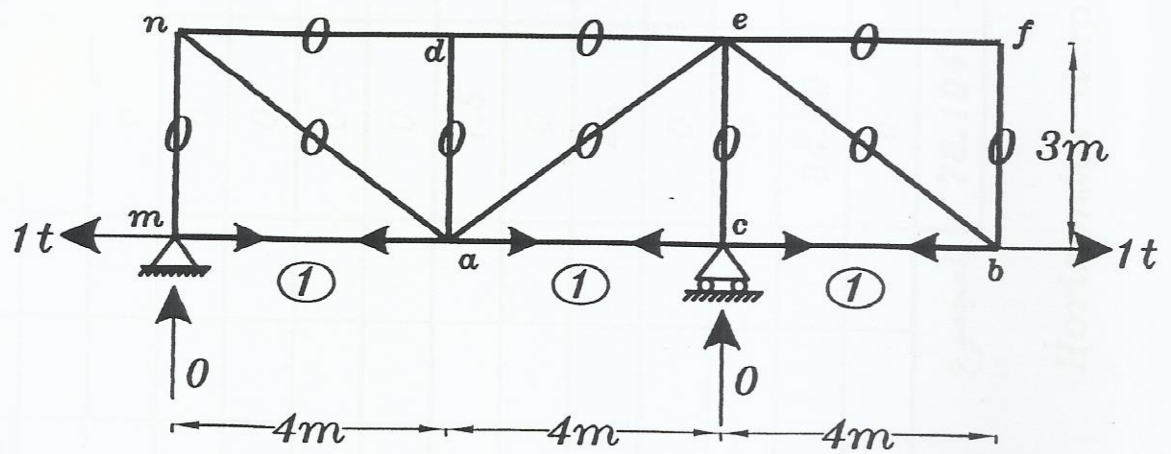
member	L	area	N_0	N_1				N_0N_1L/A			
m − a	4	1	0	0				0			
a − c	4	1	−13.33	0				0			
c − b	4	1	−13.33	0				0			
n − d	4	1	0	−0.66				0			
d − e	4	1	0	−0.66				0			
e − f	4	1	0	0				0			
m − n	3	1	−5	−5				7.5			
a − d	3	1	−10	0				0			
c − e	3	1	−30	−5				45			
b − f	3	1	−10	0				0			
a − n	5	2	0	0.833				0			
a − e	5	2	16.66	0.833				34.69			
e − b	5	2	16.66	0				0			
							المجموع	**78.194**			

Vertical deflection @ $(a) = \dfrac{78.19}{E\,A}$

Horizontal displacement at point b

و هنا لاننا نريد حساب الـ *Hz. disp.* نضع قوة قيمتها *1t* أفقية عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *Hz. disp.*





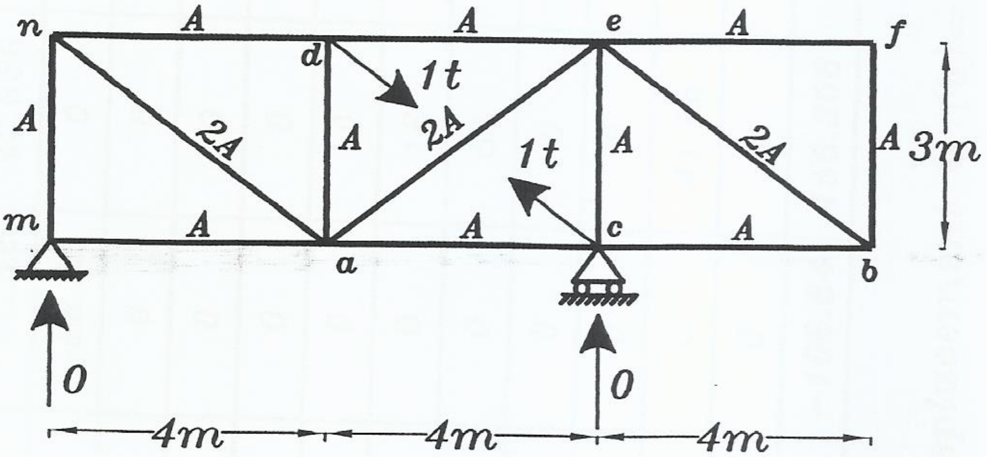
$\underline{\underline{N_2}}$

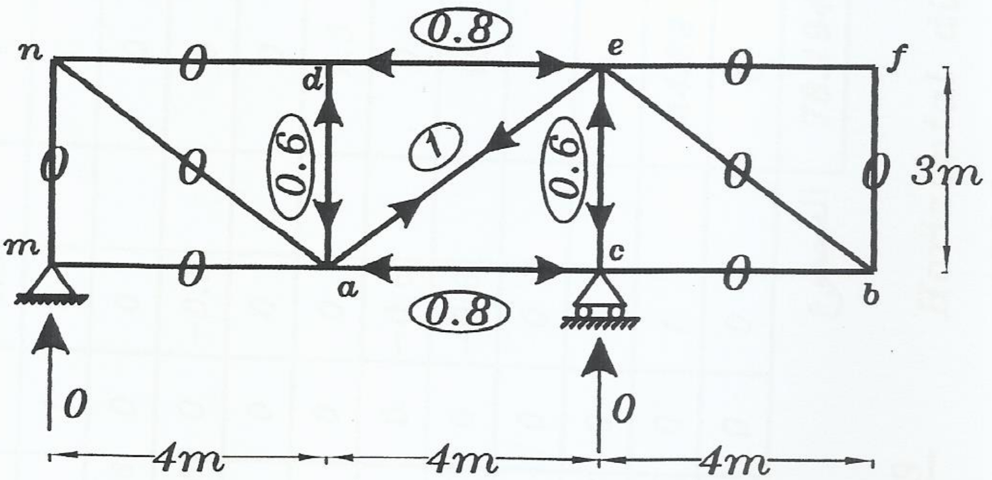
member	L	area	N_0	N_1	N_2			N_0N_1L/A	N_0N_2L/A	N	
m – a	4	1	0	0	1			0	0		
a – c	4	1	-13.33	0	1			0	-53.32		
c – b	4	1	-13.33	0	1			0	-53.32		
n – d	4	1	0	-0.66	0			0	0		
d – e	4	1	0	-0.66	0			0	0		
e – f	4	1	0	0	0			0	0		
m – n	3	1	-5	-5	0			7.5	0		
a – d	3	1	-10	0	0			0	0		
c – e	3	1	-30	-5	0			45	0		
b – f	3	1	-10	0	0			0	0		
a – n	5	2	0	0.833	0			0	0		
a – e	5	2	16.66	0.833	0			34.69	0		
e – b	5	2	16.66	0	0			0	0		
							المجموع	**78.194**	**-106.64**		

Vertical deflection @ $(a) = \frac{78.19}{E\,A}$ Horizontal displacement @ $(b) = -\frac{106.64}{E\,A}$

Relative displacement between d&C

و هنا لاننا نريد حساب ال *Relative displacement* نضع قوتين قيمة الواحدة *1t* عكس بعض فى الاتجاه على الخط الواصل بين النقطتين المراد حساب ال *Relative displacement* بينهما .





$\underline{\underline{N_3}}$

member	L	area	N_0	N_1	N_2	N_3
$m-a$	4	1	0	0	1	0
$a-c$	4	1	−13.33	0	1	−0.8
$c-b$	4	1	−13.33	0	1	0
$n-d$	4	1	0	−0.66	0	0
$d-e$	4	1	0	−0.66	0	−0.8
$e-f$	4	1	0	0	0	0
$m-n$	3	1	−5	−5	0	0
$a-d$	3	1	−10	0	0	−0.6
$c-e$	3	1	−30	−5	0	−0.6
$b-f$	3	1	−10	0	0	0
$a-n$	5	2	0	0.833	0	0
$a-e$	5	2	16.66	0.833	0	1
$e-b$	5	2	16.66	0	0	0

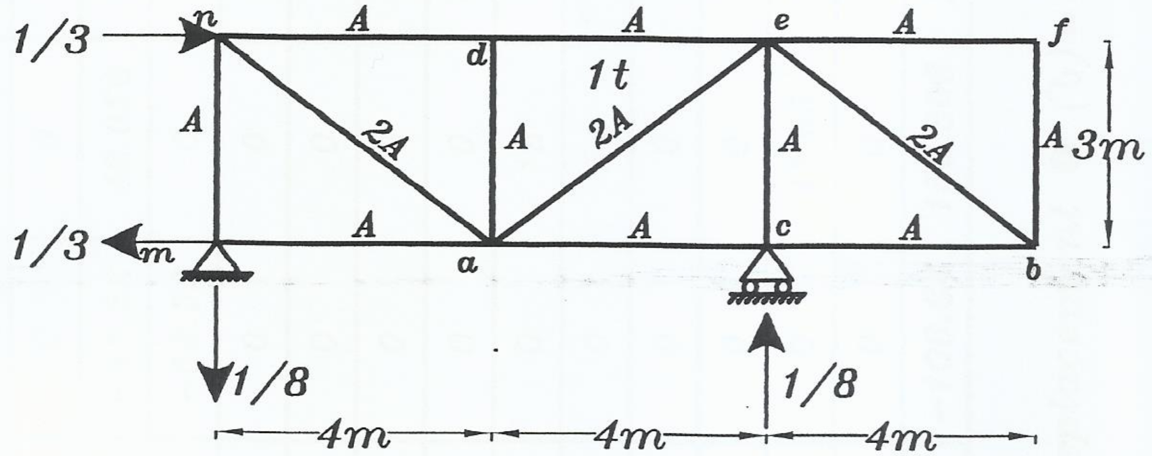
member	N_0N_1L/A	N_0N_2L/A	N_0N_3L/A
$m-a$	0	0	0
$a-c$	0	−53.32	42.656
$c-b$	0	−53.32	0
$n-d$	0	0	0
$d-e$	0	0	0
$e-f$	0	0	0
$m-n$	7.5	0	0
$a-d$	0	0	18
$c-e$	45	0	54
$b-f$	0	0	0
$a-n$	0	0	0
$a-e$	34.69	0	41.65
$e-b$	0	0	0
المجموع	**78.194**	**−106.64**	**156.306**

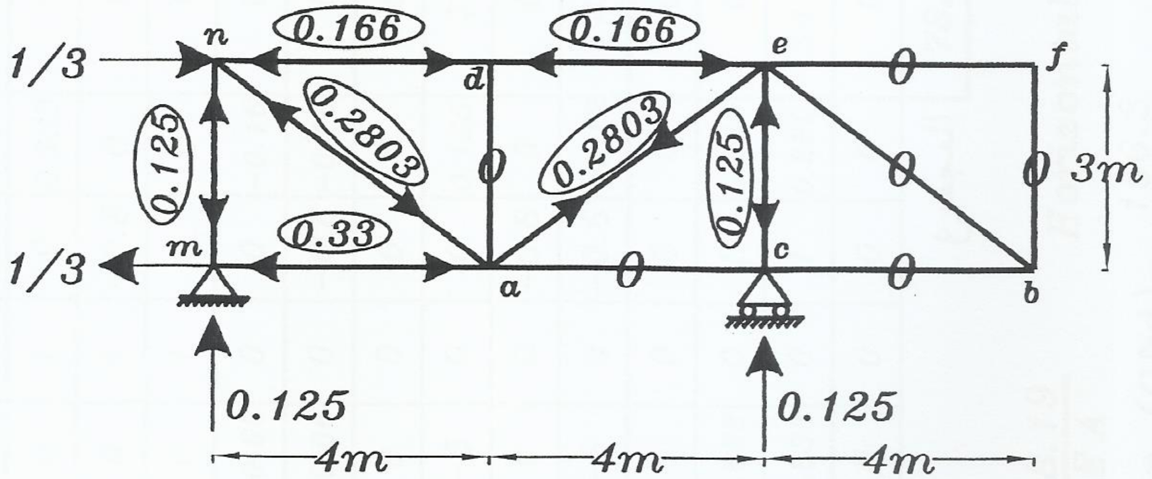
Vertical deflection @ $(a) = \frac{78.19}{EA}$ *Horizontal displacement* @ $(b) = -\frac{106.64}{EA}$

Relative displacement between $(C\&d) = \frac{156.3}{EA}$

Rotation of member (m–n)

نزيل الاحمال الموجودة على ال *Truss* و نضع عند بداية و نهاية ال *member* قوتين قيمة كل واحدة $\frac{1t}{L}$ عكس بعض فى الاتجاه و متعامدين على ال *member* حيث L هو طول ال*member*.





$\underline{\underline{N_4}}$

member	L	area	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_0N_1L/A	N_0N_2L/A	N_0N_3L/A	N_0N_4L/A
m – a	4	1	0	0	1	0	0.333	0	0	0	0
a – c	4	1	−13.33	0	1	−0.8	0	0	−53.32	42.656	0
c – b	4	1	−13.33	0	1	0	0	0	−53.32	0	0
n – d	4	1	0	−0.66	0	0	−0.16	0	0	0	0
d – e	4	1	0	−0.66	0	−0.8	−0.16	0	0	0	0
e – f	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m – n	3	1	−5	−5	0	0	0.125	7.5	0	0	−1.875
a – d	3	1	−10	0	0	−0.6	0	0	0	18	0
c – e	3	1	−30	−5	0	−0.6	−0.12	45	0	54	11.25
b – f	3	1	−10	0	0	0	0	0	0	0	0
a – n	5	2	0	0.833	0	0	0.280	0	0	0	0
a – e	5	2	16.66	0.833	0	1	0.280	34.69	0	41.65	11.67
e – b	5	2	16.66	0	0	0	0	0	0	0	0
							المجموع	**78.194**	**−106.64**	**156.306**	**21.049**

Vertical deflection @ (a) $= \dfrac{78.19}{E\,A}$ *Horizontal displacement @ (b)* $= -\dfrac{106.64}{E\,A}$

Relative displacement between (C&d) $= \dfrac{156.3}{E\,A}$

Rotation of member (m–n) $= \dfrac{21.04}{E\,A}$

...ample:

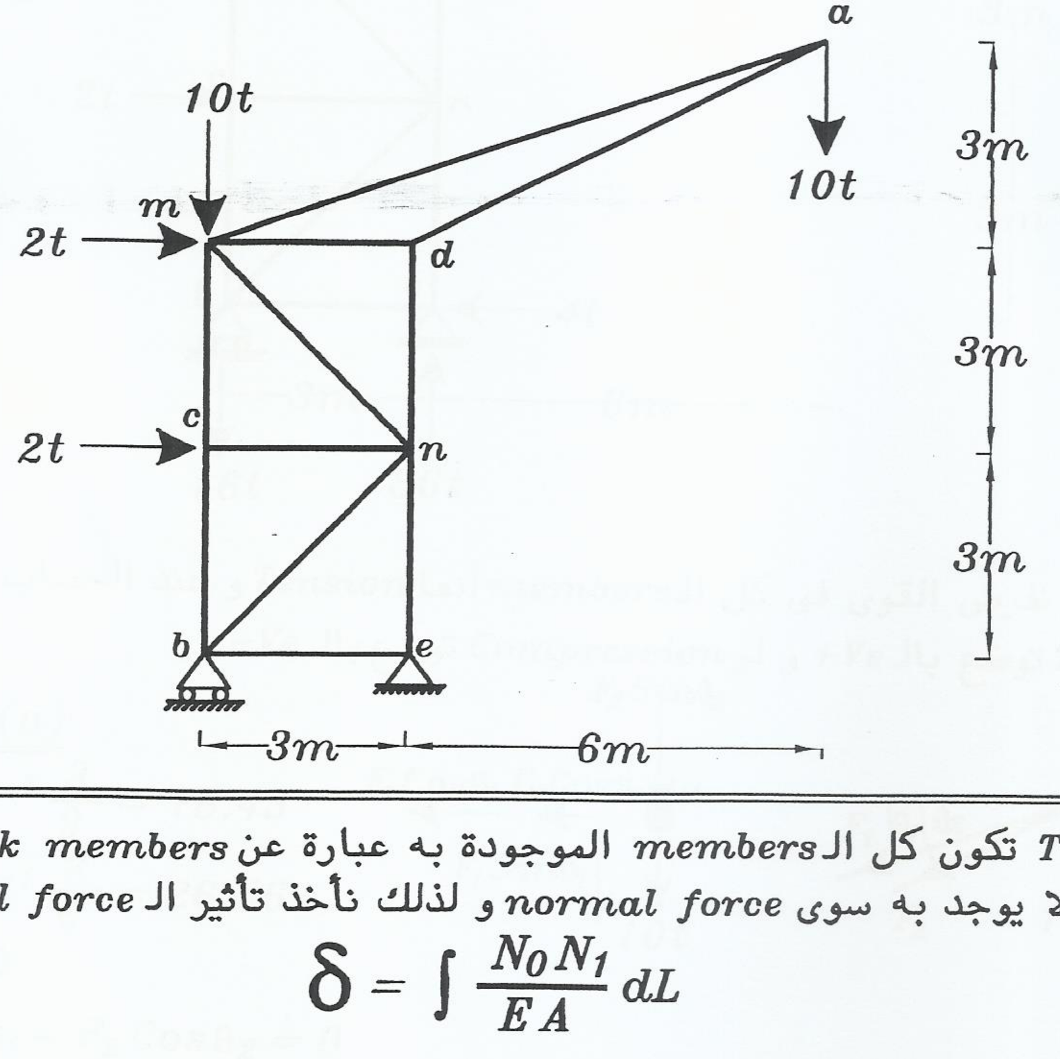
...or the shown Truss find :

1 – The vertical deflection at point (a) .

2 – The horizontal displacement at point (b) .

3 – The relative displacement between points (d & c) .

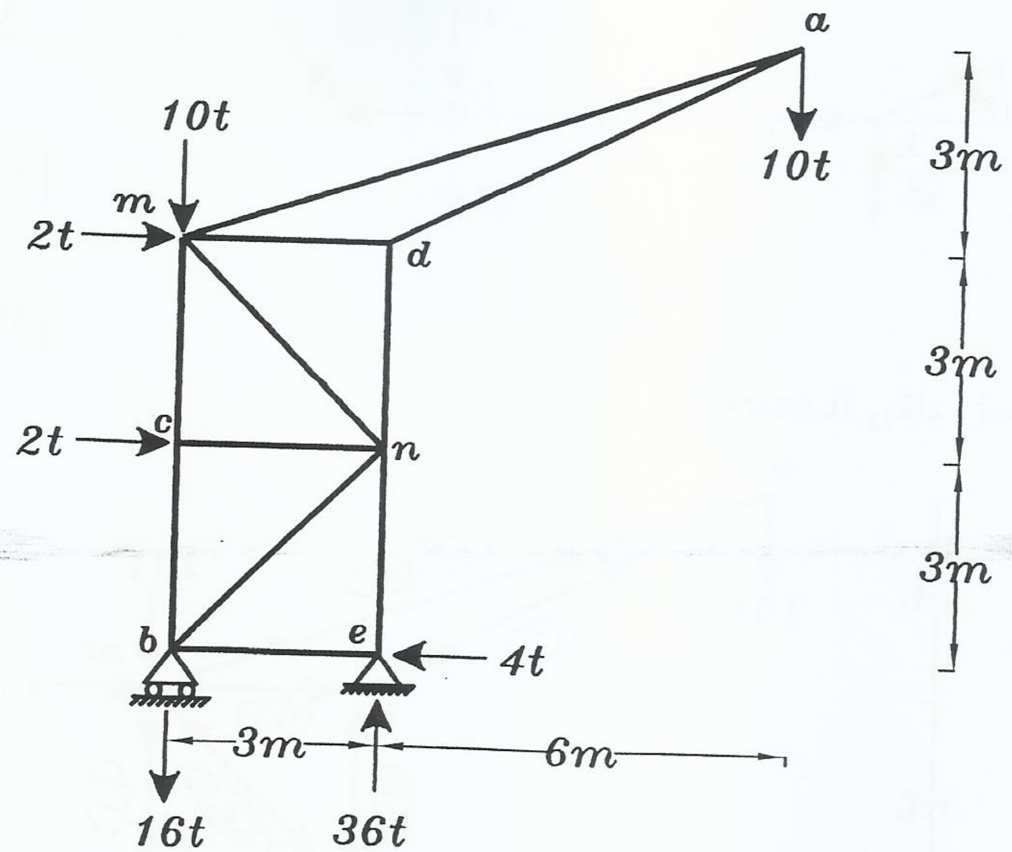
4 – The rotation of member (m – n).



الـ Truss تكون كل الـ members الموجودة به عبارة عن Link members أى أنه لا يوجد به سوى normal force و لذلك نأخذ تأثير الـ normal force فقط .

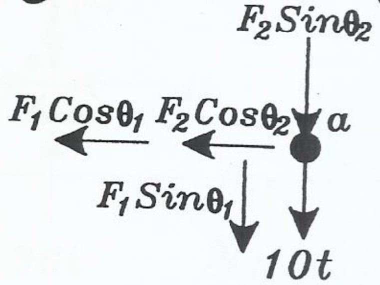
$$\delta = \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

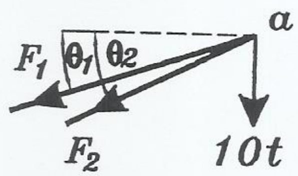
و لحساب الـ N_0 نحتاج لحساب الـ force فى كل الـ members الـ Truss نتيجة الاحمال المؤثرة عليه و نرسم الـ N.F.D للـ Truss.



يفضل أن نفرض القوى فى كل الـ *members* أنها *Tension* و عند الحساب لو طلعت *Tension* توضع بالـ *+Ve* و لو *Compression* توضع بالـ *-Ve* .

Joint (a)





$$\theta_1 = tan^{-1}\frac{3}{9} = 18.43$$

$$\theta_2 = tan^{-1}\frac{3}{6} = 26.56$$

$$\Sigma X = 0$$

$$F_1 Cos\theta_1 + F_2 Cos\theta_2 = 0$$

$$0.948 F_1 + 0.894 F_2 = 0 \Longrightarrow Eq.1$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$F_1 Sin\theta_1 + F_2 Sin\theta_2 + 10 = 0$$

$$0.316 F_1 + 0.447 F_2 + 10 = 0 \Longrightarrow Eq.2$$

Solving the two equations :

$\boxed{F_1 = 63.24t}$ $\boxed{F_2 = -67t}$

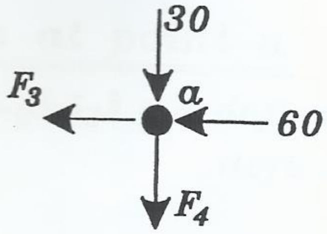
nt (d)

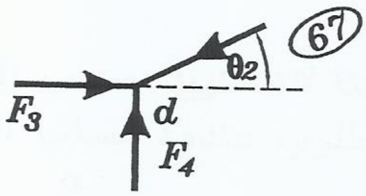
$\Sigma X = 0$

$\boxed{F_3 = -60t}$

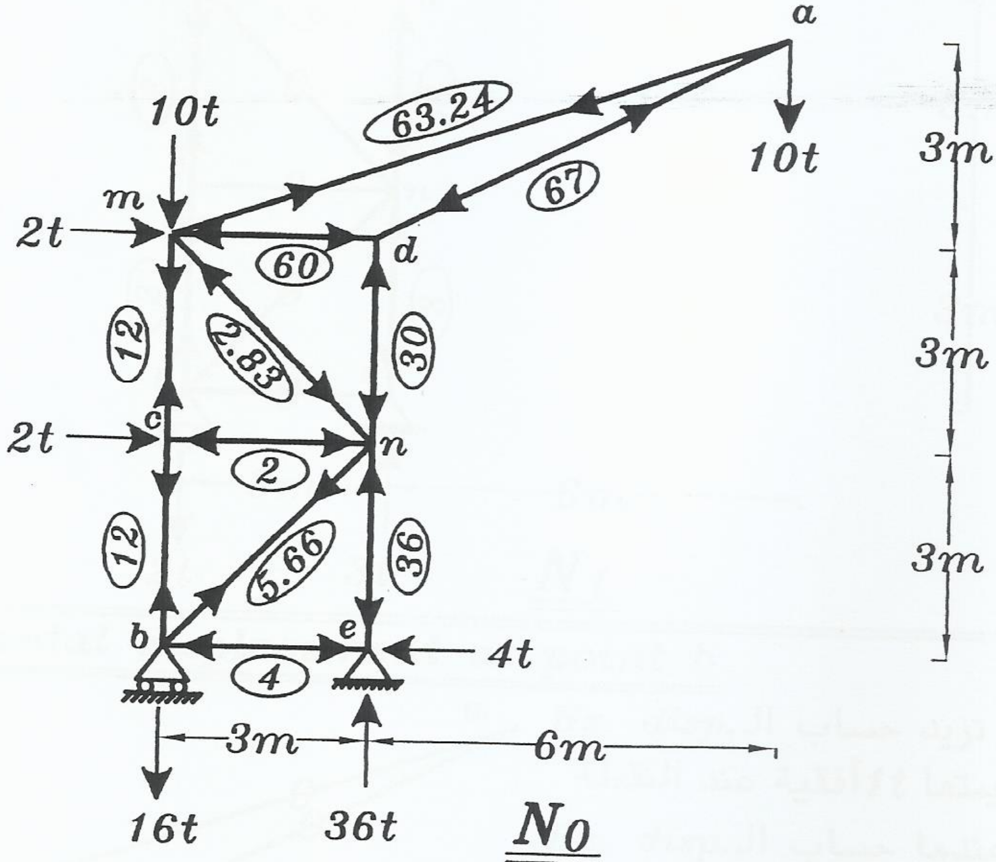
$\Sigma Y = 0$

$\boxed{F_3 = -30t}$





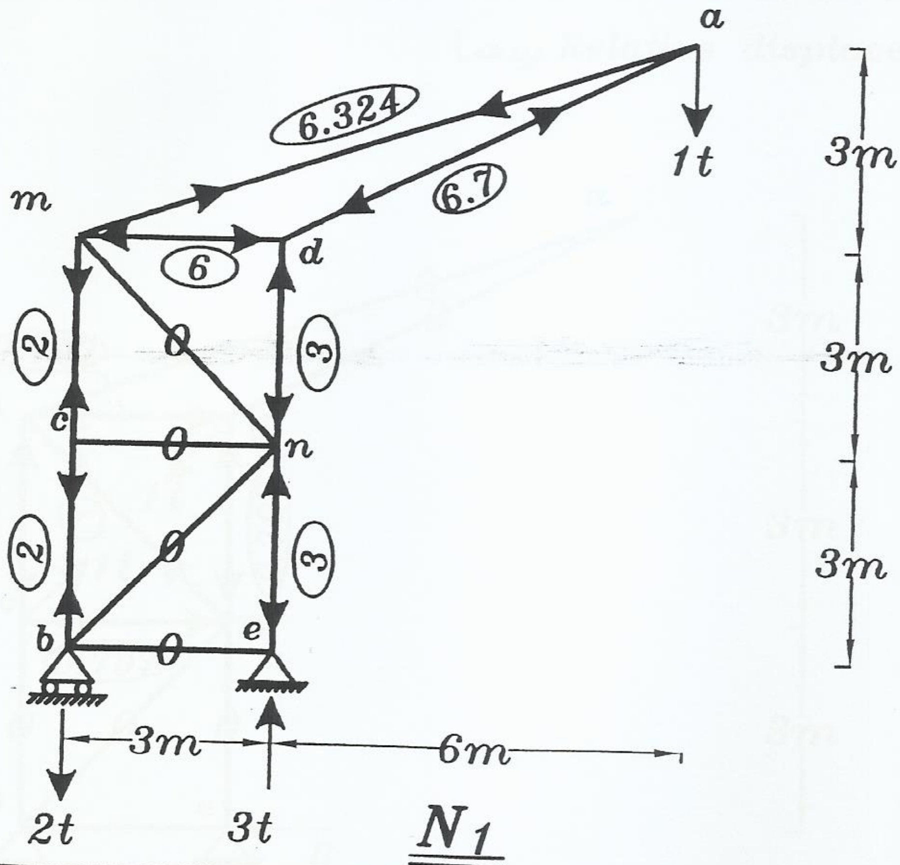
ثم نكمل حل باقى الـ Truss



N_0

-Vertical deflection at point a

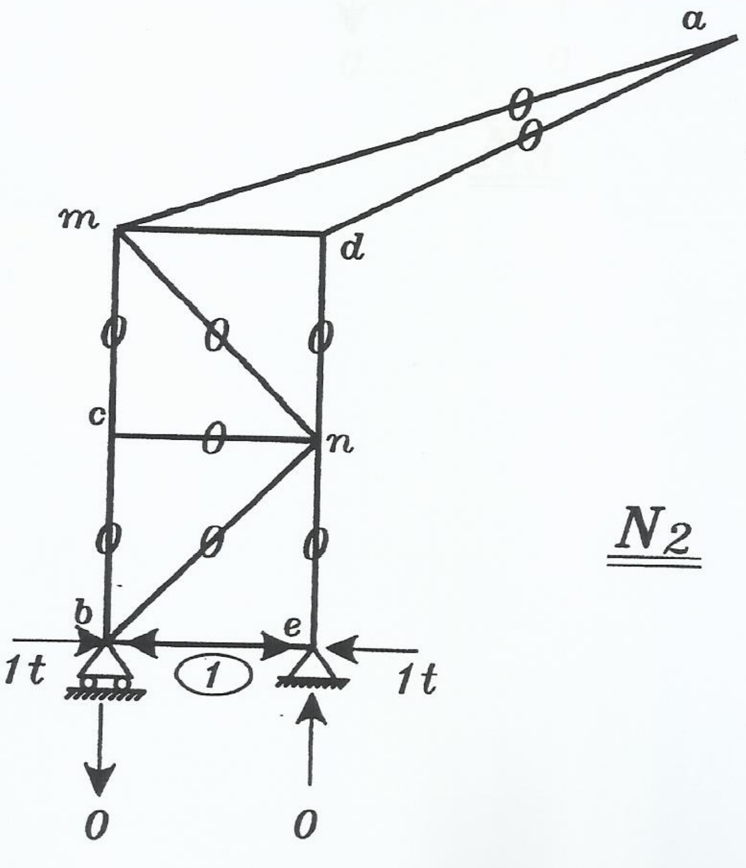
و هنا لاننا نريد حساب الـ *deflection* نضع قوة قيمتها *1t* رأسيا عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *deflection*.



$\underline{\underline{N_1}}$

2-Horizontal displacement at point b

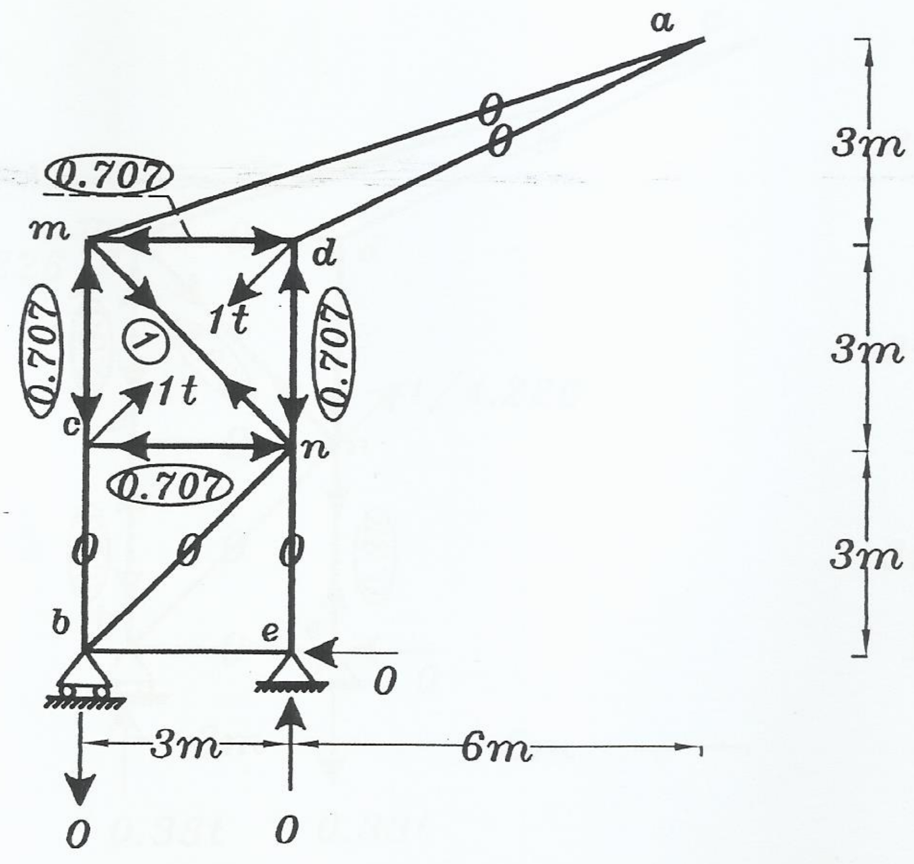
و هنا لاننا نريد حساب الـ *Hz. disp.* نضع قوة قيمتها *1t* أفقية عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *Hz. disp.*



$\underline{\underline{N_2}}$

-Relative displacement between d&C

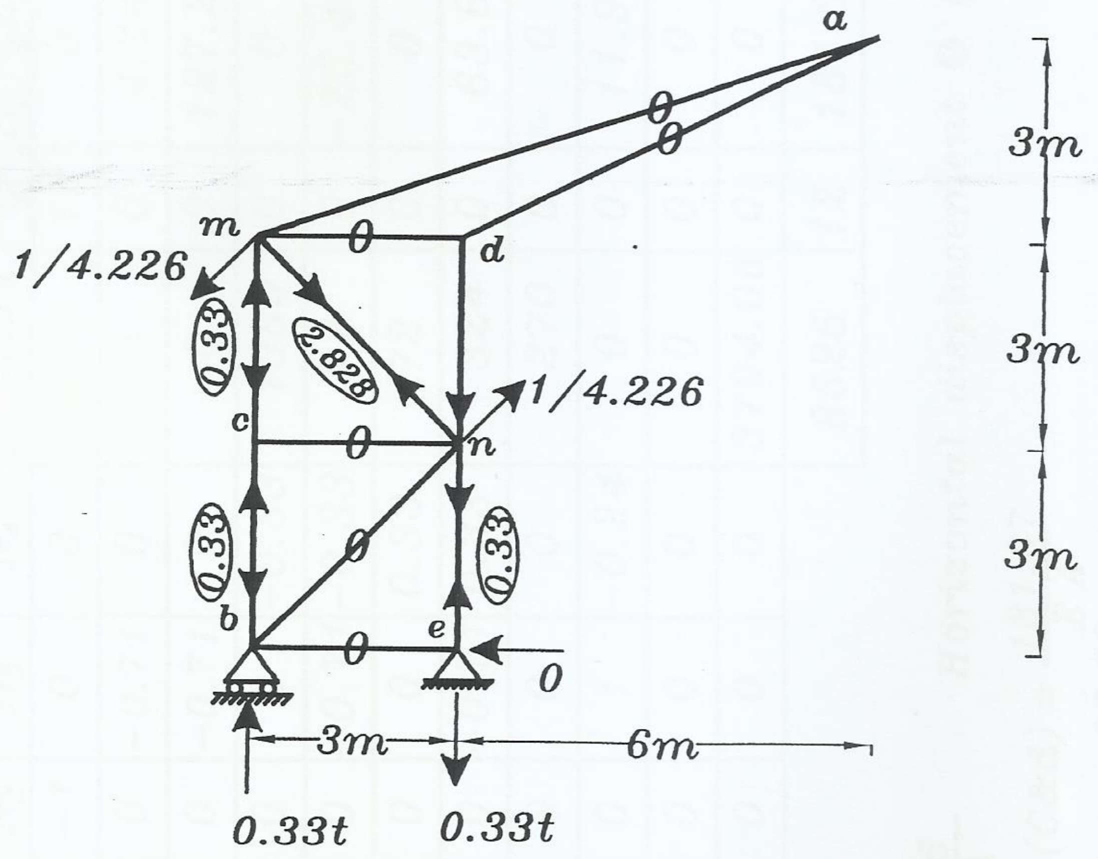
و هنا لاننا نريد حساب ال *Relative displacement* نضع قوتين قيمة الواحدة *1t* عكس بعض فى الاتجاه على الخط الواصل بين النقطتين المراد حساب ال *Relative displacement* بينهما .



N3

Rotation of member (m−n)

نزيل الاحمال الموجودة على الـ *Truss* و نضع عند بداية و نهاية الـ *member* قوتين قيمة كل واحدة $\frac{1t}{L}$ عكس بعض فى الاتجاه و متعامدين على الـ *member* حيث L هو طول الـ*member*.



N_4

member	L	area	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_0N_1L/A	$\frac{N_0N_3L}{A}$	N_0N_3L/A	N_0N_4L/A
b−e	3	1	−4	0	−1	0	0	0	12	0	0
c−n	3	1	−2	0	0	−0.71	0	0	0	4.242	0
m−d	3	1	−60	−6	0	−0.71	0	0	0	127.26	0
b−c	3	1	12	2	0	0	−0.33	1080	0	0	−11.99
c−m	3	1	12	2	0	−0.71	−0.33	72	0	−25.452	−11.99
e−n	3	1	−36	−3	0	0	0.33	72	0	0	−35.99
n−d	3	1	−30	−3	0	−0.71	0.33	324	0	63.63	−29.99
b−n	4.24	1	5.65	0	0	0	0	270	0	0	0
n−m	4.24	1	2.83	0	0	1	−0.24	0	0	11.99	−2.83
m−a	4.24	1	63.24	6.324	0	0	0	0	0	0	0
d−a	6.71	1	67	6.7	0	0	0	3794.06	0	0	0
								8625	**12**	**181.67**	**−92.82**

Vertical deflection @ $(a) = \frac{8625}{E\,A}$ *Horizontal displacement* @ $(b) = \frac{12}{EA}$

Relative displacement between $(C\&d) = \frac{181.67}{E\,A}$

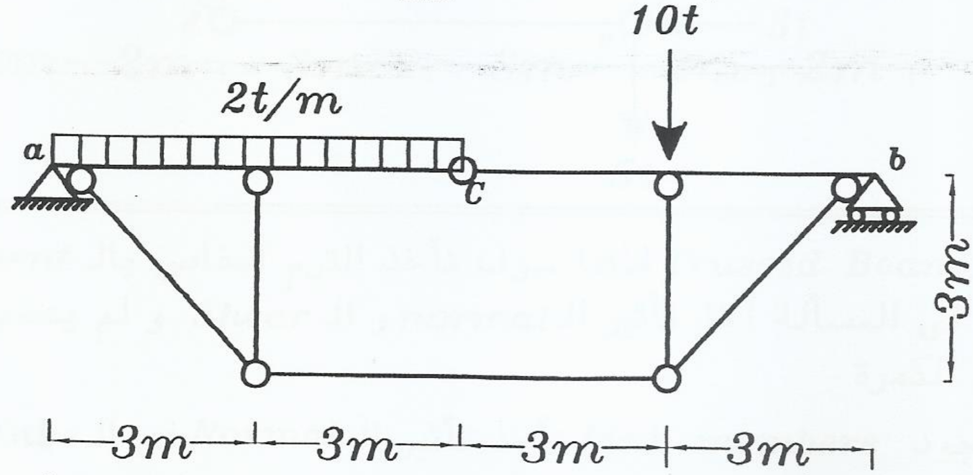
Rotation of member $(m-n) = -\frac{92.82}{E\,A}$

TRUSSED BEAMS

فى حالة وجود كمرة أو *Frame* و بها أكثر من *Link member* عند حساب أى *deformation* بها يكون كالتالى.

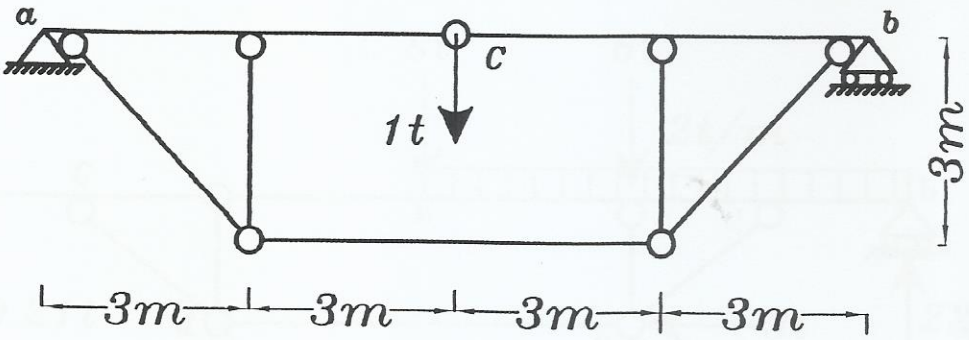
$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL}_{Beam} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL}_{Link\ members}$$

أى أنها تكون مثل مسألة صفحة ٤١ فى هذه الملزمة و لكن بها أكثر من *Link* و لذلك عند حساب الترم الخاص بـ $\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$ نجمع لكل الـ *Link member*.



فمثلا فى هذه المسألة لو مطلوب حساب الـ *deflection* عند نقطة *C* نحل الكمرة بالاحمال الموجودة عليها و نرسملها الـ $B.M.D\ (M_0)$ و نحيب القوى فى الـ *Links* و نسميها (N_0).

نزيل كل القوى الموجودة و نضع *1t* رأسى عند النقطة المطلوب عندها حساب الـ *deflection*.



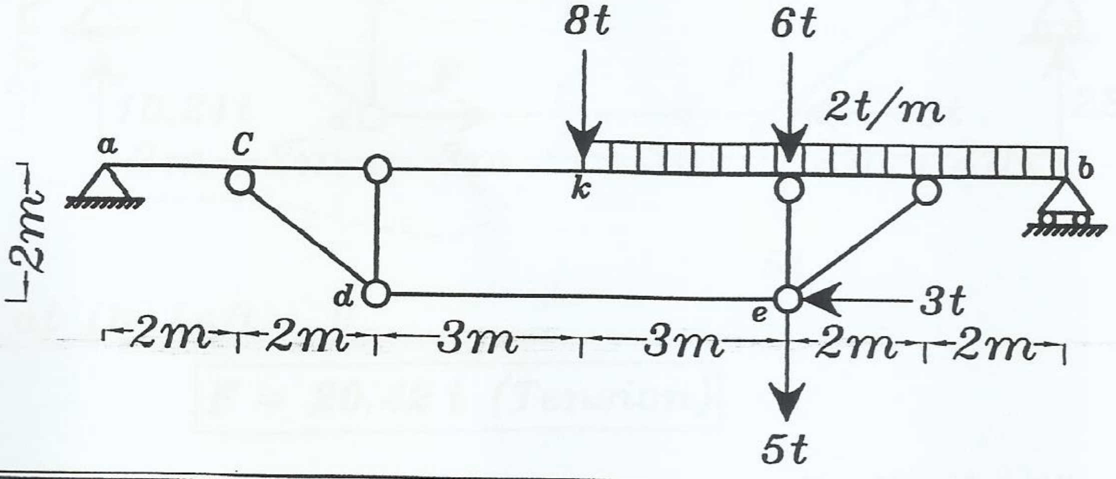
نحل الكمرة و نرسملها الـ $B.M.D\ (M_1)$ و نحيب القوى فى الـ *Links* و نسميها (N_1).

و تكون الـ δ كالتالى

$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL}_{Beam} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL}_{Link\ members}$$

Example:

For the shown frame Trussed beam calculate $(Y_e \ \& \ X_e)$
$EI = 25000 \ m^2 t \ \& \ EA_{Link} = 50000 \ t$



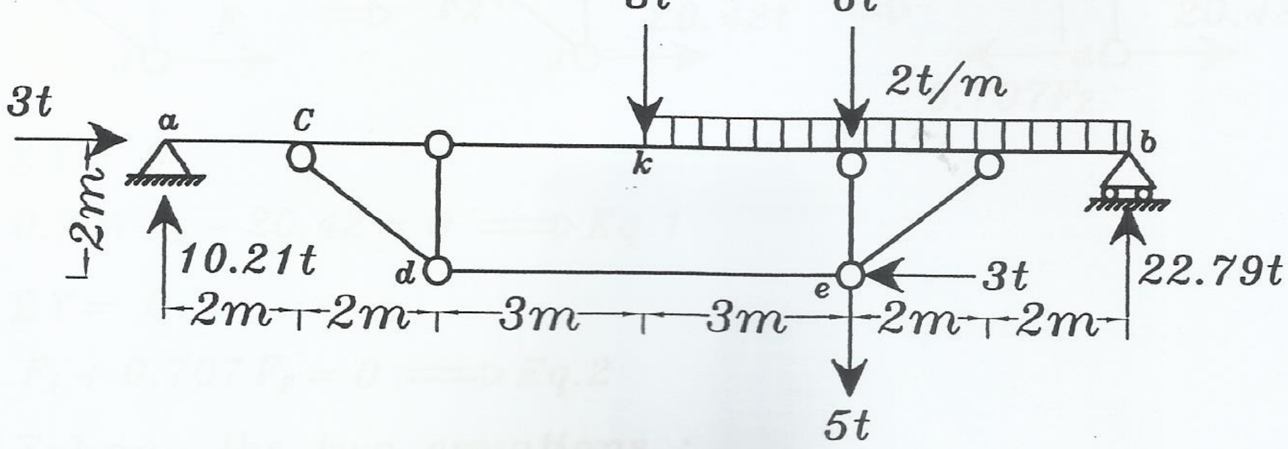
حيث أنه *Trussed Beam* فاننا سوف نأخذ الترم الخاص بال *moment*
لم يطلب فى المسألة أخذ تأثير الـ *normal* و الـ *Shear* و لم يعطى الـ GA_r
أو الـ EA للكمرة .

و لكن لوجود *Link members* نأخذ تأثير الـ *Normal* فى الـ *Links*
و لذلك أعطى الـ EA لل *Link* .

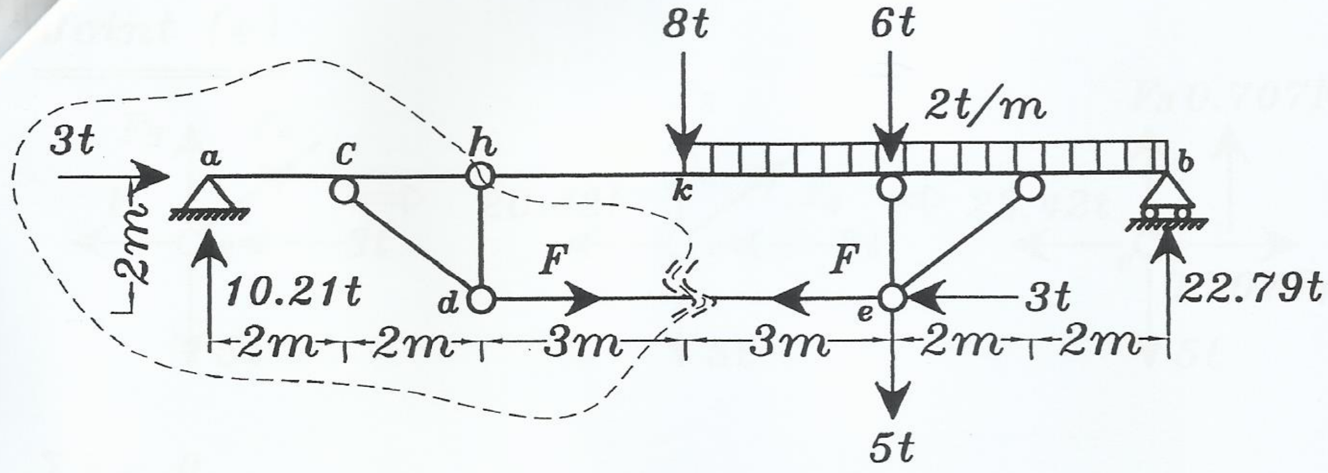
$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI} dL}_{Frame} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA} dL}_{Link\ members}$$

أولا: نرسم *B.M.D* للكمرة الاصلية و الـ *N.F.D.* لل *Links* :

نحسب *Reactions* المسألة



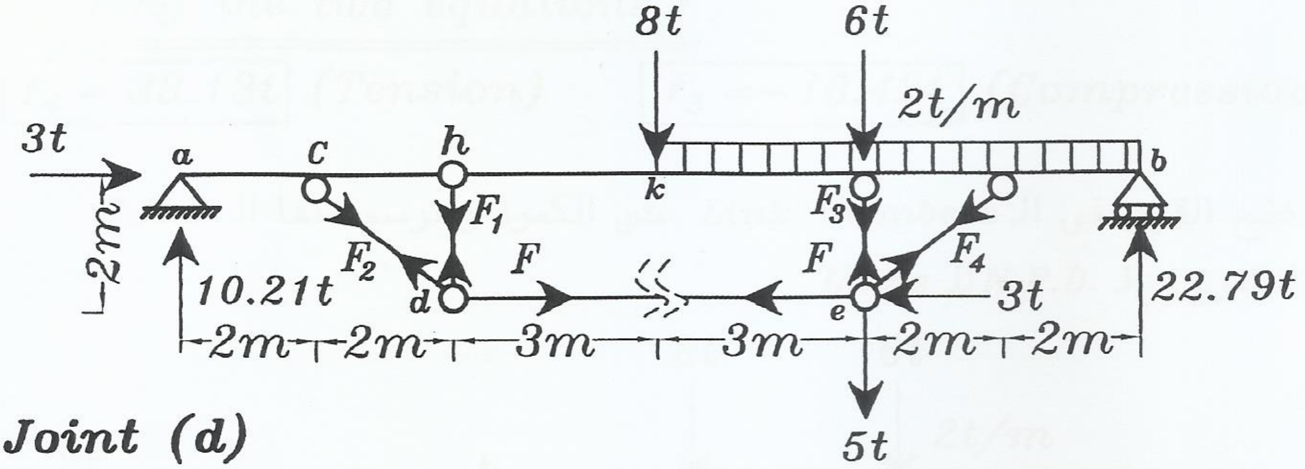
نحسب القوة فى الـ *Link member (de)* عن طريق القطع كالتالى



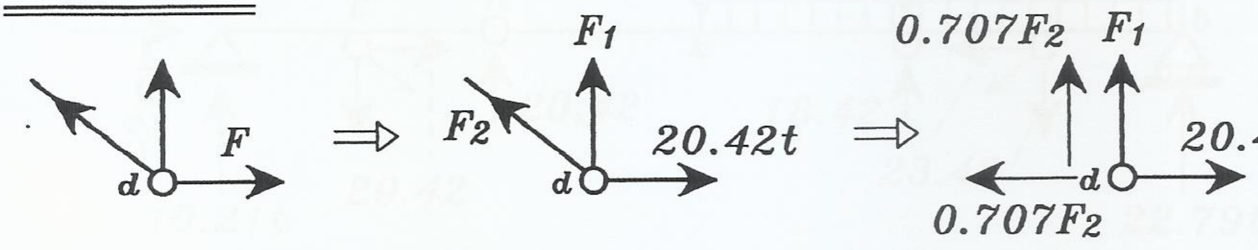
$\Sigma M at \ (h) \ Left = 0$

$$\boxed{F = 20.42 \ t \ (Tension)}$$

نحسب القوة فى باقى الـ Link members من اتزان الـ Joints



Joint (d)



$\Sigma X = 0$

$0.707 \, F_2 - 20.42 = 0 \Longrightarrow Eq.1$

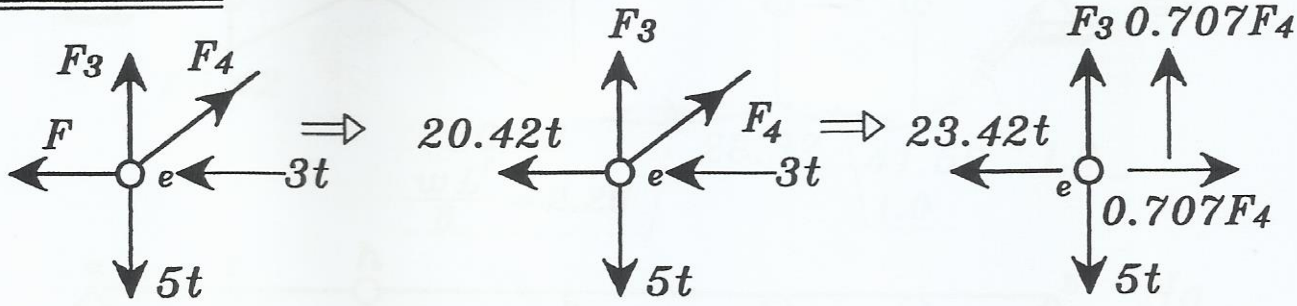
$\Sigma Y = 0$

$F_1 + 0.707 \, F_2 = 0 \Longrightarrow Eq.2$

Solving the two equations :

$\boxed{F_2 = 28.88t}$ (Tens.) $\boxed{F_1 = -20.42}$ (Compression)

Joint (e)



$\Sigma X = 0$

$0.707\,F_4 - 23.42 = 0 \Longrightarrow Eq.1$

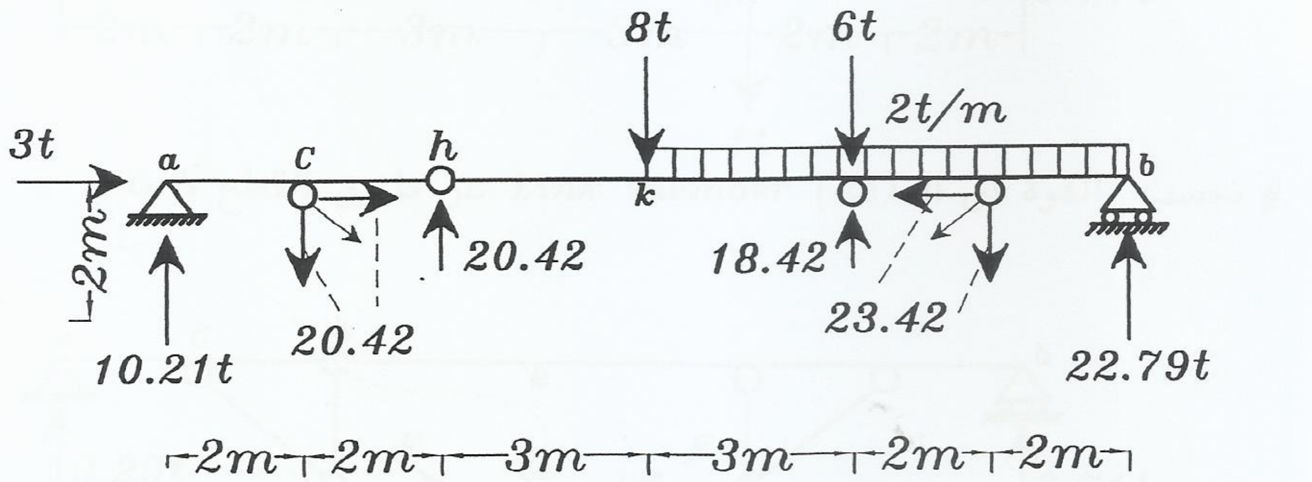
$\Sigma Y = 0$

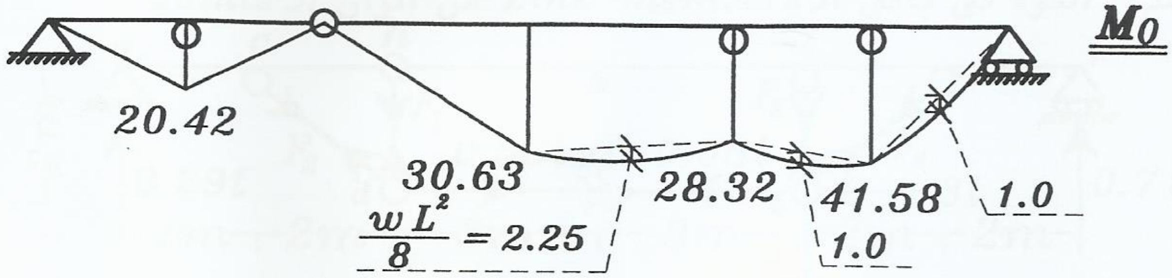
$F_3 + 0.707\,F_4 - 5 = 0 \Longrightarrow Eq.2$

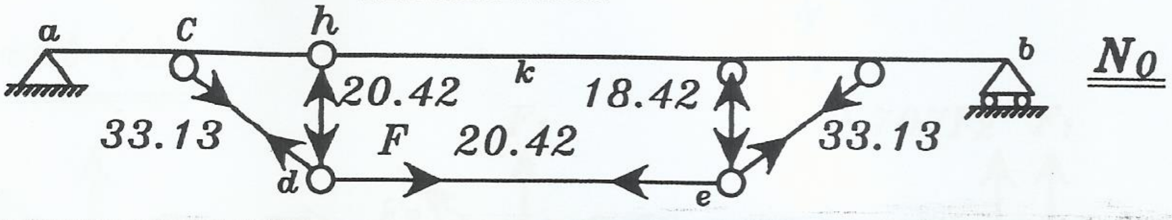
Solving the two equations :

$\boxed{F_4 = 33.13t}$ (Tension) $\boxed{F_3 = -18.42t}$ (Compression)

نضع القوى فى ال *Link members* على الكمرة و نرسم منها ال B.M.D للكمرة و ال N.F.D. للLinks

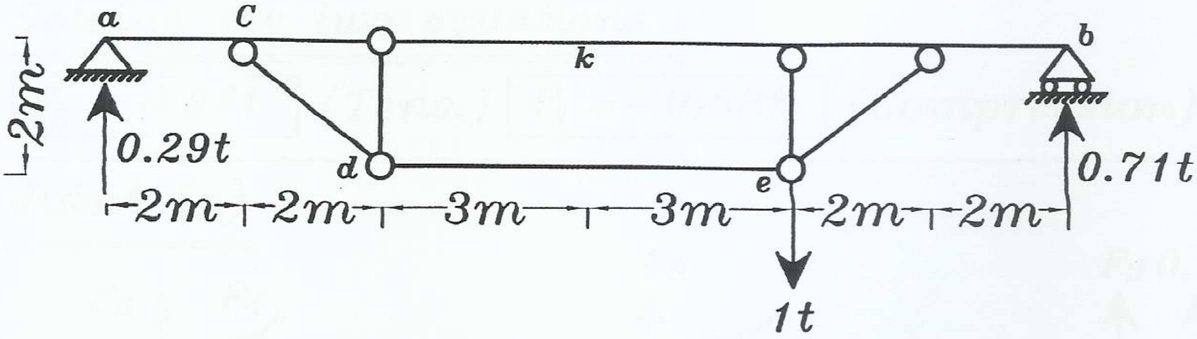




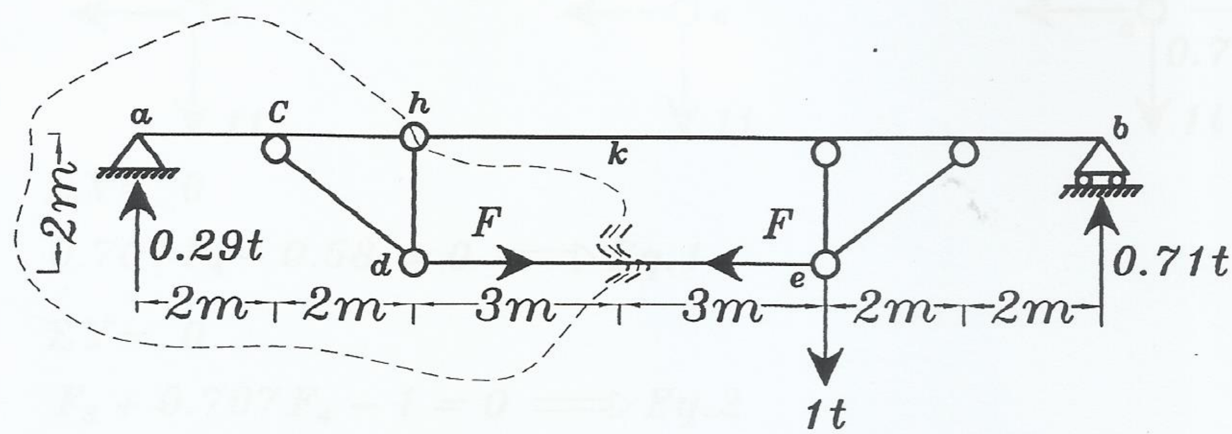


ثانيا : نزيل الاحمال الموجودة على الكمرة و نضع عند النقطة المطلوب حساب ال *Vertical deflection* قوة *1t* رأسية و نرسم ال *B.M.D* للكمرة الجديدة و ال *N.F.D.* لل *Links* :

نحسب *Reactions* المسألة



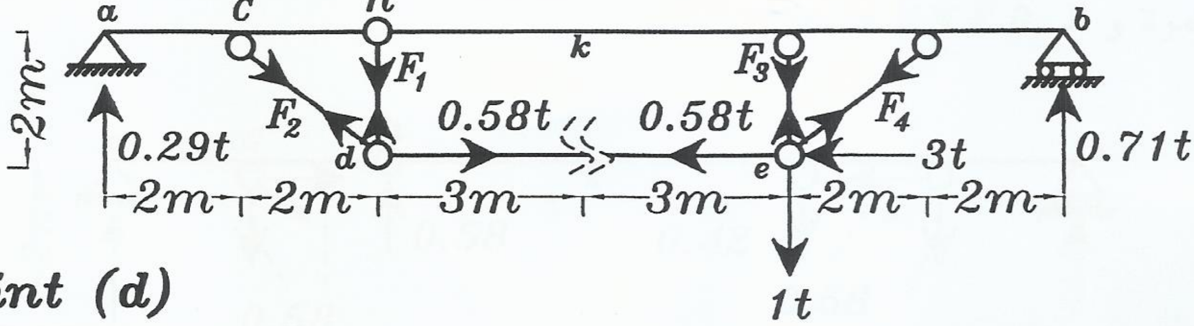
نحسب القوة فى ال *Link member (de)* عن طريق القطع كالتالى



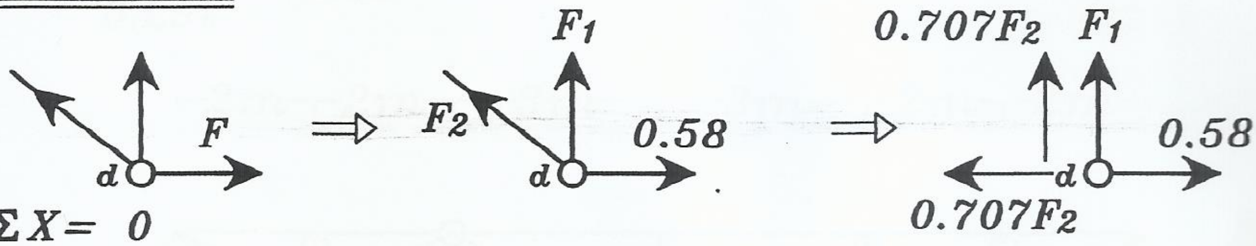
$\Sigma M\,at\ (h)\ Left = 0$

$\boxed{F = 0.58\ t\ (Tension)}$

نحسب القوة فى باقى ال Link members من اتزان ال Joints



Joint (d)



$\Sigma X = 0$

$0.707\,F_2 - 0.58 = 0 \Longrightarrow Eq.1$

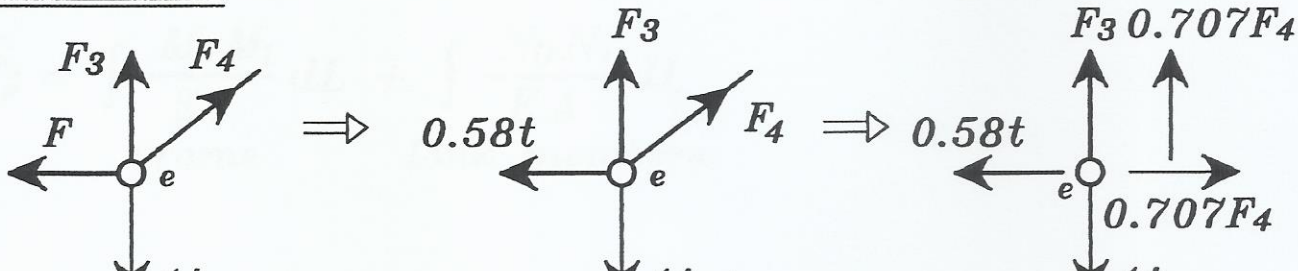
$\Sigma Y = 0$

$F_1 + 0.707\,F_2 = 0 \Longrightarrow Eq.2$

Solving the two equations :

$\boxed{F_2 = 0.82t}$ (Tens.) $\boxed{F_1 = -0.58t}$ (Compression)

Joint (e)



$\Sigma X = 0$

$0.707\,F_4 - 0.58 = 0 \Longrightarrow Eq.1$

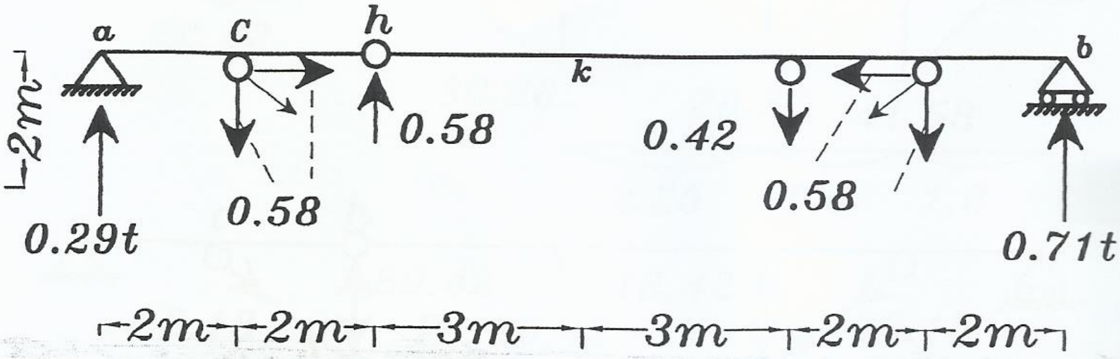
$\Sigma Y = 0$

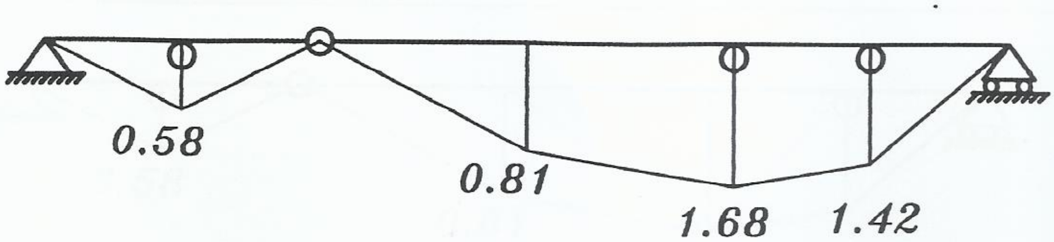
$F_3 + 0.707\,F_4 - 1 = 0 \Longrightarrow Eq.2$

Solving the two equations :

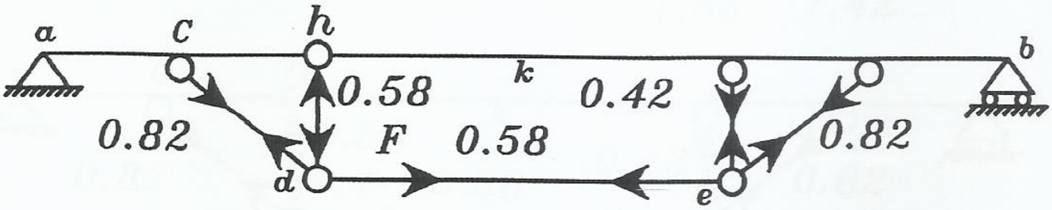
$\boxed{F_4 = 0.82t}$ (Tension) $\boxed{F_3 = 0.42t}$ (Tension)

نضع القوى فى ال *Link members* على الكمرة و نرسم منها ال *B.M.D* للكمرة و ال *N.F.D.* لل *Links*





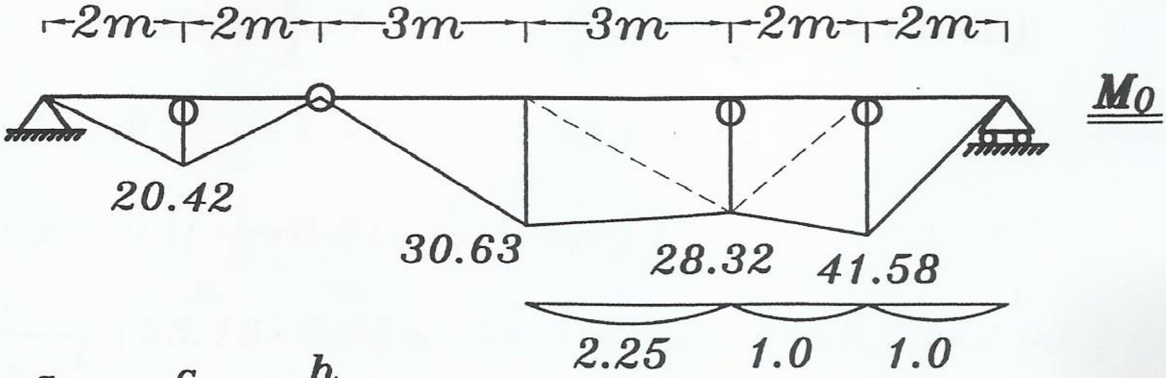
$\underline{\underline{M_1}}$

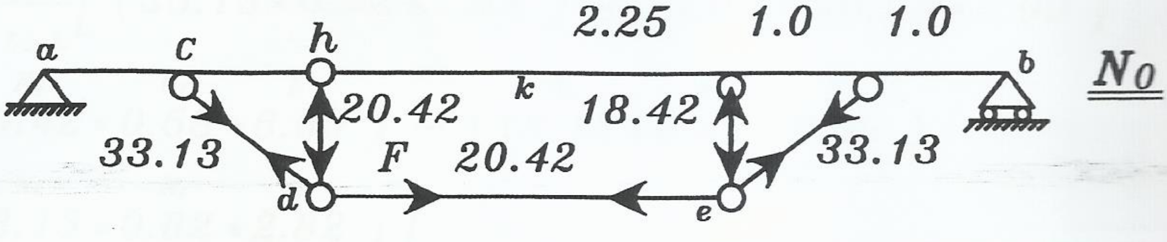


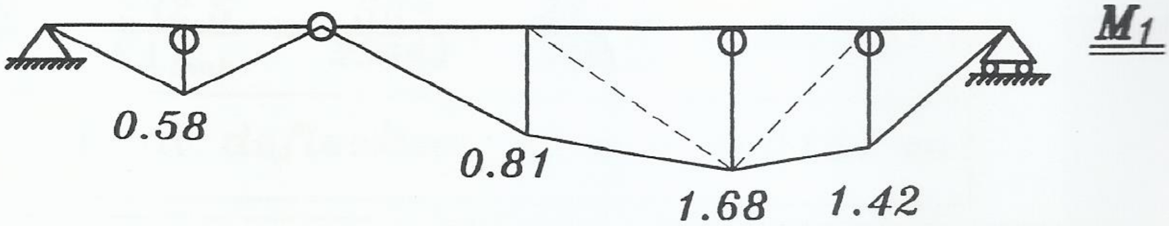
$\underline{\underline{N_1}}$

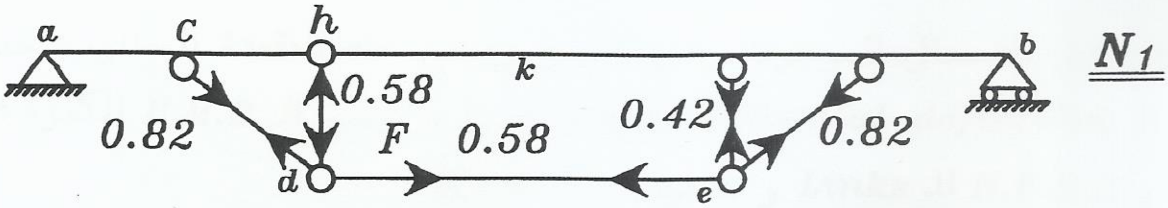
نحسب ال *deflection* من معادلة ال *Virtual work*

$$\delta = \underbrace{\int \frac{M_0 M_1}{EI}\, dL}_{\text{Frame}} + \underbrace{\int \frac{N_0 N_1}{EA}\, dL}_{\text{Link members}}$$









$$\delta = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dL + \int \frac{N_0 N_1}{EA} dL$$

Frame *Link members*

$$\delta = \frac{1}{EI}\Big[(\frac{1}{2}*2*20.42)(\frac{2}{3}*0.58)$$

$$+ (\frac{1}{2}*2*20.42)(\frac{2}{3}*0.58) + (\frac{1}{2}*3*30.63)(\frac{2}{3}*0.81)$$

$$+ (\frac{1}{2}*3*30.63)(\frac{2}{3}*0.81+\frac{1}{3}*1.68)$$

$$+ (\frac{1}{2}*3*28.92)(\frac{2}{3}*1.68+\frac{1}{3}*0.81)$$

$$+ (\frac{1}{2}*2*28.92)(\frac{2}{3}*1.68+\frac{1}{3}*1.42)$$

$$+ (\frac{1}{2}*2*41.58)(\frac{2}{3}*1.42+\frac{1}{3}*1.68)$$

$$+\left(\frac{1}{2}*2*41.58\right)\left(\frac{2}{3}*1.42\right)+\left(\frac{2}{3}*2*1.0\right)\left(\frac{1}{2}*1.42\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}*2*1.0\right)\left(\frac{1}{2}*1.42+\frac{1}{2}*1.68\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}*2*1.0\right)\left(\frac{1}{2}*0.81+\frac{1}{2}*1.68\right)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{EA_{Link}}\Bigg[\left(\overset{N_0}{33.13}*\overset{N_1}{0.82}*\overset{L}{2.82}\right)+\left(\overset{N_0}{20.42}*\overset{N_1}{0.58}*\overset{L}{2.00}\right)$$

$$+\left(\overset{N_0}{20.42}*\overset{N_1}{0.58}*\overset{L}{6.00}\right)-\left(\overset{N_0}{18.42}*\overset{N_1}{0.42}*\overset{L}{2.00}\right)$$

$$+\left(\overset{N_0}{33.13}*\overset{N_1}{0.82}*\overset{L}{2.82}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{302}{EI}+\frac{232.5}{EA_{Link}}=\frac{302}{25000}+\frac{232.5}{50000}=0.0167\ m$$

$$\boxed{\text{Vertical deflection at } e = 0.0167\ m}$$

ثالثا : نزيل الاحمال الموجودة على الكمرة و نضع عند النقطة المطلوب حساب ال *Horizontal deflection* قوة $1t$ أفقية و نرسم ال *B.M.D* للكمرة الجديدة و ال*N.F.D.* لل *Links* و نسميها M_1 & N_1

ثم نحسب ال*Horizontal deflection*

$$\delta=\underset{Frame}{\int\frac{M_0 M_2}{EI}dL}+\underset{Link\ members}{\int\frac{N_0 N_2}{EA}dL}$$